陈文忠　编著

厦门大学出版社

算子逼近论

62

0

算子逼近论

陈文忠 编著

厦门大学出版社

1991.12.

内容简介

本书系统介绍了算子逼近中的收敛原理，逼近度量化估计方法和精度分析方法，以及各类逼近等价定理和饱和定理，其中包括了作者一些最新研究成果。书中除了不加证明地引用泛函分析中若干重要事实外，力求概念清晰，论证严谨。

本书可作为函数逼近论，应用泛函分析，数值逼近论方向研究生和数学专业本科生的选修课教材，也可供函数论，计算数学等方向的研究人员以及科技工作者，大学教师参考。

3N88/121

算子逼近论

陈文忠　编著

*

厦门大学出版社出版发行

福建省新华书店经销

莆田市印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/16　28.125印张　597千字

1989年6月第1版　1991年12月第2次印刷

印数：　1001—4000册

ISBN 7-5615-0182-5

O·7　定价：10.50元

序　言

最初人类认识的函数是多项式，后来发展为解析函数，Lagrange（1736～1813）最早提出幂级数，用级数表示解析函数，可以看做多项式的发展，1822年Fourier在关于热传导的著作中提出Fourier级数，即用三角函数级数表示函数，无穷级数取有限项即它所表示的函数的近似式，这是函数构造论的开始。20世纪末，随着知识爆炸时代的到来，各种正交级数的出现，对每一正交级数都可以作出一套逼近程序，在这种科学分枝越来越多的情况下，用泛函的方法把它统一起来，这是在逼近论中引入算子概念的一个自然趋势。开始有Bernstein算子，Fejer算子出现，发展到一般算子理论处理逼近论问题，从方法上说可以看做高度概括，对不同的应用问题又可派生出不同逼近程序，所以算子逼近论是当前逼近论的发展热点。本书是算子逼近理论的一部学术著作作者将当前外国书刊中成果作了综合的论述，并将他自己的工作和他处理问题的独特的方法作了阐述，可以作为高年级专门化课程及研究生的教材，此书的出版对逼近论及线性算子理论的研究将会产生深远的影响。

李文清

1989年1月15日

前　言

从本世纪50年代开始，泛函分析方法在逼近理论的研究和应用中的影响日益增大，并形成逼近论的一个重要分支——算子逼近，其原因是算子逼近将泛函分析中高度概括的思维方法和古典分析中的精致技巧结合起来，从而使经典的逼近方法有了新的生长点，因此三十多年来算子逼近的研究得到迅速发展，建立了系统的方法和理论并对其它数学分支（例如概率论，数值分析等等）产生广泛的影响。

算子逼近理论主要是研究如下一些问题。

1）研究线性算子序列的收敛性质，这里主要讨论依范数收敛，点态收敛以及收敛速度的渐近分析，这类问题统称为逼近定理。关于这方面的工作是1951年由P.P.Korovkin和H.Bohman分别对连续函数空间建立的，随后由许多学者逐步推广到可测函数空间，例如，p次可积空间，有界变差函数空间以及各种抽象函数空间。

2）研究收敛速度的量化，这里包含两个方面的问题，具体地说，设$\{L_n\}$是线性算子列，X是确定的线性赋范空间，一方面首先研究对每个$f\in X$，逼近度$\|L_n(f)-f\|_X$的阶，其次研究量$\sup_{f\in X}\|L_n(f)-f\|_X$的阶，这类结果称为算子逼近中的量化正定理。关于量化正定理的研究起始于R.G.Mamedov，O.Shisha和B.Mond等人的工作，另一方面为了确定量化正定理所得到的收敛阶精度，进而研究所谓逼近逆定理以及各类精度分析方法，它的基本思想是由Bernstein创立的，而算子逼近的逆定理主要是由G.G.Lorentz及其学生建立的，例如P.L.Butzer，H.Berens等人都做了大量的出色工作。

3）研究算子逼近中的饱和现象，这主要的工作是确定算子逼近中的饱和阶和饱和类。人们统称这类结果为饱和定理，当然它们也是衡量逼近精度的一个重要事实。A.H.Turesky，M.Zamansky，R.A.DeVore，Z.Ditzian以及V.Totik在这方面做了大量的研究工作。

本书系统地讨论算子逼近中的收敛原理，逼近度量化估计方法和精度分析方法，以及各类逼近等价定理和饱和定理。其中包括了近几年来作者的一些研究成果，本书中除了不加证明地引用泛函分析中若干重要事实外，力求概念清晰、论证严谨。

在本书的写作过程中得到徐利治、李文清和孙永生等教授的热情鼓励和帮助，谨向他们深切致谢，此外本书初稿曾在厦门大学数学系，北京师范大学数学系，华中理工大学数学研究所，湖北大学数学系，河南大学数学系，湖南师范大学数学系以及宁夏大学数学系为逼近论方向的研究生报告过，得到不少宝贵意见，最后特别应当指出，曾晓明、吴自力

两同志为本书格式范规化花费大量心血，借此机会作者一并表示由衷的感谢。

限于作者水平，错误和不当之处肯定不少，敬请国内专家和读者给予指正。

陈文忠

1987年5月于厦门大学

目　录

第二章 逼近度估计

第三章 逼近精度与逆定理

第四章　算子逼近的饱和理论

第一章　逼近定理

§1　线性算子

1.1　Banach 空间

设X是实数（或复数）域Z上的线性空间，在X上定义一个非负实值函数$\|\cdot\|_X$，若适合如下条件称它为X中元素的范数：

i）$\|x\|_X=0 \iff x=\theta$（X中的零元素），

ii）$\|\alpha x\|_X=|\alpha|\,\|x\|_X \quad (\alpha\in Z)$，

iii）对x，$y\in X$有$\|x+y\|_X\leqslant\|x\|_X+\|y\|_X$。

这时说X是赋范的线性空间。

设X是赋范线性空间，其范数为$\|\cdot\|_X$，若x_n，$x\in X$且

$$\|x_n-x\|_X\to 0 \quad (n\to+\infty),$$

则说序列x_n在X中强收敛于x，记作$x_n\xrightarrow{(s)}x\ (n\to+\infty)$或$s-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

若X中任何Cauchy列必强收敛于X中某个元素，则说X是完备的。完备的赋范线性空间通称为Banach空间。可以证明：赋范性空间X是完备的充要条件是X中每个绝对可和序列是可和的，即当$\{x_n\}\subset X$且使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_X<+\infty$，则$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$强收敛于X中某一元素，因此可见Banach空间中任何一个闭线性流形也是Banach空间。

设X是线性空间，在X上定义二种范数$\|\cdot\|_{X,1}$和$\|\cdot\|_{X,2}$，若存在正常数C_1，$C_2>0$使得对$\forall x\in X$有

$$C_1\|x\|_{X,1}\leqslant\|x\|_{X,2}\leqslant C_2\|x\|_{X,1},$$

则说这两种范数是等价的，换言之，赋范空间$(X,\|\cdot\|_{X,1})\to(X,\|\cdot\|_{X,2})$的恒等映照是线性同胚的。

许多特殊的Banach空间在逼近论的研究中占据重要的地位。设D是紧致的Hausdorff空间，如下函数空间是常见的。

例1　连续函数空间C(D)。在通常函数加法及数与函数乘法的前提下，若令$f=f(x)\in C(D)$的范数为

$$\|f\|_{C(D)}=\sup_{x\in D}|f(x)|,$$

则可验证C(D)是Banach空间。

特别当D=〔a，b〕为有限闭区间时，用C〔a，b〕表示〔a，b〕上的连续函数空间，其范数为

$$\|f\|_{C[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$

用 $C_{2\pi}$ 表示以 2π 为周期的连续函数空间，其范数为

$$\|f\|_{C_{2\pi}}=\max_{x}|f(x)|.$$

例2 p次可积函数空间 $L_p(D)$（$p\geqslant 1$）在几乎处处意义下理解函数加法及数与函数乘法的前提下，若令 $f=f(x)\in L_p(D)$（$p\geqslant 1$）的范数为

$$\|f\|_p\triangleq\|f\|_{L_p(D)}=\begin{cases}\left(\int_D|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} & 1\leqslant p<+\infty;\\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D}|f(x)| & p=+\infty,\end{cases}$$

则 $L_p(D)$ 是Banach空间。

特别地，用 $L^p_{2\pi}$ 表示以 2π 为周期的p次可积函数空间，对 $f\in L^p_{2\pi}$（$p\geqslant 1$），

其范数为

$$\|f\|_p\triangleq\|f\|_{L^p_{2\pi}}=\begin{cases}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1\leqslant p<+\infty),\\ \operatorname*{ess\,sup}_{x}|f(x)| & p=+\infty.\end{cases}$$

在逼近论文献中经常引入如下函数空间：设D是紧致的Hausdorff空间，令

$$X_p(D)\triangleq\begin{cases}L_p(D) & 1\leqslant p<+\infty,\\ C(D) & p=\infty.\end{cases}$$

而对以 2π 为周期的函数空间，令

$$X_{2\pi}\triangleq X^p_{2\pi}=\begin{cases}L^p_{2\pi} & 1\leqslant p<+\infty,\\ C_{2\pi} & p=\infty.\end{cases}$$

最后设X是实数（或复数）域Z上的线性空间，在X定义一个非负实值函数 $|\cdot|_x$，若适合如下条件称它为X中元素的半范：

i） $|\alpha x|_x=|\alpha|\,|x|_x$ （$\alpha\in Z$），

ii）对 $x,y\in X$ 有 $|x+y|_x\leqslant|x|_x+|y|_x$。

例如，设 $C^r[a,b]$（$r\in N$）是〔a，b〕上r次连续可微函数，若对 $f=f(x)\in C^r[a,b]$，令

$$|f|_{C^r[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|f^{(r)}(x)|,$$

则$\|\cdot\|_{C_1[a,b]}$是半范.

1.2 有界线性算子

设X，Y是两个赋范性空间，D是X中的子集，若对每个$x\in D$，Y中有唯一确定的元 y 与之对应，记作 $y=Tx$，则说T是D到Y内的算子，称D为算子的定义域，而 $T(D)\subseteq Y$ 称为算子T的值域。若$D=X$且$T(D)\subset Y$时，则说T是X到Y内的算子，特别地，若 $T(D)=Y$ 时，则说T是X到Y上的算子。

设T是X到Y内的算子，若$Tx_1=Tx_2$必有$x_1=x_2$，则说算子T是一对一的。特别地，若对$\forall x\in X$有$Tx=x$，则说T是X上的恒等算子，通常用记号I表示。

现在设T是X到Y内的算子，$f_0\in X$，若对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$使得对适合$\|f-f_0\|_X<\delta$的一切$f\in X$有

$$\|Tf-Tf_0\|_Y<\varepsilon,$$

则说算子T在f_0点是连续的，若T在X中点点连续，则说T是X到Y内的连续算子。

设T是X到Y内的算子，若对$\forall f_1, f_2\in X$和$\forall\alpha_1, \alpha_2\in Z$有

$$T(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2)=\alpha_1 Tf_1+\alpha_2 Tf_2,$$

则说T是线性的。若存在正常数M使得对$\forall f\in X$有

$$\|Tf\|_Y\leqslant M\|f\|_X,$$

则说算子T是有界的，使上式成立的M之下确界称为算子T的范数，记作$\|T\|_{(X,Y)}$，于是对$\forall f\in X$有

$$\|Tf\|_Y\leqslant\|T\|_{(X,Y)}\|f\|_X.$$

特别当T是X到Y内的有界线性算子，则有

$$\|T\|_{(X,Y)}=\sup_{\substack{f\in X\\ f\neq\theta}}\frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X}=\sup_{\substack{f\in X\\ f\neq\theta}}\left\|T\left(\frac{f}{\|f\|_X}\right)\right\|_Y$$

$$=\sup_{\|f\|_X\leqslant 1}\|Tf\|_Y=\sup_{\|f\|_X=1}\|Tf\|_Y.$$

不难证明，若T是X到Y内的线性算子，则如下命题是等价的：

i) T在X上是有界的；

ii) T在X中一点是连续的；

iii) T在X上是一致连续的，即对$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得当$f_1, f_2\in X$且$\|f_1-f_2\|_X<\delta$时，有

$$\|Tf_1-Tf_2\|_Y<\varepsilon.$$

用$\mathscr{E}(X,Y)$表示X到Y内所有有界线性算子的全体，若赋予上述的算子范数，则也是一个线性赋范空间，特别当Y是 Banach 空间，则$\mathscr{E}(X,Y)$也是Banach空间，当$Y=X$时，记$\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(X,X)$并称它为X的自同态。

设$T\in\mathscr{E}(X,Y)$且对$\forall f\in X$有

$$\|Tf\|_Y=\|f\|_X,$$

则说算子T是等距的，若对$\forall f\in X$有

$$\|Tf\|_Y\leqslant\|f\|_X,$$

则说T是压缩的。

现在设$\{T_n\}_{n\in N}$是$\mathscr{E}(X,Y)$中有界线性算子序列，$T\in\mathscr{E}(X,Y)$，若对每个$f\in X$有

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_nf-Tf\|_Y=0,$$

则说算子序列$\{T_n\}$强收敛于T，特别当$Y=X$和T为恒等算子I时，则说算子序列$\{T_n\}$是逼近恒等序列。若

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_n-T\|_{(X,Y)}=0,$$

则说算子序列$\{T_n\}$依范收敛于T。明显地，依范收敛的算子序列必是强收敛的。

1.3 Banach－Steinhaus 定理

设A是赋范线性空间X中的子集。若对每个$f\in X$和$\forall\varepsilon>0$，都存在$g\in A$使得

$$\|f-g\|_X<\varepsilon,$$

则说A在X中稠密。特别地，若A中元素的一切有限性组合所形成的集合在X中稠密，则说A是X中的基本集。

现在设A是X中的线性子集，且在X中稠密，若T_0是A到Banach空间Y内的有界线性算子，其范数为$\|T_0\|_{(A,Y)}$，则存在一个$T\in\mathscr{E}(X,Y)$使得对$\forall f\in A$有$Tf=T_0f$，且$\|T\|_{(X,Y)}=\|T_0\|_{(A,Y)}$。

为建立Banach－Steinhaus定理，首先给出如下的共鸣定理。

定理1.1（共鸣定理） 设X是Banach空间，Y是赋范线性空间，$\{T_n\}_{n\in N}\subset\mathscr{E}(X,Y)$，若对每个$f\in X$，序列$\{\|T_nf\|_Y\}$是有界的，即对每个$f\in X$，存在正常数$M_f$使得对一切$n\in N$有$\|T_nf\|_Y\leqslant M_f$，则$T_n$是一致有界算子列，即存在正常数M，使得对$\forall f\in X$和$n\in N$有$\|T_nf\|_Y\leqslant M\|f\|_X$。

应用共鸣定理可建立有界线性算子序列的收敛原理。

定理1.2（Banach－Steinhaus） 设X是Banach空间，$\{T_n\}_{n\in N}\subset\mathscr{E}(X)$，则对每个$f\in X$有

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_n(f)-f\|_X=0,$$

当且仅当

i) T_n是一致有界线性算子列。

ii) 存在X的一个稠密子集A，使得对每个$g\in A$，有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(g)-g\|_X=0.$$

证明 $\Longrightarrow$）条件ii)成立是明显的，所以仅需证明条件i)成立，事实上，由于对每个$f\in X$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_n(f)-f\|_X=0,$$

所以对每个$f\in X$，数列$\{\|T_nf\|_X\}$是有界的，因此由共鸣定理得到序列$\{T_n\}_{n\in N}$是

一致有界的。

$\Leftarrow$ ）设 $f\in X$，由于A在X中稠密，所以对$\forall \varepsilon>0$，存在 $g\in A$使得 $\|f-g\|_x<\varepsilon$，又由ii) 对每个$g\in A$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|T_ng-g\|_x=0,$$

因此由条件 i)，存在 $M>0$ 使得对一切 $n\in N$ 有$\|T_n\|\leqslant M$，并利用范数三角形不等式得到

$$\|T_nf-f\|_x\leqslant\|T_nf-T_ng\|_x+\|T_ng-g\|_x+\|f-g\|_x$$
$$\leqslant(\|T_n\|+1)\|f-g\|_x+\|T_ng-g\|_x$$
$$\leqslant(M+1)\varepsilon+\|T_ng-g\|_x,$$

注意到 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以对每个 $f\in X$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nf-f\|_x=0.$$

证毕。

现在设 D 是紧致的 Hausdorff 空间，$X_P(D)$（$p\geqslant1$）是 D 上的函数空间，又设$A=\{f_k(x)\}_{k\in N}^{\infty}\subset X_P(D)$是$X_P(D)$内的基本列，即对每个$f\in X_P(D)$和$\forall\varepsilon>0$，存在线性组合

$$P(x)=\sum_{k=1}^{m}a_kf_k(x)$$

使得

$$\|f-p\|_{X_P(D)}<\varepsilon,$$

由熟知的 Weierstrass 定理可知，$A=\{x^k\}_{k=0}$ 是$X_P[a,b]$上的基本列，而$A=\{1,\cos kx,\sin kx\}_{k\in N}$ 是$X_{2\pi}^p$上的基本列，由定理1.2导出

推论1.1 设 $\{L_n\}_{n\in N}^{\infty}\subset\mathcal{E}(X_P(D))$且是一致有界的，若$X_P(D)$中存在一个基本列$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$使得对每个 f_k有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_nf_k-f_k\|_{X_P(D)}=0,\quad(k\in N).$$

则对每个 $f\in X_P(D)$ （$p\geqslant1$）有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_nf-f\|_{X_P(D)}=0.$$

人们习惯上将推论1.1中的基本列$\{f_k\}_{k\in N}$称为一致有界算子序列$\{L_n\}_{n\in N}\subset\mathcal{E}(X_P(D))$，在$X_P(D)$中为逼近恒等序列的试验集。自然要问，在怎样的条件下，这种试验集只含有有限个元素呢？这个问题1951年分别由 Korovkin 和 Bohman 解决，下文将专门讨论。

1.4 对偶空间

设X为赋范线性空间，Y是实（或复）数域，则称$\mathcal{L}(X, Y)$中的元素为X上有界线性泛函，用X^*表示X上所有有界线性泛函的全体，特别当X是Banach空间时，则X^*也是Banach空间，通称为X的对偶空间（或共轭空间）.

现在给出Hahn－Banach延拓定理及其重要推论.

Hahn－Banach延拓定理．设X是Banach空间，D是X中的线性流形，若$F\in D^*$，则存在有界线性泛函$f^*\in X^*$，使得对所有$f\in D$有$f^*(f)=F(f)$且$\|f^*\|_{X^*}=\|F\|_{D^*}$．

由Hahn－Banach定理可证得如下重要事实：

i) 对每个点$f_0\in X$且$f_0\neq\theta$，则存在$f^*\in X^*$使得$f^*(f_0)=\|f_0\|_X$且$\|f^*\|_{X^*}=1$．

ii) 设D是X中线性流形，$f_1\in X$且与D有正的距离，即$d=\inf\limits_{f\in D}\|f_1-f\|_x>0$，则存在$f^*\in X^*$使得对$\forall f\in D$有$f^*(f)=0$，而$f^*(f_1)=1$且$\|f^*\|_{X^*}=\frac{1}{d}$.

由此可见，X上的有界线性泛函，若在一个稠密于X的线性流形上为零，则必恒为零．此外，对于X内两个不同点f_1和f_2，则存在$f^*\in X^*$使得$f^*(f_1)\neq f^*(f_2)$，从而导出，设$f\in X$，若对$\forall f^*\in X^*$有$f^*(f)=0$，则有$f=\theta$.

设D^*是X^*的子集，若对$\forall f\in X$有

$$\|f\|_x=\sup_{f^*\in D^*}|f^*(f)|$$

则说D^*是X的确定集，例如，设对每个$f\in L_p[a,b]$（$1\leqslant p<+\infty$），不难证明

$$\sup_{\|g\|_q\leqslant 1}\int_a^b f(x)g(x)dx=\|f\|_p\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

由于在等距同构意义下有$L_p^*[a,b]=L_q[a,b]$，所以

$$D^*=\{g\mid g\in L_q[a,b]\text{ 且 }\|g\|_q\leqslant 1\}$$

是$L_p[a,b]$（$p\geqslant 1$）的确定集．同样地，不难证明，对每个$f\in C[a,b]$有

$$\sup_{\bigvee\limits_a^b(g)\leqslant 1}\int_a^b f(x)dg(x)=\|f\|_{C[a,b]},$$

其中$\bigvee\limits_a^b(g)$是有界变差函数$g\in BV[a,b]$在$[a,b]$上的全变差，又由于在等距同构意义下有$C^*[a,b]=BV[a,b]$，所以

$$D^*=\{g\mid g\in BV[a,b]\text{ 且 }\bigvee_a^b(g)\leqslant 1\}$$

是$C[a,b]$的确定集.

对$f^*\in X^*$，记$f^*(f)=\langle f^*, f\rangle$，则有

i) 对$\forall f^*\in X^*$，$f\in X$有

ii) 对 $\forall f_1^*, f_2^* \in X^*$, $f \in X$ 有

$$\langle \alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^*, f \rangle = \alpha_1 \langle f_1^*, f \rangle + \alpha_2 \langle f_2^*, f \rangle,$$

对 $\forall f^* \in X^*$ 和 $\forall f_1, f_2 \in X$ 有

$$\langle f^*, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \rangle = \alpha_1 \langle f^*, f_1 \rangle + \alpha_2 \langle f^*, f_2 \rangle,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in Z$. 由此可见 $f^*(f) = \langle f^*, f \rangle$ 是双线性泛函。

设 $\{f_n\}_{n\in N}$ 是X内的序列，$f \in X$，若对 $\forall f^* \in X^*$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \langle f^*, f_n \rangle = \langle f^*, f \rangle,$$

则说 f_n 弱收敛于 f，记作

$$w - \lim_{n\to\infty} f_n = f$$

或 $f_n \xrightarrow{(w)} f\ (n\to\infty)$，易见X中每个强收敛序列必是弱收敛序列，其次，若 $\{f_n\}_{n\in N}$ 在X内弱收敛，则有 $\sup\limits_n \|f_n\|_X < +\infty$。

类似地，设 $\{f_n^*\}_{n\in N}$ 是 X^* 内的序列，$f^* \in X^*$，若对 $\forall f \in X$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n^*, f \rangle = \langle f^*, f \rangle,$$

则说 f_n^* 弱* 收敛于 f^*，记作

$$w^* - \lim_{n\to\infty} f_n^* = f^*,$$

或 $f_n^* \xrightarrow{w^*} f^*\ (n\to+\infty)$。

最后我们引入自反空间的概念，通称 X^* 的对偶 X^{**} 为X的第二对偶空间，用 f^{**} 表示 X^{**} 中的元素，由于对 $f_0 \in X$，若存在 $f^{**} \in X^{**}$ 使得对 $\forall f^* \in X^*$ 有

$$\langle f_0^{**}, f^* \rangle = \langle f^*, f_0 \rangle,$$

则易见 f_0^{**} 与 f_0^{**} 之间是一一对应的。记 $X_0^{**} = \{f_0^{**} \mid f_0^{**} \in X^{**}, f_0 \in X$ 且对 $\forall f^* \in X$, 有 $\langle f_0^{**}, f^* \rangle = \langle f^*, f_0 \rangle\}$，则 X_0^{**} 是 X^{**} 中的线性流形，从而映照 $f_0 \to f_0^{**}$ 是从X到 X_0^{**} 上一对一且范数保持的，因此，在同构意义下有 $X \subset X^{**}$，特别地，若 $X = X^{**}$ 则说是自反的，例如 $L_p[a, b]\ (p>1)$ 是自反的。

1.5正线性算子

设D是实数集合，X(D)是定义在D上的函数空间。T是X(D)到自身内的线性算子，则对 $f = f(x) \in X(D)$ 有

$$T(f, x) \triangleq Tf(x) \quad \in X(D),$$

若对 $f \in X(D)$ 且 $f(x) \geqslant 0\ (x \in D)$，恒有 $T(f, x) \geqslant 0\ (x \in D)$ 则说T是X(D)上的正线性算子，明显地，设T是X(D)上正线性算子，则对 $f, g \in X(D)$ 且 $f(x) \leqslant g(x)\ (x \in D)$，有

$$T(f, x) \leqslant T(g, x) \qquad (x \in D).$$

又若 f，$|f|\in X(D)$，则对 $x\in D$ 有

$$|T(f, x)|\leqslant T(|f|, x).$$

特别地，若 $X(D)=C(D)$时，则有

$$\|T\|=\sup_{\|f\|_{C(D)}=1}\|T(f)\|_{C(D)}=\|T(1)\|_{C(D)}.$$

事实上，对$\forall f\in C(D)$有

$$|T(f, x)|\leqslant T(|f|, x)\leqslant\|f\|_{C(D)}T(1, x), \ (x\in D),$$

因而有

$$\|Tf\|_{C(D)}\leqslant\|f\|_{C(D)}\ \|T(1)\|_{C(D)},$$

由于 $1\in C(D)$ 所以得到

$$\|T\|=\|T(1)\|_{C(D)}.$$

§2　一些典型的正线性算子列

为下文例证方便，本节我们列举几类典型的，在文献中常见的正线性算子列。

2.1　指数型算子.

设$D=[a, b]$（$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$），核函数$\mathcal{E}_n(x, u)$是$D\times D$上非负函数适合如下条件

I）对每个 $x\in D$ 有

$$\int_a^b\mathcal{E}_n(x, u)du=1;$$

II）对x，$u\in D$有

$$\frac{\partial\mathcal{E}_n(x,u)}{\partial x}=\frac{n}{\phi(x)}(u-x)\mathcal{E}_n(x,u)$$

其中$\phi(x)$是次数$\leqslant 2$的多项式，且对$x\in(a,b)$有$\phi(x)>0$，此外，若 $a\neq-\infty$ 或 $b\neq+\infty$，则分别要求 $\phi(a)=0$ 或 $\phi(b)=0$。

对每个 $f\in C(D)$，$n\in N$ 令

$$E_n(f, x)=\int_a^b f(u)\mathcal{E}_n(x, u)du,$$

明显地，$E_n(1, x)=1$　（$x\in D$），且对每个 $f\in C(D)$有

$$\|E_n(f)\|_{C(D)}\leqslant\|f\|_{C(D)},$$

所以有$\|E_n\|=1$，因此指数型算子$E_n\in\mathcal{E}(C(D))$且是压缩的正线性算子.

指数型算子E_n概括了如下一些熟知的正线性算子

例1　Gauss－Weierstrass 算子 G_n：取 $D=(-\infty, +\infty)$，$\phi(x)=1$ 和核函数

$$\mathcal{E}_n(x, u)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{n(u-x)^2}{2}\right\}.$$

得到 Gauss－Weierstrass 算子 G_n：对$f\in C(-\infty, +\infty)$有

$$G_n(f, x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp\left\{-\frac{n(x-u)^2}{2}\right\}du; x\in(-\infty, +\infty).$$

例2 Szasz－Mirakjan 算子 S_n：取D＝〔0，＋∞），$\phi(x)=x$和核函数

$$\mathcal{E}_n(x, u)=\sum_{k=0}^{\infty} s_{nk}(x)\delta\left(u-\frac{k}{n}\right)$$

其中 $s_{nk}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$，$\delta(t)$为 Dirac 函数，得到 Sz′asz－Mirakjan 算子 S_n：对$f\in C$〔0，＋∞）有

$$S_n(f, x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)s_{nk}(x),\ x\in〔0, \infty).$$

例3 广义 Lupas－Baskakov 算子 $V_{n,\alpha}$：取 D＝〔0，∞），$\phi(x)=x(1+\alpha x)$（$\alpha>0$）和核函数

$$\mathcal{E}_n(x, u)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}^{(\alpha)}(x)\delta\left(u-\frac{k}{n}\right)$$

其中 $b_{nk}^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}+k\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\alpha^k x^k(1+\alpha x)^{-\frac{n}{\alpha}-k}$，得到广义Lupas－Baskakov算子$V_{n,\alpha}$：对$f\in C$〔0，∞）有

$$V_{n,\alpha}(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)b_{n,k}^{(\alpha)}(x),\ x\in〔0, \infty).$$

特别地，当$\alpha=1$时即为 Baskakov 算子V_n：对$f\in C$〔0，∞）有

$$V_n(f, x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)b_{nk}(x),\quad x\in〔0, \infty)$$

其中 $b_{nk}(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k}$。

2.2 插值型算子.

设 D＝〔a,b〕（$-\infty<a<b<+\infty$），$\{x_{nk}\}_{k=1}^{n}$是D上给定的点列，而$\{h_{nk}(x)\}_{k=1}^{n}$是C(D)内的函数组且$h_{nk}(x)\geqslant 0$（$k=1, 2, \cdots n$，$x\in D$），对每个$f\in C(D)$和$n\in N$，令

$$L_n(f, x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})h_{nk}(x)\quad (x\in D),$$

则L_n是从C(D)到自身内的正线性算子，我们称L_n为插值型算子，$\{x_{nk}\}_{k=1}^{n}$为插值节点组，而$\{h_{nk}(x)\}_{k=1}^{n}$为插值基函数组。

插值型算子包括两种不同的含意，一种是通常理解的"插值"算子．例如设 $\{x_{nk}\}_{k=1}^{n}$ 是 D=〔a，b〕上点列，取 $L_{nk}(x)=\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_{nj}}{x_{nj}-x_{nk}}$ （k=1，2，…n）为插值基函数，得到熟知的 Lagrange 插值算子 L_n：对每个 $f\in C(D)$ 有

$$L_n(f,\ x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{nk})l_{nk}(x)\ ;\quad (x\in D).$$

明显地，$L_n(f,\ x)$是次数≤(n－1)的代数多项式且适合如下插值条件：

$$L_n(f,\ x_{nk})=f(x_{nk})\quad (k=1,\ 2,\ \cdots n).$$

不过应当指出，算子 L_n 不一定是正线性算子．为此只须考查如下特例：取〔a,b〕=〔0,3〕，n=1，$x_{10}=1$，$x_{11}=2$ 和

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & 2\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$$

此时有 $f(x)\geqslant 0$ （x∈〔0，3〕），但

$$L_1(f,\ x)=\frac{x-2}{1-2}f(1)+\frac{x-1}{2-1}f(2)=2-x$$

当 x>2 时有 $L_1(f,\ x)<0$，可见 L_1 不是正性的。

另一种插值型算子并非通常理解的"插值"算子．例如，取 D=〔0，1〕，$x_{nk}=\frac{k}{n}$．（k=0，1，2，…n）和 $p_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ 为插值基函数，则 Bernstein 算子：

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)p_{nk}(x)$$

也是一种插值型的正线性算子．

下面我们给出几个插值型正线性算子的实例。

例1 Hermite－Fejér 插值算子．设D=〔－1，1〕取 n 次 Chebyshev 多项式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 的零点 $x_{nk}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ （k=1,2,…n）为插值节点组，$h_{nk}(x)=(1-x_{nk})\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_{nk})}\right)^2\geqslant 0$ （x∈〔－1，1〕）为插值基函数，得到 Hermite－Fejér算子 H_n：对 $f\in C$〔－1，1〕有

$$H_n(f,\ x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{nk})(1-x_{nk})\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_{nk})}\right)^2;\ x\in〔-1,\ 1〕,$$

易见，$H_n(f,\ x)$是次数≤(2n－1)的代数多项式，且适合如下插值条件：对 k=1，2，…n 有

$$H_n(f,\ x_{nk})=f(x_{nk}),$$

$$H_n'(f,\ x_{nk})=0.$$

由于 $h_{nk}(x)\geqslant 0$ $(x\in[-1,1])$ 且

$$H_n(1,x)=\sum_{k=1}^{n}h_{nk}(x)=1,\ x\in[-1,1],$$

所以 $\|H_n\|=1$.

类似地，可以选取 n 次 Jacobi 多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)(\alpha,\beta>-1)$，n 次 Legendre多项 $P_n(x)$ 和 n次第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$的零点为插值节点，按照 Hermite—Fejer 插值条件，导出相应的 Hermite—Fejér 插值型算子. 例如 1965 年引进了以 n 次 Jacobi 多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(0\leqslant\alpha,\ \beta<1)$的零点 x_{nk} $(k=1,2,\cdots n)$为节点的 Hermite—Fejér 插值得到如下插值算子 W_n：对每个 $f\in C[-1,1]$，有

$$W_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{nk})\frac{1-x^2}{1-x_{nk}^2}l_{nk}^2(x)$$

其中 $l_{nk}(x)=\dfrac{J_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-x_{nk})J_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x)}$. 特别地，当 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 导出以 n 次第二类 Chebyshev 多项式$U_n(x)$的零点$\xi_{nk}=\cos\dfrac{k\pi}{n+1}(k=1,2,\cdots n)$为节点的 Hermite—Fejér 插值型算子$\widetilde{W}_n$：对每个 $f\in C[-1,1]$ 有

$$\widetilde{W}_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\frac{(1-x^2)(1-\xi_{nk}^2)}{(n+1)^2}\left(\frac{U_n(x)}{x-\xi_{nk}}\right)^2.$$

当 $\alpha=\beta=0$时，导出以 n 次 Legendre 多项式$P_n(x)$的零点 $\eta_{nk}(k=1,2,\cdots n)$ 的 Hermite-Fejér 插值型算子 T_n：对每个 $f\in C[-1,1]$ 有

$$T_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}f(\eta_{nk})\frac{1-x^2}{1-\eta_{nk}^2}\left(\frac{P_n(x)}{(x-\eta_{nk})P_n'(\eta_{nk})}\right)^2.$$

其次，对于同一组插值节点，如果要求适合不同的插值条件，可以导出各种不同类型的拟 Hermite—Fejér插值算子，例如 P. Szasz 用 n 次 Jacobi 多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(\alpha,\beta>-\frac{1}{2})$的零点 x_{nk} 为节点，并要求插值算子 $\widetilde{H}_n(f,x)$在节点适合如下插值条件：对 $k=1,2,\cdots n$ 有

$$\widetilde{H}_n(f,x_{nk})=f(x_{nk}),$$

$$\widetilde{H}_n'(f,x_{nk})=0$$

及 $$\widetilde{H}_n(f,-1)=f(-1),\ \widetilde{H}_n(f,1)=f(1),$$

因而有 $\widetilde{H}_n(f,x)=\left(\dfrac{(1-x)f(-1)}{2J_n^{(\alpha,\beta)}(-1)^2}+\dfrac{(1+x)f(1)}{2J_n^{(\alpha,\beta)}(1)^2}\right)\left(J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)^2+$

$$+\sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})\frac{1-x^2}{1-x_{nk}^2}\left(1+(x-x_{nk})\left(\frac{2x_{nk}}{1-x_{nk}^2}-\frac{J_n^{(\alpha,\beta)''}(x_{nk})}{J_n^{(\alpha,\beta)'}(x_{nk})}\right)\right)\left(\frac{J_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-x_{nk})J_n^{(\alpha,\beta)'}(x_{nk})}\right)^2$$

易见，$\widetilde{H}_n$是正线性算子且对每个$f\in C[-1,1]$，$\widetilde{H}_n(f,x)$是次数$\leqslant 2n+1$的代数多项式。特别地，当$\alpha=\beta=0$时得到Egervarg－Turan引入的以n次Legendre多项式零点η_{nk}为节点的插值算子$\widetilde{T}_n$：对$f\in C[-1,1]$有

$$\widetilde{T}_n(f,x)=\left(\frac{1-x}{2}f(-1)+\frac{1+x}{2}f(1)\right)P_n^2(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f(\eta_{nk})\frac{1-x^2}{1-\eta_{nk}^2}\left(\frac{P_n(x)}{(x-\eta_{nk})P_n'(\eta_{nk})}\right)^2.$$

又如王仁宏引入拟Hermite－Fejér算子$\overline{W}_n(f,x)$，则要它适合如下插值条件：对$k=1,2,\cdots n$有

$$\overline{W}_n(f,x_{nk})=f(x_{nk})$$

$$\overline{W}_n'(f,x_{nk})=0$$

$$\overline{W}_n(f,-1)=\overline{W}_n(f,1)=0,$$

从而有

$$\overline{W}_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})\frac{1-x^2}{1-x^2_{nk}}\left(1+(x-x_{nk})\left(\frac{2x_{nk}}{1-x_{nk}^2}-\frac{J_n^{(\alpha,\beta)''}(x_{nk})}{J_n^{(\alpha,\beta)'}(x_{nk})}\right)\right)$$

$$\left(\frac{J_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-x_{nk})J_n^{(\alpha,\beta)'}(x_{nk})}\right)^2.$$

关于其它不同类型的Hermite－Fejér型插值算子，有兴趣可参阅P.Vertesi和H.H.Gonska的工作。

例2　Vertesi有理插值型算子：设D＝〔－1，1〕，取n次第一类Chebyshev多项式$T_n(x)$的零点$x_{nk}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$（$k=1,2,\cdots n$）为插值节点，而插值基函数为

$$h_{nk}(x)=\frac{|l_{nk}(x)|^\alpha}{\sum_{j=1}^{n}|l_{nj}(x)|^\alpha}$$

其中$\alpha>0$和$l_{nk}(x)=(-1)^{k+1}(1-x_{nk}^2)\frac{T_n(x)}{n(x-x_{nk})}$，得到第一类的Vertesi有理插值算子$Q_n^{(\alpha)}$：对每个$f\in C[-1,1]$，$n\in N$和$\alpha>0$，有

$$Q_n^{(\alpha)}(f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})\frac{|l_{nk}(x)|^\alpha}{\sum_{j=1}^{n}|l_{nj}(x)|^\alpha},\quad x\in[-1,1]$$

易见$Q_n^{(\alpha)}$（$\alpha>0$）是C〔－1,1〕到自身内的正线性算子且其范数$\|Q_n^{(\alpha)}\|=1(\alpha>0)$，

类似地，取n次第二类 Chebyshev 多项式$U_n(x)$的零点 $\xi_{nk}=\cos\frac{k\pi}{n+1}$ $(k=1, 2, \cdots n)$ 为插值节点，而插值基函数为

$$h_{nk}(x)=\frac{|\widetilde{l}_{nk}(x)|^{\alpha}}{\sum\limits_{j=1}^{n}|\widetilde{l}_{nj}(x)|^{\alpha}},$$

其中$\widetilde{l}_{nk}x=(-1)^{k+1}(1-\xi_{nk}^2)\frac{U_n(x)}{(n+1)(x-\xi_{n,k})}$，$\alpha>0$，得到第二类的 Vertesi 有理插值型算子$Q_n^{(\alpha)}$；对每个$f\in C[-1, 1]$，$n\in N$和$\alpha>0$有

$$\widetilde{Q}_n^{(\alpha)}(f, x)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\frac{|\widetilde{l}_{nk}(x)|^{2}}{\sum\limits_{j=1}^{n}|\widetilde{l}_{nj}(x)|^{2}}, \quad x\in[-1, 1]。$$

明显地，$\widetilde{Q}_n^{(\alpha)}$是$C[-1, 1]$到自身内的正线算子且其范数$\|\widetilde{Q}_n^{(\alpha)}\|=1$。

例3 Sikkema－Bernstein 算子。备$D=[0, 1]$，取$x_{nk}=\frac{k}{x_n}$为插值节点，其中$x_n=n+\alpha_n$，$\frac{\alpha_n}{n}\to 0^+$ $(n\to+\infty)$，而插值函数为$p_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ $(k=0, 1, 2, \cdots n)$，得到 sikkema－Bernstein 算子C_n：对每个$f\in C[0, 1]$有

$$C_n(f, x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{x_n}\right)p_{nk}(x), \quad x\in[0, 1],$$

明显地，C_n是$C[0, 1]$到自身内的正线性算子且其范数$\|C_n\|=1$。

应当指出，Sikkema－Bernstein 算子C_n与 Bernstein 算子B_n的不同点仅在于 Bernstenin 算子的插值节点$x_{nk}=\frac{k}{n}$,在$[0,1]$上是均匀分布的，而 Sikkema－Bernstein 算子 Cn 的插值节点$x_{nk}=\frac{k}{x_n}$，在$[0, 1]$上是“几乎”一致分布的，即$x_{n,k+1}-x_{nk}\asymp\frac{1}{n}$ $(n\to+\infty)$。

2.3 概率型算子

应用概率分布构造的正线性算子称为概率型算子，它们大致可划分为两类，一是利用格子点分布构造的正线性算子，这类算子称为 Bernstein 概率型算子，二是利用独立同分布随机变量列的随机和分布构造的正线性算子，这类算子称为 Feller－Trotter 概率型算子。

首先讨论 Bernstein 概率型算子的构造。设ξ_0是具有格子分布点$\{p_{ij}(x)\}$的随机变量，即概率

$$P(\xi_0=j)=p_{1j}(x)$$

且 $\sum_j p_{1j}(x)=1$ $(x\in J)$，其中 J 表示区间 [0, 1]，[0, ∞) 或 (−∞, +∞)，一般要求 $p_{1j}(x)\in C(J)$，再令 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是与 ξ_0 同分布的独立随机变量列，记 $\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，令

$$P(\eta_n=j)=p_{nj}(x)\qquad (x\in J).$$

易见它是格子点分布 $\{p_{1j}(x)\}$ 的n重卷积，于是有

$$\sum_j p_{nj}(x)=1\qquad (x\in J),$$

此外，我们假设 x_{nk} 是 $p_{nk}(x)$ 唯一的极大点，对每个 $f\in C(J)$ 和 $n\in N$，令

$$L_n(f,\ x)=\sum f(x_{nk})p_{nk}(x)\quad (x\in J),$$

则 L_n 是 $C(J)$ 到自身内的正线性算子，且范数 $\|L_n\|=1$，我们称 L_n 为 Bernstein 概率型算子。

容易验证，由二项分布，Poisson 分布以及负二项分布将分别导出 Bernstein 算子，Szösz－Mirakjan 算子以及 Baskakov 算子，更一般地，我们可应用生成函数定义格子点分布，进而给出一类较广泛的 Bernstein 概率型算子。设 $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(A_k\geqslant 0)$ 是已知数列，其生成函数 $S(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k$ 的收敛半径为R，又设 $\lambda(x)$ 是 $[0,\ R_1)$ 上连续单调增加函数且 $\lambda(0)=0$ 并且映照 $[0,\ R_1)$ 为 $[0,\ R)$，这里 R_1，R 都可以是 +∞ 的正实数。令

$$p_{1j}(x)=\frac{A_j(\lambda(x))^j}{S(\lambda(x))},\ x\in[0,\ R_1).$$

则 $p_{1j}(x)\in C([0,\ R_1))$ 且有

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_{1j}(x)=1,\quad x\in[0,\ R_1).$$

用 ξ_0 表示具有格子点分布 $\{p_{1j}(x)\}$ 的随机变量，即

$$P(\xi_0=j)=p_{1j}(x)=\frac{A_j(\lambda(x))^j}{S(\lambda(x))},$$

又设 $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是与 ξ_0 同分布的独立随机变量列，记 $\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，由概率论中卷积计算公式得到

$$p_{nj}(x)\triangleq P(\eta_n=j)=\frac{A_j^{(n)}(\lambda(x))^j}{S^n(\lambda(x))}$$

其中 $\qquad A_k^{(n)}=\sum_{j=0}^{k}A_j^{(n-1)}A_{k-j}^{(1)}$ 和 $A_k^{(1)}=A_k$。

易证，对每个$n\in N$，非负数列$\{A_j^{(n)}\}_{j=0}^{\infty}$的生成函数为

$$S^n(x)=\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(n)}x^j,\ x\in[0,\ R_1).$$

设$\lambda\in C^1[0,\ R_1)$，则有

$$p_{nj}'(x)=p_{nj}(x)\frac{j\lambda'(x)S[\lambda(x)]-n\lambda(x)\lambda'(x)S'(\lambda(x))}{\lambda(x)S(\lambda(x))},$$

因此$p_{nj}(x)$的极大点x_{nj}适合如下方程：

$$\frac{\lambda(x)S'(\lambda(x))}{S(\lambda(x))}=\frac{j}{n},$$

可见，当$\frac{\lambda(x)S'(\lambda(x))}{S(\lambda(x))}=x$时，则有$x_{nj}=\frac{j}{n}$，当$\frac{\lambda(x)S'(\lambda(x))}{S(\lambda(x))}=\frac{x}{1-x}$ $(0\leqslant x<1)$，则有$x_{nj}=\frac{j}{n+j}$。

因此选取合适的生成函数$S(x)=\sum_{j=0}^{\infty}A_jx^j$ $(0\leqslant x<R)$和变换因子$\lambda(x)(0\leqslant x<R_1)$，得到$C[0,\ R_1)$到自身内的Bernstein概率型算子：对$f\in C[0,\ R_1)$有

$$L_n(f,\ x)=S^{-n}(\lambda(x))\sum_{j=0}^{\infty}f(x_{nj})A_j^{(n)}\lambda(x)^j,\ x\in[0,\ R_1).$$

其中$A_j^{(n)}$由展开式：$S^n(x)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(n)}x^j$确定。

例1 取$S(x)=1+x$，$\lambda(x)=\frac{x}{1-x}$ $(x\in[0,\ 1))$，则$x_{nj}=\frac{j}{n}$，$A_j^{(n)}=\binom{n}{j}$，于是得到Bernstein算子B_n：对$f\in C[0,\ 1]$有

$$B_n(f,\ x)=\sum_{j=0}^{n}f\left(\frac{j}{n}\right)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j},\ x\in[0,\ 1].$$

例2 取$S(x)=e^x$，$\lambda(x)=x$ $(x\in[0,\infty))$，则有$x_{nj}=\frac{j}{n}$，$A_j^{(n)}=\frac{n^j}{j!}$，于是得到Szász－Mirakjan算子S_n：对$f\in C[0,\ \infty)$有

$$S_n(f,\ x)=e^{-nx}\sum_{j=0}^{\infty}f\left(\frac{j}{n}\right)\frac{(nx)^j}{j!},\ x\in[0,\ \infty).$$

例3 取$S(x)=(1-x)^{-\frac{1}{\alpha}}$ $(\alpha>0)$，$\lambda(x)=\frac{\alpha x}{1+\alpha x}$ $(x\geqslant 0)$，则有$x_{nj}=\frac{j}{n}$，

$A_j^{(n)}=\frac{\Gamma(\frac{n}{\alpha}+j)}{j!\,\Gamma(\frac{n}{\alpha})}$，于是得到广义Lupas－Baskakov算子$V_{n,\alpha}$：对$f\in C[0,\ \infty)$有

$$V_{n,\alpha}(f,x)=\sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{j}{n}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}+j\right)}{j!\,\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\alpha^{j}\frac{x^{j}}{(1+\alpha x)^{\frac{n}{\alpha}+j}},$$

特别当 $\alpha=1$ 时为 Baskakov 算子 V_n。

例4取 $S(x)=(1-x)^{-1}$，$\lambda(x)=x(x\in[0,1))$，则有 $x_{n,j}=\frac{j}{n+j}$，$A=\binom{n+j-1}{j}$

于是得到 Meyer－Konig and Zeller 算子 M_n：对每个 $f\in C[0,1]$ 有

$$M_n(f,x)=\sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{j}{n+j}\right)\binom{n+j-1}{j}x^{j}(1-x)^{n},\ x\in[0,1).$$

其次讨论 Feller－Trotter 概率型算子的构造．设 $\{\xi_i\}_{i\in N}$ 是概率空间 (Ω,A,P) 上与 ξ 同分布的独立随机变量序列，又设随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi=\theta(x)$ $(x\in J)$，分布函数 $F\xi(t)=P(\omega|\xi(\omega)\leqslant t)$ $(t\in(-\infty,+\infty))$，记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，由概率论中的卷积定理有

$$F_{S_n}(t)=(F_\xi * F_\xi * \cdots * F_\xi)(t)\ \overset{\Delta}{=}\ F_\xi^{n*}(t).$$

对每个 $f\in C(-\infty,+\infty)$，令

$$F_n(f,x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dF_{\frac{S_n}{n}}(t),\quad x\in J,$$

则 F_n 是 $C(-\infty,+\infty)$ 到 $C(J)$ 内的正线性算子．由分布函数定义导出

$$F_n(f,x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)dF_{S_n}(t),\ x\in J.$$

通称 F_n 为 Feller-Trotter 概率型算子。

因此只要选取适当的随机变量 ξ，可得到相应的概率型算子。

例5 设 ξ 是期望为 x，方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布，则 S_n 是期望为 nx，方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布，所以

$$F_{\frac{S_n}{n}}(t)=\int_{-\infty}^{nt}\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\exp\left\{-\frac{(t-nx)^2}{n}\right\}dt,$$

因而得到 Gauss－Weierstrass 算子：对 $f\in C(-\infty,\infty)$ 有

$$G_n(f,x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_{\frac{S_n}{n}}(t)$$

$$=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp\{-n(t-x)^2\}\,dt,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

例6 设 ξ 是具有 Gamma 分布的随机变量，其密度函数为

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(v)}r^{v-1}t^{v-1}e^{-rt} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0,\end{cases}$$

其中 $r>0$，$v>0$。

若 $v=1$，则 $E\xi=\frac{1}{r}=x$（记），则有

$$dF_{S_n}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{x}\right)^n t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt \quad (t\geqslant 0)$$

因而得到 Post-Gamma 算子：对 $f\in C(0,\infty)$ 有

$$H_n(f,x)=\int_0^\infty f(t)dF_{\frac{S_n}{n}}(t)=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{n}\right)dF_{S_n}(t)$$

$$=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{x}\right)^n t^{n-1}e^{-\frac{t}{x}}dt \quad (x\in(0,\infty)).$$

其次，若 $r=1$，则 $E\xi=v=x$（记），则有

$$dF_{S_n}(t)=\frac{1}{\Gamma(nx)}t^{nx-1}e^{-t}dt \quad (t\geqslant 0),$$

因而得到 Gamma 算子：对 $f\in C(0,\infty)$ 有

$$G_n(f,x)=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{n}\right)dF_{S_n}(t)$$

$$=\frac{n^{nx}}{\Gamma(nx)}\int_0^\infty f(t)t^{nx-1}e^{-nt}dt \quad (x>0).$$

2.4 Kantorovich 型算子

Kantorovich 型算子是 $L_p(p\geqslant 1)$ 空间一类重要的正线性算子，它是由 Kantorovich 首先研究的。

首先我们给出基本 Kantorovich 算子．设 $I=[0,1)$ 或 $[0,\infty)$，I_k是两两不交的有限半开区间列，且$I=\bigcup_k I_k$，对每个 $f\in L_p(I)$ $(p\geqslant 1)$和$n\in N$，令

$$K_n(f,x)=|I_k|^{-1}\int_{I_k}f(u)du;\ x\in I_k,$$

其中 $|I_k|$ 表示区间 I_k 的长度，并称 k_n 为基本 Kantorovich 算子。可见算子k_n将每个 $f\in L_p(I)$ 映为 I 上阶梯函数。对 $p\geqslant 1$ 由Hölder 不等式得到

$$\|K_n(f)\|_{L_p(I)}=\left(\int_I|K_n(f,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_k\int_{I_k}|K_n(f,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\sum_k \left(|I_k|^{-p}\int_{I_k}|f(u)|du\right)^p|I_k|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\sum_k \int_{I_k}|f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p,$$

所以基本 Kantorovich 算子 K_n 是 $L_p(I)$ $(p\geqslant 1)$ 到自身内的压缩正线性算子。

关于半开区间 I_k 有如下三种常见的取法，从而导出三种基本 Kantorovich 算子：

i) 设 $I=[0,1)$，取 $I_k=\left[\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1}\right)$ $(k=0,1,2,\cdots n)$，则对 $f\in L_p[0,1)$有

$$K_n^{(1)}(f,x)=(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(u)du,\quad x\in\left[\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1}\right).$$

ii) 设 $I=[0,1)$，取 $I_k=\left[\frac{k}{n+k},\frac{n+1}{n+k+1}\right)$ $(k=0,1,2,\cdots)$，则对 $f\in L_p[0,1)$有

$$K_n^{(2)}(f,x)=\frac{(n+k))(n+k+1)}{n}\int_{\frac{k}{n+k}}^{\frac{k+1}{n+k+1}}f(u)du,\quad x\in\left[\frac{k}{n+k},\frac{k+1}{n+k+1}\right).$$

iii) 设 $I=[0,\infty)$，取 $I_k=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)$ $(k=0,1,2,\cdots)$，则对 $f\in L_p[0,+\infty)$有

$$K_n^{(3)}(f,x)=n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(u)du,\quad x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right).$$

现在我们应用基本 Kantorovich 算子和某些正线性算子的复合，导出一系列常见的 Kantorovich 型算子。

例1 由Bernstein 算子 B_n 与 $K_n^{(1)}$ 复合得到如下 Bernstein－Kantorovich 算子 P_n：对每个 $f\in L_p[0,1)$ $(p\geqslant 1)$ 有

$$P_n(f,x)=(B_nK_n^{(1)})(f,x)$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(u)du\right)p_{nk}(x);\quad x\in[0,1)$$

其中 $p_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$。

例2 由 Szasz－Mirakjan 算子 S_n 与 $K_n^{(3)}$ 复合得到 Szasz－Kantorovich 算子 S_n^*：

对每个 $f\in L_p[0,\infty)$ $(p\geq 1)$，有

$$S_n^*(f,x)=(S_nK_n^{(2)})(f,x)$$

$$=n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(u)du\right)s_{nk}(x),\quad x\in[0,\infty),$$

其中 $s_{nk}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$。

例3 由广义 Lupas－Baskakov 算子 $V_{n,\alpha}$ 与 $K_n^{(2)}$ 复合得到 Lupas－Baskakov－Kantorovich 算子 $V_{n,\alpha}^*$ $(\alpha>0)$：对 $f\in L_p[0,\infty)$ $(p\geq 1)$ 有

$$V_{n,\alpha}^*(f,x)=(V_{n,\alpha}K_n^{(2)})(f,x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(u)du\right)b_{nk}^{(\alpha)}(x),\quad x\in[0,\infty)$$

其中 $b_{nk}^{(\alpha)}(x)=\dfrac{\Gamma(\frac{n}{\alpha}+k)}{k!\ \Gamma(\frac{n}{\alpha})}\alpha^kx^k(1+\alpha x)^{-\frac{n}{\alpha}-k}$

例4 由Meyer－König and Zeller 算子 M_n 与 $K_n^{(2)}$ 复合得到 Meyer－Konig and Zeller－Kantorovich 算子 M_n^*：对 $f\in L_p[0,1)$ $(p\geq 1)$ 有

$$M_n^*(f,x)=(M_nK_n^{(2)})(f,x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(n+k)(n+k+1)}{n}\int_{\frac{k}{n+k}}^{\frac{k}{n+k+1}}f(u)du\right)m_{nk}(x)$$

其中 $m_{nk}(x)=\binom{n+k-1}{k}x^k(1-x)^n$。

最后我们指出，令 $F(u)=\int_0^u f(t)dt$，由计算容易证实如下关系：

$$P_n(f,x)=\frac{d}{dx}B_{n+1}(F,x),\quad x\in[0,1],$$

$$S_n^*(f,x)=\frac{d}{dx}S_n(F,x),\quad x\in[0,\infty)$$

和

$$V^{*}_{n,\alpha}(f, x)=\frac{d}{dx}V_{n-1,\alpha}(F, x), \quad x\in[0, \infty).$$

因此，若 L_n 是正线性算子，且对 $f(x)\geqslant 0$ 恒有 $\frac{d}{dx}L_{n+1}(F, x)\geqslant 0$，也称

$$L^{*}_{n}(f, x)=\frac{d}{dx}L_{n+1}(F, x)$$

为 Kantorovich 型算子。

2.5 和型积分算子

最近关于和型积分算子的研究有较大的发展，它是 $L_p(p\geqslant 1)$ 空间另一类重要的正线性算子。这类算子是由 J. L. Durrmeyer 首先引入的。

首先设 $I=[0, 1]$ 或 $[0, +\infty)$，用 n^{+} 表示 n 或 $+\infty$，若序列 $\{\lambda_{nk}(x)\}_{k=0}^{n^{+}}$ 在 I 上适合如下条件，则说 $\{\lambda_{nk}\}_{k=0}^{n}$ 是 I 上指数型核并记作 $\{\lambda_{nk}\}_{k=0}^{n^{+}}\in E_{\alpha}$。

i) 对 $x\in I^{0}$，$\lambda_{nk}(x)>0$ $(0\leqslant k\leqslant n^{+})$ 且

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_{nk}(x)=1$$

其中 I^{0} 是 I 的内核。

ii) $\lambda_{nk}\in C^{\infty}(I)$ $(0\leqslant k\leqslant n^{+})$ 且满足关系式：

$$x(1+\alpha x)\lambda'_{nk}(x)=(k-nx)\lambda_{nk}(x)$$

其中 $\alpha=-1$ 或 $\alpha\geqslant 0$ 使得对 $x\in I^{0}$ 有 $x(1+\alpha x)>0$。

由计算得到

i) 当 $\alpha=-1$ 时，则 $I=[0, 1]$，$n^{+}=n$ 和

$$\lambda_{nk}(x)=P_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k}.$$

ii) 当 $\alpha\geqslant 0$ 时，则 $I=[0, \infty)$，$n^{+}=+\infty$ 和

$$\lambda_{nk}(x)= b^{(\alpha)}_{nk}(x)=\begin{cases} e^{-nx}\dfrac{(nx)^{k}}{k!} & \alpha=0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}+k\right)}{k!\ \Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\alpha^{k}\,x^{k}(1+\alpha x)^{-\frac{n}{\alpha}-k} & \alpha>0. \end{cases}$$

下文约定对 $s>0$

$$b^{(\alpha)}_{sk}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}+k\right)}{k!\,\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right)}\alpha^{k}\,x^{k}(1+\alpha x)^{-\frac{s}{\alpha}-k}\quad(\alpha>0).$$

又设 $\{\mu_{nk}\}_{k=0}^{n^{+}}\in E_{\beta}$，用 β 表示 1 或 0，对 $f\in L_1(I)$ 记

$$\phi_{nk}(f)=(n+2\beta l-l)\int_I f(t)\mu_{n+2l\beta,k-\beta}(t)dt$$

其中 $k\geqslant\beta$，当 $\beta=1$ 时，令 $\phi_{n0}(f)=f(0)$，又若 $I=[0,1]$ 和 $n^+=n$时，令 $\phi_{nn}(f)=f(1)$，由计算得到

$$\phi_{nk}(t_j)=\frac{(k+j-\beta)!}{(k-\beta)!}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{|l|}+2\beta-(j+1)\right)}{|l|^j\Gamma\left(\frac{n}{|l|}+2\beta-1\right)},\ (j=0,1,2).$$

现在对每个 $f\in L_1(I)$和$n\in N$，令

$$T_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n^+}\lambda_{nk}(x)\phi_{nk}(f),\ (x\in I),$$

称它为混合指数型积分算子。特别地，我们有

例1 取 $\lambda_{nk}(x)=\mu_{nk}(x)=p_{nk}(x)\quad(0\leqslant k\leqslant n)$，则 $\alpha=l=1$ 和 $I=[0,1]$。若 $\beta=0$ 得到 Durrmeyer-Bernstein 算子：

$$D_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)(n+1)\int_0^1 f(t)p_{nk}(t)dt,\ x\in[0,1].$$

若 $\beta=1$ 得到修正的 Durrmeyer-Bernstein 算子：

$$\widetilde{D}_n(f,x)=f(0)p_{n0}(x)+\sum_{k=1}^{n-1}p_{nk}(x)(n-1)\int_0^1 f(t)p_{n-2,k-1}(t)dt+f(1)p_{nn}(x),$$

$$x\in[0,1].$$

例2 取 $\lambda_{nk}(x)=\mu_{nk}(x)=s_{nk}(x)\quad(k\geqslant0)$，则 $\alpha=l=0$ 和 $I=[0,\infty)$，若 $\beta=0$ 得到 Szasz-Mirakjan积分型算子：

$$S_n(f,x)=n\sum_{k=0}^{\infty}s_{nk}(x)\int_0^{\infty}f(t)s_{nk}(t)dt;\quad x\in[0,\infty).$$

若 $\beta=1$ 得到修正的 Szasz-Mirakjan 算子：

$$\widetilde{S}_n(f,x)=f(0)s_{n0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}s_{nk}(x)n\int_0^{\infty}f(t)s_{n,k-1}(t)dt.$$

例3 取$\lambda_{nk}(x)=\mu_{nk}(x)=b_{nk}^{(\alpha)}(x)\quad(k\geqslant0,\ \alpha>0)$，则 $I=[0,\infty)$。若 $\beta=0$ 得到 Lupas-Baskakov 积分型算子：

$$V_n^{(\alpha)}(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{nk}^{(\alpha)}(x)(n-\alpha)\int_0^{\infty}f(t)b_{nk}^{(\alpha)}(t)dt;\ x\in[0,\infty).$$

若 $\beta=1$ 得到修正的 Lupas-Baskakov 算子：

$$\widetilde{V}_n^{(\alpha)}(f,x)=f(0)b_{n0}^{(\alpha)}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_{nk}^{(\alpha)}(x)(n+\alpha)\int_0^{\infty}f(t)b_{n+2\alpha,k-1}^{(\alpha)}(t)dt.$$

2.6 代数卷积算子

设 $I=[-1,1]$ 或 $[-r,r]$，$d\lambda_n(t)$ 是 I 上非负，偶的 Borel 测度，且

$$\int_I d\lambda_n(t)=1,$$

应用 Borel 测度 $d\lambda_n(t)$ 构造正线性算子有两种方法，其一是 Landau 型卷积算子，二是 Wood 型卷积算子，我们统称它们为代数卷积算子。

首先定义 Landau 型卷积算子 L_n：设 $I=[-1,1]$，对每个 $f\in L_1\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，令

$$L_n(f,x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)d\lambda_n(t-x);x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

若 $d\lambda_n(t)=C_nh_n(t)dt$，其中 $h_n(t)$ 是 $[-1,1]$ 上非负连续偶函数，且

$$C_n\int_{-1}^{1} h_n(t)dt=1,$$

则有

$$L_n(f,x)=C_n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)h_n(t-x)dt;\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

例1 Landau 算子 l_n：取 $h_n(t)=(1-t^2)^n$；$t\in[-1,1]$，则

$$C_n^{-1}=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

于是对每个 $f\in L_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 和 $n\in N$，有

$$l_n(f,x)=\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\left(1-(t-x)^2\right)^n dt;\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

明显地，Landau 算子 l_n 是 $C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 到自身内的正线性算子且对每个 $f\in C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，$l_n(f)$ 是次数 $\leqslant 2n$ 的代数多项式。

其次定义 Wood 型卷积算子 W_n：设 $I=[-r,r]$，对每个 $f\in L_1[0,r]$ 和 $n\in N$，令

$$W_n(f,x)=\int_0^r f(t)d\lambda_n(t-x);\quad x\in[0,r],$$

特别地，若 $d\lambda_n(t)=C_nh_n(t)dt$，其中 $h_n(t)$ 是 $[-r,r]$ 上非负的连续偶函数，且

$$C_n\int_{-r}^{r}h_n(t)dt=1,$$

则有

$$W_n(f,\ x)=C_n\int_{0}^{r}f(t)h_n(t-x)dt;\ x\in[0,\ r].$$

例2 Wood Landau 算子 W_n：取 $h_n(t)=(1-t^2)^n$，$t\in[-1,\ 1]$，则对每个 $f\in L_1[0,\ 1]$ 有

$$W_n(f,\ x)=\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{1}f(t)(1-(t-x)^2)^n dt,\ x\in[0,\ 1].$$

同样地，算子 W_n 是 $C[0,\ 1]$ 到自身内的正线性算子，且对每个 $f\in C[0,\ 1]$，$W_n(f)$ 是次数≤2n的代数多项式。

作为代数卷积算子的特例，我们讨论由峰形函数产生的奇异积分。设 $\rho(x)\in C[-r,\ r]$（$r>0$）为偶函数，且对 $0<|x|\leqslant r$ 有 $0\leqslant\rho(x)<1$ 和 $\rho(0)=1$，则说 $\rho(x)$ 是 $[-r,\ r]$ 上峰形函数。取 $h_n(x)=\rho^n(x)$（$x\in[-r,\ r]$），记

$$C_n^{-1}=\int_{-r}^{r}h_n(t)dt=\int_{-r}^{r}\rho^n(t)dt,$$

设 $o<b-a\leqslant r$，对 $f\in C[a,\ b]$ 令

$$\Phi_n(f,\ x)=C_n\int_{a}^{b}f(t)\rho^n(t-x)dt,\ x\in[a,\ b]$$

称它为峰形核奇异积分。

容易验证，$\rho(x)=e^{-x^2}$（$x\in[-r,\ r]$），$\rho(x)=1-\left(\frac{x}{r}\right)^2$（$x\in[-r,\ r]$）和 $\rho(x)=\cos^2\frac{x}{2}$（$x\in[-\pi,\ \pi]$）都是峰形函数，我们有

例3 记

$$C_n^{-1}=\int_{-r}^{r}e^{-nt^2}dt,$$

取 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 得到 Weierstrass 算子 $\widetilde{W}_n$：对每个 $f\in C[a,\ b]$（$o<b-a\leqslant r$）有

$$\widetilde{W}_n(f,\ x)=C_n\int_{a}^{b}f(t)e^{-n(t-x)^2}dt,\ x\in[a,\ b].$$

最后应当指出，无论是 Landau 型卷积算子，还是 Wood 型卷积算子，都不是常数保持的算子，因此对其逼近性质有一定影响，现在引入一类具有线性保持的修正代数卷积算子 A_n：设 $I=[-1,\ 1]$，$h_n(t)$ 是 I 上非负的连续偶函数，且

$$C_n^{-1}=\int_{-1}^{1}h_n(t)dt,$$

又设$\varphi(x)$是$[0,1]$上的权函数，使得对$\forall t\in[-1,1]$，$x\in[0,1]$有$x+t\varphi(x)\in[0,1]$对每个$f\in C[0,1]$和$n\in N$，令

$$A_n(f,x)=C_n\int_{-1}^{1}f(x+t\varphi(x))h_n(t)dt;\ x\in[0,1],$$

则有$A_n(1,x)=1$，$A_n(t,x)=x$，可见A_n是线性保持的正线性算子.

例4 取$h_n(t)=(1-t^2)^n$，$t\in[-1,1]$和$\varphi(x)=x(1-x)$；$x\in[0,1]$，此时有

$$C_n^{-1}=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}=\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!},$$ 我们导出修正的 Landau 算子$\widetilde{L}_n$：对每个$f\in C[0,1]$，$n\in N$有

$$\widetilde{L}_n(f,x)=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}\int_{-1}^{1}f(x+tx(1-x))(1-t^2)^n dt;\ x\in[0,1].$$

2.7 周期卷积算子

设Ω是确定的实数集合，对每个$\rho\in\Omega$，$d\mu_\rho(t)$是$(-\pi,\pi)$上有限的Borel 测度，即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\mu_\rho(t)=1,\ 且\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|<+\infty.$$

特别地，当$d\mu_\rho$是绝对连续测度，即$d\mu_\rho(t)=x_\rho(t)dt$，则有$x_\rho\in L^1_{2\pi}$，且

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x_\rho(t)dt=1.$$

对每个$f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），令

$$I_\rho(f,x)=(f*d\mu_\rho)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)d\mu_\rho(t),$$

称它为周期卷积算子。

首先我们证明，对每个$f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant\infty$）有$I_\rho(f)\in X^p_{2\pi}$，且

$$\|I_\rho\|_{[X_{2\pi},X_{2\pi}]}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|.$$

事实上，当$p=+\infty$时，有$f\in C_{2\pi}$，所以对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要$|\Delta x|<\delta$时，有
$$|f(x+\Delta x-t)-f(x-t)|<\varepsilon,$$
因此有

$$|I_\rho(f,x+\Delta x)-I_\rho(f,x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+\Delta x-t)-f(x-t)|\,|d\mu_\rho(t)|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|,$$

从而得到 $I_\rho(f)\in C_{2\pi}$，于是对 $\forall f\in C_{2\pi}$，有

$$\|I_\rho(f)\|_{C_{2\pi}}\leqslant\|f\|_{C_{2\pi}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|,$$

而当 $1\leqslant p<+\infty$ 时，有 $f\in L^p_{2\pi}$，利用Minkowski积分不等式得到

$$\|I_\rho(f)\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|I_\rho(f,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|\,|d\mu_\rho(t)|\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\|f\|_p\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|.$$

从而得到 $I_\rho(f)\in L^p_{2\pi}$。由上述不等式得出，对 $1\leqslant p<+\infty$ 有

$$\|I_\rho\|_{(X_{2\pi},X_{2\pi})}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|.$$

特别地，当 $d\mu_\rho\geqslant0$，则有 $\|I_\rho\|_{(X_{2\pi},X_{2\pi})}\leqslant1$。又因 $I_\rho(1,x)=1$，所以得到 $\|I_\rho\|_{(X_{2\pi},X_{2\pi})}=1$。

其次，对一般的 Borel 测度 $d\mu_\rho$，我们有

$$\|I_\rho\|_{(C_{2\pi},C_{2\pi})}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|.$$

事实上，因为对每个 $f\in C_{2\pi}$，有 $I_\rho(f)\in C_{2\pi}$，于是存在 $x_f\in[-\pi,\pi]$ 使得

$$\|I_\rho(f)\|_{C_{2\pi}}=\max_{|x|\leqslant\pi}|I_\rho(f,x)|=|I_\rho(f,x_f)|.$$

另一方面，由算子范数的定义有

$$\|I_\rho\|_{(C_{2\pi},C_{2\pi})}=\sup_{\|f\|_{C_{2\pi}}=1}\|I_\rho(f)\|_{C_{2\pi}}$$

$$=\sup_{\|f\|_{C_{2\pi}}=1}|I_\rho(f,x_f)|=\sup_{\|f\|_{C_{2\pi}}=1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x_f-t)d\mu_\rho(t)\right|$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|.$$

应当指出，若 $d\mu_\rho(t)=x_\rho(t)dt$ 是绝对连续测度，则对 $\forall f\in L^p_{2\pi}$（$1\leqslant P<+\infty$）有

$$\|I_\rho(f)\|_p\leqslant 2\|f\|_p\|x_\rho\|_1,$$

所以有

$$\|I_\rho\|_{(L^p_{2\pi},\ L^p_{2\pi})}\leqslant 2\|x_\rho\|_1.$$

由对偶关系可以证明，对 $p=1$ 上式等号成立，即 $\|I_\rho\|_{(L^1_{2\pi},\ L^p_{2\pi})}=2\|x_\rho\|_1$。在第三章我们将证明对 $1<p<\infty$ 上式的等号一般是不成立的。

最后我们列举一些常见的周期卷积算子：

例1 Fourier 算子 S_n：对 $n\in N$，取

$$d\mu_n(t)=D_n(t)dt$$

其中

$$D_n(t)=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\in L^1_{2\pi},$$

则有 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=1$，但 $D_n(t)$ 并不恒号，不难证明

$$\|D_n\|_1=\frac{2}{\pi^2}\ln n+O(1).$$

事实上，

$$\|D_n\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right|dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}\left(\mathrm{ctg}\frac{t}{2}\sin nt+\cos nt\right)\right|dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{2}{t}\sin nt+\left(\mathrm{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right)\sin nt+\cos nt\right|dt.$$

由于 $\mathrm{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}$ 在 $(0,\pi)$ 中有界，所以

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\left(\mathrm{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right)\sin nt+\cos nt\right|dt=O(1)$$

因此得到

$$\|D_n\|_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin nt|}{t}dt+O(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{k+1}{n}\pi}\frac{|\sin nt|}{t}dt+O(1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{n}}\sin nt\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+\frac{k\pi}{n}}dt+O(1).$$

由于 $t\in\left(0,\ \frac{\pi}{n}\right)$，所以有

$$\frac{n}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+\frac{k\pi}{n}}\leqslant\frac{n}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k},$$

利用 Euler 渐近公式，$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\ln n+O(1)$，对 $t\in\left(0,\ \frac{\pi}{n}t\right)$ 得到

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+\frac{k\pi}{n}}=\frac{n}{\pi}\ln n+O(1).$$

因而有

$$\|D_n\|_1=\frac{2}{\pi^2}\ln n+O(1).$$

现在对 $f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），令

$$S_n(f,\ x)=(f*D_n)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt,$$

则其范数

$$\|S_n\|_{(X_{2\pi}^p,\ X_{2\pi}^p)}\leqslant 2\|D_n\|_1,$$

且当 $p=1$，$+\infty$ 时等号成立，即

$$\|S_n\|_{(C_{2\pi},C_{2\pi})}=\|S_n\|_{(L_{2\pi}^1,\ L_{2\pi}^1)}=2\|D_n\|_1$$

$$\sim\frac{4}{\pi^2}\ln n\quad(n\to+\infty).$$

例2 Fejer 算 σ_n：对 $n\in N$ 取

$$d\mu_n(t)=F_n(t)dt$$

其中

$$F_n(t)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\geqslant 0,$$

则 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)dt=1$ 且 $F_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kt$，称 $F_n(t)$为Fejer 核。

对每个 $f\in X_{2\pi}^{p}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\sigma_n(f,\ x)=(f*F_n)(x)=\frac{1}{2(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt,$$

易见，对每个 $f\in X_{2\pi}^{p}$ 有

$$\sigma_n(f)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f)。$$

例3　Jackson算子 J_n：对 $n\in N$，取

$$d\mu_n(t)=K_n(t)dt$$

其中

$$K_n(t)=a_n\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4\geqq0,$$

这里常数 a_n 使得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=1。$$

易证 $a_n\sim\frac{3}{2n(2n^2+1)}$（$n\to+\infty$），称 $K_n(t)$为 Jackson 核。

对每个 $f\in X_{2\pi}^{p}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），有

$$J_n(f,\ x)=(f*K_n)(x)=\frac{a_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4dt.$$

例4　Jackson—松冈（Y. Matsuoka）算子 $J_{n;p,q}$：对 n，p，$q\in N$，取

$$d\mu_n(t)=K_{n;p,q}(t)dt$$

其中

$$K_{n;p,q}(t)=C_{n;p,q}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{2}},$$

这里的 $C_{n;p,q}$ 使得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{n;p,q}(t)dt=1。$$

特别地，当 $p=q=1$ 时，有 $K_{n;1,1}(t)=F_n(t)$ 为 Fejér 核，而 $p=q=2$ 时，

有 $K_{n,2,2}(t)=K_n(t)$ 为 Jackson 核。

对每个 $f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$J_{n,p,q}(f,\ x)=(f*K_{n,p,q})(x)$$
$$=\frac{C_{n,p,q}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{2}}dt.$$

例5 Vallee—Poussion 算子 V_n：对 $n\in N$，取

$$d\mu_n(t)=v_n(t)dt$$

其中

$$v_n(t)=\frac{(n!)^2}{2(2n)!}\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}$$
$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\cos kx>0,$$

则有 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v_n(t)dt=1$，称它为 Vallee-poussion 核。

对每个 $f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$V_n(f,\ x)=(f*v_n)(x)=\frac{(n!)^2}{(2n)!2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\left(2\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}dt,$$

容易验证，对 $f\in X_{2\pi}^p$，有

$$V_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_{n+k}(f)=2\sigma_{2n}(f)-\sigma_{n-1}(f).$$

§3 周期卷积算子列的收敛定理

3.1 逼近恒等核

设 Ω 是实数集合，ρ_0 是 Ω 的极限点（有限或无穷），对每个 $\rho\in\Omega$，$d\mu_\rho(t)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 上的 Borel 测度，若对 $\rho\in\Omega$ 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\mu_\rho(t)=1 \text{ 且 } \|\mu_\rho\|_{BV_{2\pi}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|<+\infty,$$

则说 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是 Borel 测度核。

若 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是 Borel 测度核，且适合如下条件，则说 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是逼近恒等核：

I) 存在与 ρ 无关的正常数 M 使得对 $\forall\rho\in\Omega$，有

$$\|\mu_\rho\|_{BV_{2\pi}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|d\mu_\rho(t)|\leqslant M<+\infty;$$

ii) 对每个确定的 $\delta\in(0,\pi)$，有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|d\mu_\rho(t)|=0.$$

特别地，若 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是正核，即 $d\mu_\rho(t)\geqslant0\ (\rho\in\Omega)$ 则条件 i) 自然成立，有时也称只适合条件 i) 的 Borel 测度核 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 为一致有界核。其次，若对 $\rho\in\Omega$ 有 $d\mu_\rho(t)=\chi_\rho(t)dt$，且对每个 $\delta\in(0,\pi)$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\sup_{\delta\leqslant t\leqslant\pi}|\chi_\rho(t)|=0,$$

则条件 ii) 一定成立。

例1 设对 $n\in N$，$d\alpha_n(t)=\frac{\pi}{2}\left(d\delta_{-\frac{1}{n}}(t)+d\delta_{\frac{1}{n}}(t)\right)$，其中 $d\delta_x$ 表示在 x 点的 Dirac 测度，则 $\{d\alpha_n\}_{n\in N}$ 是逼近恒等核。事实上 $\{d\alpha_n\}_{n\in N}$ 是正核，且对 $\delta\in(0,\pi)$ 可选取正整数 n_0 使得当 $n>n_0$ 时，$\frac{1}{n}<\delta$，于是当 $n>n_0$ 时，有

$$\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}d\alpha_n(t)=0.$$

例2 Fejer 核 $\{F_n(t)\}_{n\in N}$ 是逼近恒等核。事实上，对每个 $\delta\in(0,\pi)$，当 $n\to+\infty$ 时，有

$$\sup_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}F_n(t)<\frac{1}{2(n+1)}\ \frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\longrightarrow0.$$

例3 Dirichlet 核 $\{D_n(t)\}_{n\in N}$ 不是一致有界核，因而不是逼近恒等核，因为当 $n\to+\infty$ 时有

$$\|D_n\|_1\sim\frac{2}{\pi^2}\ln n.$$

3.2 强收敛定理

设 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是相应于 Borel 测度核 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 的卷子算子族，I 表示 $X^p_{2\pi}$ 上的恒等算子，现在建立算子族 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 在 $X^p_{2\pi}$ 上的强收敛定理。

定理1.3 若 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是逼近恒等核，则对每个 $f\in X^p_{2\pi}\ (1\leqslant p\leqslant+\infty)$，有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}=0,$$

即当 $\rho\to\rho_0$ 时，$I_\rho\overset{(s)}{\rightarrow}I$。

证明 首先注意到，对每个 $f\in X^p_{2\pi}\ (1\leqslant p\leqslant+\infty)$，有

$$I_\rho(f,x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))d\mu_\rho(t),$$

于是应用 Minkowski 不等式得到

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(\cdot-t)-f(\cdot)\|_{X^p_{2\pi}}|d\mu_\rho(t)|,$$

其次，由 $f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）的一致连续性（当 $p=+\infty$）和积分连续性（$1\leqslant p<+\infty$），对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\rho>0$，使得当 $|t|<\delta$ 时，有

$$\|f(\cdot-t)-f(\cdot)\|_{X^p_{2\pi}}<\varepsilon,$$

因此得到

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}\leqslant 2M\varepsilon+\frac{2\|f\|_{X^p_{2\pi}}}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}|d\mu_\rho(t)|\quad,$$

其中M是逼近恒等核定义中条件 i)给出的正常数。

最后，对确定的 $\delta>0$（不妨设 $\delta\in(0,\pi)$），由条件 ii）并注意 $\varepsilon>0$ 是任意的，所所有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}=0,$$

证毕。

由于 Fejer 核 $\{F_n(t)\}_{n\in N}$ 是逼近恒等核，所以由定理 1.3 得到

推论1.2 对每个 $f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\lim_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}=0$$

定理 1.3 的断言，揭示了逼近恒等核命名的实质，不过人们要问对 $f\in L^\infty_{2\pi}$，定理 1.3 的结论是否成立？回答是否定的，因为对于 $f\in L^\infty_{2\pi}$ 没有积分连续性可以利用。但是，我们可以证明，在 $L^\infty_{2\pi}$ 上 $I_\rho(f)$ 仍然是弱收敛于 f 的。

定理1.4 若 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是逼近恒等核，则对每个 $f\in L^\infty_{2\pi}$ 有

$$I_\rho(f)\overset{w^*}{\to}f\ (\rho\to\rho_0)$$

即对 $\forall g\in L^\infty_{2\pi}$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}I_\rho(f,x)g(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx.$$

3.3 一致有界卷积算子列强收敛的充要条件

设 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是对应于 Borel 测度核 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的一致有界卷积算子族，特别地，若 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是一致有界核，则 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$必是一致有界的，但反之不对，例如，Fourier 算子列 $\{S_n\}_{n\in N}$ 是$L^p_{2\pi}$（$1<p<+\infty$）到自身的一致有界列，可是相应的 Dirichlet 核 $\{D_n\}_{n\in N}$并非一致有界核。

现在讨论一致有界卷积算子族强收敛的充要条件。为此首先注意如下事实，设$f\in X^p_{2\pi}$，（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），且

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}f^\wedge(k)e^{ikx},$$

其中$f^\wedge(k)$是 f 的复 Fourier 系数。又设 $d\mu_\rho(x)$（$\rho\in\Omega$）是 Borel 测度且，

$$d\mu_\rho(x)\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}\mu^\vee_\rho(k)e^{ikx},$$

其中 $\mu^\vee_\rho(k)$是 $d\mu_\rho$ 的 Fourier－Stieltjes系数：

$$\mu^\vee_\rho(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{\pi}e^{-ikt}\,d\mu_\rho(t),$$

则对$k\in Z$有

$$I_\rho(f)^\wedge(k)=(f*d\mu_\rho)^\wedge(k)=2f^\wedge(k)\mu^\vee_\rho(k)\tag{3.1}$$

作为 Banach－Steinhaus 定理的应用，有

定理1.5 设 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是一致有界卷积算子族，则对每个$f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}=0\tag{3.2}$$

的充要条件是对每个 $k\in Z$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\mu^\vee_\rho(k)=\frac{1}{2}\tag{3.3}$$

证明 ⟹由（3.1）导出对每个 $k\in Z$有

$$(I_\rho(f)-f)^\wedge(k)=I_\rho(f)^\wedge(k)-f^\wedge(k)=\hat{f}(k)\,(2\mu_\rho^\vee(k)-1),$$

又 $$|I_\rho(f)-f)^\wedge(k)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(I_\rho(f,\ x)-f(x)\right)e^{-ikx}\,dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|I_\rho(f,\ x)-f(x)|\,dx\leqslant\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}},$$

所以由条件（3.2）导出，对每个 $f\in X^p_{2\pi}$ 和 $k\in Z$有

$$f^\wedge(k)\lim_{\rho\to\rho_0}(2\mu_\rho^\vee(k)-1)=0.$$

特别地，对每个确定的 $k\in Z$，取 $f(x)=e^{ikx}$，则$f^\wedge(k)=1$，因此得到（3.3）。

⟸）记

$$A=\left\{T(x)\,|\,T(x)=\sum_{k=-n}^{n}C_ke^{ikx}\right\}.$$

由 Weierstrass 定理知道，集合A在$X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上稠密。由条件（3.3）导出，对每个$T\in A$，有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(T)-T\|_{X^p_{2\pi}}=0\quad T\|_{X^p_{2\pi}}=0 \tag{3.4}$$

事实上，设$T(x)=\sum_{k=-n}^{n}C_ke^{ikx}$，由（3.1）得到

$$I_\rho(T,\ x)=(T*d\mu_\rho)(x)=2\sum_{k=-n}^{n}C_k\mu_\rho^\vee(k)^{ikx},$$

因此

$$I_\rho(T,\ x)-T(x)|<\sum_{k=-n}^{n}|2\mu_\rho^\vee(k)-1|\,|C_k|,$$

于是有

$$\|I_\rho(T)-T\|_{X^p_{2\pi}}<\sum_{k=-n}^{n}|2\mu_\rho^\vee(k)-1|\,|C_k|,$$

所以由条件（3.3）导出（3.4）成立。

最后只需利用 Banach－Steinhaus 定理得到对每个 $f\in X^p_{2\pi}$（$p\geqslant1$）（3.2）式成立．证毕。

由于 $\|I_\rho\|_{(C_{2\pi},C_{2\pi})}=\|\mu_\rho\|_{BV_{2\pi}}$ 所以由定理1.2和定理1.5得到如下推论

推论1.3　设$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是对应于 Borel 测度核$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的卷积算子族，则对每个

$f\in C_{2\pi}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(f)-f\|_{C_{2\pi}}=0$$

的充要条件是

i) $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是一致有界的 Borel 测度核，

ii) 对每个$k\in Z$，(3.3)式成立。

现设 Borel 测度核$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是绝对连续的，即对每个$\rho\in\Omega$，有

$$d\mu_\rho(t)=\chi_\rho(t)dt$$

其中$\chi_\rho\in L^1_{2\pi}$，此时有$\|I_\rho\|_{(L^1_{2\pi},\ L^1_{2\pi})}=2\|\chi_\rho\|_1$，类似地有

推论1.4 设$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是对应于核$\{\chi_\rho(t)\}_{\rho\in\Omega}$的卷积算子族，则对每个$f\in L^1_{2\pi}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(f)-f\|_1=0$$

的充要条件是

i) $\{\chi_\rho(t)\}_{\rho\in\Omega}$是一致有界核；

ii) 对每个$k\in Z$，(3.3)式成立。

应当指出，在$L^p_{2\pi}$ $(1<p<+\infty)$上卷积算子族I_ρ强收敛于 ，其对应的Borel测度核的一致有界性仅仅是充分的，而非必要的，例如，对 Fourier 算子S_n在第三章我们将证明：对每个$f\in L^p_{2\pi}$ $(1<p<+\infty)$有

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(f)-f\|_p=0,$$

但其核$\{D_n\}_{n\in N}$并非一致有界的。

3.4 Turesky 收敛等价定理

设$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是对应于非负的Borel测度核$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的正卷积算子族。关于正卷积算子族的强收敛，Turesky 建立如下等价定理：

定理1.6 (Turesky) 设$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是$X^p_{2\pi}$ $(1\leq p\leq+\infty)$上的正卷积算子族，则以下命题是等价的：

i) 对每个$f\in X^p_{2\pi}$ $(1\leq p\leq+\infty)$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}=0.$$

ii) 令$G=\{\sin x,\ \cos x\}$，则对$\forall g\in G$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(g)-g\|_{X^p_{2\pi}}=0.$$

iii) 当$\rho\to\rho_0$时

$$I_\rho\left(\sin^2\frac{t}{2},\ 0\right)\to 0.$$

iv) 对每个 $\delta\in(0,\ \pi)$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} d\mu_\rho(t)=0\ .$$

证明 i)$\Longrightarrow$ii)是明显的。

ii) $\Longrightarrow$iii)，由于对每个 $\rho\in\Omega$，有

$$I_\rho\left(\sin^2\frac{t}{2},\ 0\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\,d\mu_\rho(t).$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x-u}{2}d\mu_\rho(x-u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(x-u)}{2}d\mu_\rho(x-u)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos x(\cos x-I_\rho(\cos u,\ x))+\sin x(\sin x-I_\rho(\sin u,\ x))\right]$$

利用 Minkowski 不等式得到

$$I_\rho\left(\sin^2\frac{t}{2},\ \ 0\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\|\cos\cdot-I_\rho(\cos u,\ \cdot)\|_{X^p_{2\pi}}+\|\sin\cdot-I_\rho(\sin u,\ \cdot)\|_{X^p_{2\pi}}\right)$$

因此由命题ii)导出

$$\lim_{\rho\to\rho_0}I_\rho\left(\sin^2\frac{t}{2},\ 0\right)=0.$$

iii) $\Longrightarrow$iv)。由于对每个 $\delta\in(0,\ \pi)$有

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}d\mu_\rho(t)\leqslant\frac{1}{\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}I_\rho\left(\sin^2\frac{t}{2},\ 0\right),$$

因此由命题 iii)导出，对每个 $\delta\in(0,\ \pi)$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}d\mu_\rho(t)=0.$$

iv) $\Longrightarrow$i)。由于正卷积算子族是一致有界算子族，所以命题 i)成立仍是定理1.3 的结论。定理证毕。

由 Turesky 等价定理，直接得到如下重要推论。

推论1.5 设 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是对应于非负 Borel 测度核 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的正卷积算子族，则对每个 $f\in X^p_{2\pi}$ ($1\leqslant p\leqslant+\infty$) 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}=0$$

的充要条件是 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$为逼近恒等核。

此结论说明定理 1.3 中的充分条件是不能减弱的。

推论1.6 设 $\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正卷积算子族，则对每个 $f\in X_{2\pi}^p$ （$1\leqslant p\leqslant+\infty$），有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|L_\rho(f)-f\|_{X_{2\pi}^p}=0$$

的充要条件是对每个 $g\in G=\{\sin x, \cos x\}$，有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|L_\rho(g)-g\|_{X_{2\pi}^p}=0.$$

这个事实经常说成：集合 $G=\{\sin x, \cos x\}$ 是正卷积算子族 $\{L_\rho\}$ 在 $X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）强收敛的试验集，这是有趣的。

对于正卷积算子族，由推论1.6可将定理1.5改进为如下形式。

定理1.7 设 $\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是对应于非负 Borel 测度核 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 的正卷积算子族，则对每个 $f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|L_\rho(f)-f\|_{X_{2\pi}^p}=0$$

的充要条件是

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\mu_\rho(1)=\frac{1}{2}.$$

证明 必要性仍是定理1.5的特例，这里仅需证明充分性。由于对$\rho\in\Omega$有

$$\left|2\mu_\rho(1)-1\right|=\left|e^{ix}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-it}d\mu_\rho(t)-1\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x-t)}d\mu_\rho(t)-e^{ix}\right|$$

从而有
$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x-t)d\mu_\rho(t)-\cos x\right|\leqslant\left|2\mu_\rho(1)-1\right|,$$
和
$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x-t)d\mu_\rho(t)-\sin x\right|\leqslant\left|2\mu_\rho(1)-1\right|.$$

于是对每个 $g\in G=\{\sin x, \cos x\}$ 有

$$\|L_\rho(g)-g\|_{X_{2\pi}^p}\leqslant\left|2\mu_\rho(1)-1\right|$$

所以对每个 $g\in G$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|L_\rho(g)-g\|_{X_{2\pi}^p}=0.$$

由 Turesky 等价定理导出，对每个 $f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|L_\rho(f)-f\|_{X_{2\pi}^p}=0,$$

证毕。

最后我们指出，条件 $\lim\limits_{\rho\to\rho_0}\mu_\rho(1)=\frac{1}{2}$ 等价于

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-it}d\mu_\rho=1,$$

因而等价于对任意确定的 x_0，有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x_0-t)}d\mu_\rho(t)=e^{ix_0}$$

或等价于对每个 $g\in G$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}I_\rho(g,\ x_0)=g(x_0)$$

其中 x_0 是任意确定的，由此得到如下有趣的推论

推论1.7 设 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是正卷积算子族，则对每个 $f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}=0$$

的充要条件是存在某点 x_0 使得对每个 $g\in G=\{\sin x,\ \cos x\}$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}I_\rho(g,\ x_0)=g(x_0).$$

§4 Bohman—Korovkin 理论

4.1 C(D)上的试验集

设D是至少两点的紧致 Hausdorff 空间，由 Banach-Steinhaus 定理，要断定 C(D)上一致有界线性算子列的强收敛性，只要检验C(D)中一个基本列，§3 已经揭示，对于正卷积算子族只需检验由两个函数 sinx 和 cosx 组成的试验集 G。人们自然要问，对一般的正线性算子列是否也存在由有限个元素组成的试验集 T 呢？1951 年 Bohman 和 Korovkin 各自独立地解决这个问题，创立了 Bohman-Korovkin 理论。

首先给出 C(D)上试验集的概念。设 $T=\{f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots f_m(x)\}\subset C(D)$，若对每个 $y\in D$，存在 $a_i(y)\in C(D)$（$i=1,\ 2,\ \cdots m$）使得对 $\forall x\in D$ 有

$$P_y(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i(y)f_i(x)\geqslant 0 \tag{4.1}$$

且 $P_y(x)=0$ 当且仅当 $x=y$，则说 $T=\{f_i\}_{i=1}^{m}$ 是C(D)上一个试验集。

例1 设 $D=[a,\ b]$ 是有限闭区间，$T=\{f_i\}_{i=1}^{3}=\{1,\ x,\ x^2\}$，则 T 是C $[a,\ b]$ 上试验集。事实上，对每个 $y\in[a,\ b]$，取

$P_y(x)=(y-x)^2=y^2f_1(x)-2yf_2(x)+f_3(x)\geqslant 0$，且 $P_y(x)=0$ 当且仅当 $x=y$。

例2 设 $D_0=[-\pi, \pi]$，而 $T=\{f_i\}_{i=1}^{3}=\{1, \cos x, \sin x\}$，则 T 是 $C_{2\pi}$ 上的试验集。事实上，对每个 $y\in D_0$，取

$$P_y(x)=1-\cos(y-x)=1-\cos y\cos x-\sin y\sin x$$
$$=f_1(x)-\cos y f_2(x)-\sin y f_3(x)\geqslant 0$$

且对 $x\in D_0$ 有 $P_y(x)=0$ 当且仅当 $x=y$。

其次讨论 C(D)上试验集 T 一些重要性质：

引理1.1 设 $T=\{f_i\}_{i=1}^{m}$ 是C(D)上的试验集，则存在实数 $a_i(i=1, 2, \cdots m)$ 使得对 $\forall x\in D$ 有

$$\overline{P}(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x)>0。\tag{4.2}$$

证明 由于D中至少含有两点，设 $y_1, y_2\in D$，又设 $T=\{f_i\}_{i=1}^{m}$ 是C(D)上的试验集，所以存在 $a_i(y)\in C(D)(i=1, 2, \cdots m)$，使得对 $\forall x\in D$ 有

$$Py_k(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i(y_k)f_i(x)\geqslant 0,$$

且 $Py_k(x)=0$ 当且仅当 $x=y_k\ (k=1, 2)$。于是记

$$\overline{P}(x)=Py_1(x)+Py_2(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x),$$

则对 $\forall x\in D$ 有

$$\overline{P}(x)>0$$

证毕。

引理1.2 设 $T=\{f_i\}_{i=1}^{m}$ 是C(D)上的试验集，又设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是C(D)到自身的正线性算子列，若对每个 $f_i\in T\ (i=1, 2, \cdots m)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(f_i)-f_i\|_{C(D)}=0,\tag{4.3}$$

则 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是一致有界的。

证明 由引理1.1存在实数 $a_i\ (i=1, 2, \cdots m)$ 使得对 $\forall x\in D$ 有

$$\overline{P}(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x)>0。$$

因为 D 是紧致的 Hausdorff 空间，所以

$$\min_{x\in D}\overline{P}(x)=\frac{1}{s}>0$$

或对 $\forall x\in D$ 有

$a\tilde{P}(x)\geq 1$

由正线性算子的单调性．对 $n\in N$ 和 $\forall x\in D$ 有

$$L_n(1, x)\leq a L_n(\bar{P}, x)$$

所以 $\|L_n(1)\|_{C(D)}\leq a\left(\|L_n(\bar{P})-\bar{P}\|_{C(D)}+\|\bar{P}\|_{C(D)}\right)$

由（4.3）导出

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(\bar{P})-\bar{P}\|_{C(D)}=0,$$

因此存在与 n 无关的正常数M使得对 $\forall n\in N$ 有

$$\|L_n(1)\|_{C(D)}\leq M<+\infty,$$

注意到 $\|L_n\|_{(C(D),C(D))}=\|L_n(1)\|_{C(D)}$，则得 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 C(D) 到 C(D) 内的一致有界列．证毕．

引理1.3　设 $T=\{f_i\}_{i=1}^{m}$ 是C(D)上的试验集，又设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是C(D) 到自身内的正线性算子列，且对每个 $f_i\in T$（$i=1, 2, \cdots n$）成立（4．3）．若 $\Phi_y(x)\in C(D\times D)$ 且对每个 $y\in D$ 有 $\Phi_y(y)=0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(\Phi_y, y)\|_{C(D)}=0. \tag{4.4}$$

证明　考查 D×D 上的对角线集合 $B=\{(y, y)\mid y\in D\}$，由于 $\Phi_y(x)\in C(D\times D)$ 且对每个 $y\in D$ 有 $\Phi_y(y)=0$，所以对 $\forall\varepsilon>0$ 和每个 $(y, y)\in B$，存在邻域 $U(y, y)\subset D\times D$ 使得对 $\forall(x, y)\in U(y, y)$有

$$|\Phi_y(x)|<\varepsilon,$$

记 $G=\bigcup_{(y,y)\in B}U_{(y,y)}$，则G是开集，而 $F=(D\times D)/G$是紧致的，令

$$m_\varepsilon=\min_{(x,y)\in F}P_y(x)>0,$$

$$M=\max_{(x,y)\in F}|\Phi_y(x)|.$$

于是对 $\forall(x, y)\in D\times D$ 有

$$\Phi_y(x)<\varepsilon+\frac{M}{m_\varepsilon}p_y(x)$$

其中 $P_y(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i(y)f_i(x)$，因此，对每个 $y\in D$ 有

$$|L_n(\Phi_y(x), y)|\leq L_n(|\Phi_y(x)|, y)$$

$$\leq\varepsilon L_n(1, y)+\frac{M}{m_\varepsilon}L_n(P_y(x), y)$$

从而有

$$\|L_n(\Phi_y, y)\|_{C(D)}=\max_{y\in D}|L_n(\Phi_y(x), y)|$$

$$\leqslant \varepsilon \| L_n(1)\|_{C(D)} + \frac{M}{m_\varepsilon} \max_{y\in D} L_n(P_y(x), y)$$

$$= \varepsilon \| L_n(1)\|_{C(D)} + \frac{M}{m_\varepsilon} \| L_n(P_y, y)\|_{C(D)}。$$

由于对每个 $y\in D$，$P_y(y)=0$，所以

$$L_n(P_y(x), y) = L_n(P_y(x), y) - p_y(y)。$$

由（4．3）式导出

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n(P_y, y)\|_{C(D)} = 0,$$

又因 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以得到

$$\lim_{n\to+\infty} \| L_n(\Phi_y, y)\|_{C(D)} = 0。$$

证毕。

4.2 Bohman Korovkin 定理

利用试验集的性质可以建立如下 Bohman-Korovkin 定理，反过来它揭示了试验集的真正含义。

定理1.8（Bohman-Korovkin） 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(D)$ 到自身内的正线性算子列，$T=\{f_i\}_{i=1}^{m}$ 是 $C(D)$ 上的试验集。若对每个 $f_i\in T$（$i=1, 2, \cdots m$），有

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n(f_i) - f_i\|_{C(D)} = 0, \tag{4.3}$$

则对每个 $f\in C(D)$，有

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n(f) - f\|_{C(D)} = 0。$$

证明 设 $f\in C(D)$，对 $\forall x, y\in D$，令

$$\Phi_y(x) = f(x) - \frac{f(y)}{\overline{P}(y)} \overline{P}(x),$$

其中 $\overline{P}(x)$ 是（4．2）确定的函数，则 $\Phi_y(x)\in C(D\times D)$，且适合引理 1.5 的条件，因而有

$$\lim_{n\to+\infty} \| L_n(\Phi_y, y)\|_{C(D)} = 0。$$

由条件（4．3）导出

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n(\overline{P}) - \overline{P}\|_{C(D)} = 0。 \tag{4.5}$$

又因为

$$L_n(f, y) - f(y) = L_n(\Phi_y(x), y) - f(y) + \frac{f(y)}{\overline{P}(y)} L_n(\overline{P}(x), y)$$

$$= L_n(\Phi_y(x), y) - \frac{f(y)}{\overline{P}(y)} (\overline{P}(y) - L_n(\overline{P}(x), y))$$

从而有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D)}\leqslant\|L_n(\Phi_y(x),y)\|_{C(D)}+a\|f\|_{C(D)}\|L_n(\overline{P})-\overline{P}\|_{C(D)}$$

其中 $\frac{1}{a}=\min\limits_{y\in D}\overline{P}(y)$。于是由引理1.3和(4.5)得到，对每个 $f\in C(D)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(f)-f\|_{C(D)}=0.$$

证毕。

作为特例有如下推论

推论1.8 (Korovkin) 设 $D=[a,b]$ 是有限闭区间，$\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C[a,b]$ 到自身内的正线性算子列。记 $e_k=x^k$ ($k=0,1,2$)，若对 $k=0,1,2$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(e_k)-e_k\|_{C[a,b]}=0.$$

则对每个 $f\in C[a,b]$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f)-f\|_{C[a,b]}=0.$$

推论1.9 (Korovkin) 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C_{2\pi}$ 到自身内的正线性算子列，记 $\{\tau_0,\tau_1,\tau_2\}=\{1,\cos x,\sin x\}$，若对 $k=0,1,2$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(\tau_k)-\tau_k\|_{C_{2\pi}}=0,$$

则对每个 $f\in C_{2\pi}$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=0.$$

Bohman-Korovkin 的上述研究工作得到种种推广，例如，Volkov 将 Korovkin 定理推广到 m 维欧氏空间 R^m 上。

最后，设 D_1 是 D 内的致密集，$\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(D)$ 到 $C(D_1)$ 的正线性算子列，与定理1.8的证明类似，成立如下收敛定理，通常称它为局部收敛定理。

定理1.9 (Bohman) 设 $D_1\subset D$ 是致密集，$\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(D)$ 到 $C(D_1)$ 内正线性算子列，又设 $T=\{f_k\}_{k=1}^{m}$ 是 $C(D)$ 中的试验集，若对每个 $f_k\in T$ ($k=1,2,\cdots m$) 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(f_k)-f_k\|_{C(D_1)}=0,$$

则对每个 $f\in C(D)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(f)-f\|_{C(D_1)}=0.$$

4.3 Bohman-Korovkin 定理应用实例

作为 Bohman-Korovkin 定理应用实例，我们讨论一些常见的正线性算子列的收敛性。

例1 Bernstein 算子列 $\{B_n\}_{n\in N}$：对 $f\in C[0,1]$ 和 $n\in N$，有

$B_n(f, x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ ，$x\in[0,1]$，则对 $x\in[0,1]$ 有

$B_n(1,x)=1$，$B_n(t,x)=x$，$B_n(t^2,x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$。事实上，利用 $\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$ 得到

$$B_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}=x.$$

类似地有

$$B_n(t^2,x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}.$$

由此可见，对 $x\in[0,1]$，有

$$B_n((t-x)^2,x)=\frac{x(1-x)}{n}.$$

且注意到 $\max_{x\in[0,1]}x(1-x)=\frac{1}{4}$ 所以，对 $k=0,1,2$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|B_n(e_k)-e_k\|_{C[0,1]}=0.$$

因此由定理1.8（Bohman-Korovkin 定理）得到

系1 对每个 $f\in C[0,1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|B_n(f)-f\|_{C[0,1]}=0.$$

此外，应当指出二阶中心矩 $B_n((t-x)^2,x)$ 在 Bernstein 算子逼近的研究中是重要的。更一般地还有如下的递推公式。设 r 是非负整数，记

$$T_{nr}(x)=\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^r p_{nk}(x);\quad p_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

我们有

引理1.4 设 r 是非负整数，$x\in[0,1]$，则有

$$T_{n,r+1}(x)=x(1-x)\left(T_{nr}'(x)+nrT_{n,r-1}(x)\right).\tag{4.6}$$

证明 由于对 $x\in[0,1]$ 有

$$x(1-x)p_{nk}'(x)=(k-nx)p_{nk}(x)$$

所以

$$x(1-x)T'_{nr}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[(k-nx)^{r}x(1-x)p'_{nk}(x)-nr(k-nx)^{r-1}x(1-x)p_{nk}(x)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left((k-nx)^{r+1}p_{nk}(x)-nrx(1-x)(k-nx)^{r-1}p_{nk}(x)\right)$$

$$=T_{n,r+1}(x)-nrx(1-x)T_{n,r-1}(x)$$

整理得到（4.6），证毕。

由于 $T_{n0}(x)=1$，$T_{n1}(x)=0$，所以由（4.6）导出

$$T_{n2}(x)=nx(1-x)$$

$$T_{n3}(x)=n(1-2x)x(1-x)$$

$$T_{n4}(x)=x(1-x)(3n^2x(1-x)-2nx(1-x)+n(1-2x)^2)。$$

递推公式(4.6)下文将经常引用。

例2 Durrmeyer－Bernstein 积分型算子列 $\{D_n\}_{n\in N}$，对 $f\in C[0,1]$，$n\in N$ 有

$$D_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)\int_0^1 f(t)p_{nk}(t)dt,\ x\in[0,1]。$$

由 Bata 积分得到

$$\int_0^1 t^j p_{nk}(t)dt=\binom{n}{k}\int_0^1 t^{k+j}(1-t)^{n-k}dt$$

$$=\binom{n}{k}B(k+j+1,\ n-k+1)=\frac{(k+j)!}{k!}\cdot\frac{n!}{(n+j+1)!}$$

其中 $j=0,1,2,\cdots$；$k=0,1,2,\cdots n$。利用例1中的有关公式得到

$$D_n(1,x)=1,$$

$$D_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{n+2}p_{nk}(x)=x+\frac{1-2x}{n+2},$$

$$D_n(t^2,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{(n+2)(n+3)}p_{nk}(x)$$

$$=x^2+2\frac{1+2nx-3(n+1)x^2}{(n+2)(n+3)}。$$

对一般 $D_n(t^m,x)$ 有

$$D_n(t^m,x)=\frac{(n+1)!}{(n+m+1)!}\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\frac{m!}{s!}\cdot\frac{n!}{(n-s)!}x^s$$

其中 m 是正整数。

事实上，由于

$$x^m(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+m}y^{n-k},$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(x^m(x+y)^n\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(k+m)!}{k!}x^k y^{n-k}.$$

另一方面由 Leibniz 求导法则得到

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(x^m(x+y)^n\right)=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{m!}{r!}x^r\frac{n!}{(n-r)!}(x+y)^{n-r}$$

所以有

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{m!}{r!}x^r\frac{n!}{(n-r)!}(x+y)^{n-r}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(k+m)!}{k!}x^k y^{n-k},$$

特别取 $y=1-x$ 得到

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{(k+m)!}{k!}=\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{m!}{r!}\cdot\frac{n!}{(n-r)!}x^r,$$

因此有

$$D_n(t^m,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)\int_0^1 t^m p_{nk}(t)dt$$

$$=\frac{(n+1)!}{(n+m+1)!}\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}\frac{m!}{s!}\cdot\frac{n}{(n-s)!}x^s.$$

由上述可见，对$x\in[0,1]$有

$$D_n\left((t-x)^2,x\right)=2\frac{(n-3)x(1-x)+1}{(n+2)(n+3)}.$$

且对 $k=0,1,2$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|D_n(e_k)-e_k\|_{C[0,1]}=0$。因此由定理1.8得到

系2 对每个 $f\in C[0,1]$，有

$$\lim_{n\to\infty}\|D_n(f)-f\|_{C[0,1]}=0.$$

与例1类似地，对非负整数 r，记

$$T_{nr}(x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)\int_0^1(x-t)^r p_{nk}(t)dt,$$

特别地，

$$T_{n0}(x)=1,\quad T_{n1}(x)=\frac{2x-1}{n+2}.$$

我们有如下递推关系。

引理1.5 设 r 是正整数，$x\in[0,1]$，则

$$(n+r+2)T_{n,r+1}(x)=x(1-x)\left(2rT_{n,r-1}(x)-T'_{nr}(x)\right)-(1-2x)(r+1)T_{nr}(x)\quad(4.7)$$

证明，由于对 $x\in[0,1]$ 有

$$x(1-x)p'_{nk}(x)=(k-nx)p_{nk}(x)$$

所以

$$x(1-x)T'_{nr}(x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}x(1-x)p'_{nk}(x)\int_0^1 p_{nk}(t)(x-t)^r dt+rT_{n,r-1}(x)$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1 t(1-t)p'_{nk}(t)(x-t)^r dt - nT_{n,r+1}(x).$$

注意到对 $x\in[0,1]$，$t\in[0,1]$ 有

$$t(1-t)=-(x-t)^2-(1-2x)(x-t)+x(1-x)$$

利用分部积分法导出

$$nT_{n,r+1}(x)-x(1-x)(rT_{n,r-1}(x)-T_n(x))$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1(-(x-t)^2-(1-2x)(x-t)+x(1-x))\,p'_{nk}(x)(x-t)^r dt$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1 p_{nk}(t)\,(-(r+2)(x-t)^{r+1}-(1-2x)(r+1)(x-t)^r+$$

$$x(1-x)r(x-t)^r dt$$

$$=-(r+2)T_{n,r+1}(x)-(r+1)(1-2x)T_{nr}(x)+rx(1-x)T_{n,r-1}(x).$$

整理导出递推公式(4.7)，证毕.

例3 修正的 Durrmeyer-Bernstein 算子列 $\{\widetilde{D}_n\}_{n\in N}$，对 $f\in C[0,1]$，$n\in N$，有

$$\widetilde{D}_n(f,x)=f(0)p_{n0}(x)+\sum_{k=1}^{n-1} p_{nk}(x)\,(n-1)\int_0^1 f(t)p_{n-2,k-1}(t)dt+f(1)p_{nn}(x).$$

由于

$$(n-1)\int_0^1 t^j p_{n-2,k-1}(t)dt=\frac{(n-1)!}{(n+j-1)!}\cdot\frac{(k+j-1)!}{(k-1)!},$$

其中 $j=0,1,2,\cdots$；$k=1,2,\cdots n-1$，因此由例1中有关公式导出

$$\widetilde{D}_n(1,x)=1,$$

$$\widetilde{D}_n(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}p_{nk}(x)=x,$$

$$\widetilde{D}_n(t^2,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{n(n+1)}p_{nk}(x)$$

$$=\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x)+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}p_{nk}(x)$$

$$=x^2+\frac{2x(1-x)}{n+1}.$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{D}_n(e_k)-e_k\|_{C[0,1]}=0\ (k=0,1,2)$$

因此由定理1.8得到

系3 对每个$f\in C[0,1]$有

$$\lim_{n\to+\infty}\|\widetilde{D}_n(f)-f\|_{C[0,1]}=0.$$

类似地，由计算得到

$$\widetilde{D}_n((t-x)^2,\ x)=\frac{2x(1-x)}{n+1}.$$

例4 Bernstein-Kantorovich 算子列$\{P_n\}_{n\in N}$：对于$f\in C[0,1]$，$n\in N$，有

$$P_n(f,x)=(B_nE_n)(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(t)dt\right)p_{nk}(x).$$

令$F(x)=\int_0^x f(u)du$，则有

$$P_n(f,\ x)=\frac{d}{dx}B_{n+1}(F,\ x),$$

因此，对$x\in[0,1]$有

$$P_n(1,\ x)=\frac{d}{dx}B_{n+1}(t,\ x)=1,$$

$$P_n(t,\ x)=\frac{d}{dx}B_{n+1}\left(\frac{t^2}{2},\ x\right)=x+\frac{1-2x}{2(n+1)},$$

$$P_n(t^2,\ x)=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}B_{n+1}(t^3,\ x)$$

$$=x^2+\frac{x(2-3x)}{n+1}+\frac{1-6x+6x^2}{3(n+1)^2}.$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n(e_k)-e_k\|_{C[0,1]}=0,\ (k=0,1,\ 2)$$

因此由定理1.8导出

系4 对每个$f\in C[0,1]$有

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n(f)-f\|_{C[0,1]}=0.$$

例5 Meyer-König and Zeller 算子列$\{M_n\}_{n\in N}$：对$f\in C[0,1]$，$n\in N$，有

$$M_n(f,x)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n+k}\right)m_{nk}(x) & 0\leqslant x<1\\ f(1) & x=1,\end{cases}$$

其中$m_{nk}(x)=\binom{n+k}{k}x^k(1-x)^{n+1}$.

由二项展开式

$$(1-x)^{-(n+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^k$$

和 $\frac{k}{n+k}\binom{n+k}{k}=\binom{n+k-1}{k-1}$ 立即得到，对 $x\in[0,1)$ 有

$$M_n(1,x)=1,\ M_n(t,x)=x.$$

关于二阶矩 $M_n(t^2,x)$ 的精确值，直到 1984 才由 J. Alkemade 得到：对 $x\in[0,1)$ 有

$$M_n(t^2,x)=x^2+\frac{x(1-x)^2}{n+1}{}_2F_1(1,2,n+2;x)$$

其中超几何级数

$${}_2F_1(1,2,n+2;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)_k}{(n+2)_k}x^k,$$

其中记号 $(a)_k=\prod_{j=0}^{k-1}(a+j)$。

事实上，由于对 $x\in[0,1)$ 有

$$M_n(t-t^2,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+k}\left(1-\frac{k}{n+k}\right)\cdot m_{nk}(x)$$

所以

$$x(1-x)\frac{d}{dx}M_n(t-t^2,x)=-(n+1)xM_n(t-t^2,x)+n(1-x)M_n(t^2,x).$$

注意到 $M_n(t,x)=x$，由上式导出，对 $x\in[0,1)$ 有

$$x(1-x)\frac{d}{dx}M_n(t^2,x)+(n+x)M_n(t^2,x)=nx^2+x \tag{4.8}$$

令 $M_n(t^2,x)=x^2+x(1-x)^2Z(x)$ 代入 (4.8) 得到方程式：

$$x(1-x)Z'(x)+(n+1-2x)Z(x)=1 \tag{4.9}$$

用 $Z(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ 代入(4.9)得到方程一个特解：

$$Z_p(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2)_k}{(n+2)_k}x^k=\frac{1}{n+1}{}_2F_1(1,2,(n+2),x)$$

而方程(4.9)的齐次部分通解为

$$Z_h(x)=Cx^{-n-1}(1-x)^{n+1}$$

其中 C是任意实常数，因此方程(4.9)的通解为

$$Z(x)=\frac{1}{n+1}{}_2F_1(1,2,(n+2),x)+Cx^{-n}(1-x)^{n+1},$$

于是对 $x\in[0,1)$ 有

$$M_n(t^2, x) = x^2 + \frac{x(1-x)^2}{n+1}\, {}_2F_1(1, 2, n+2; x) + Cx^{-n}(1-x)^{n+1}.$$

由于 $M_n(t^2, 0)=0$，所以必有 $C=0$，从而对 $x \in [0, 1)$ 有

$$M_n(t^2, x) = x^2 + \frac{x(1-x)^2}{n+1}\, {}_2F_1(1, 2, n+2; x) \tag{4.10}$$

容易验证，当 $n \geq 2$ 时，（4.10）式在 $x=1$ 也成立。

由上述可见，对 $x \in [0, 1]$ 有

$$M_n((t-x)^2, x) = \frac{x(1-x)^2}{n+1}\, {}_2F_1(1, 2, n+2; x) \tag{4.11}$$

且对 $k=0, 1, 2$ 有

$$\lim_{n \to +\infty} \| M_n(e_k) - e_k \|_{C[0,1]} = 0,$$

从而由定理 1.8 导出

系5 对每个 $f \in C[0, 1]$，有

$$\lim_{n \to \infty} \| M_n(f) - f \|_{C[0,1]} = 0.$$

例6 Hermite-Fejer 插值算子列 $\{H_n\}_{n \in N}$：对 $f \in C[-1, 1]$，$n \in N$ 有

$$H_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})(1 - x x_{nk}) \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_{nk})} \right)^2.$$

其中 $x_{nk} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\ (k=1, 2, \cdots n)$ 是 Chebyshev 多项式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ 的零点。

[illegible]

$$1 - x x_{nk} = (1 - x^2) - x(x - x_{nk}),$$

所以对 $x \in [-1, 1]$ 有

$$H_n(1, x) = \sum_{k=1}^{n} (1 - x x_{nk}) \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_{nk})} \right)^2$$

$$= (1 - x^2) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_{nk})} \right)^2 + x \frac{T_n^2(x)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_{nk}},$$

由于 $T_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_{nk})$，所以有

$$\frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_{nk}};$$

$$\frac{T_n'^2 - T_n'' T_n}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_{nk})} \right)^2$$

从有而

$$H_n(1, x) = 1.$$

[illegible]

又

$$H_n(t, x)-x=H_n(t-x, x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_{nk}-x)(1-xx_{nk})\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_{nk})}\right)^2$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}((1-x^2)(x-x_{nk})+x(x-x_{nk})^2)\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_{nk})}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{n^2}(1-x^2)T_n^2(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_{nk}}-\frac{x}{n}T_n^2(x)$$

$$=-\frac{1-x^2}{n^2}T_n(x)T_n'(x)-\frac{x}{n}T_n^2(x).$$

由于对 $x\in[-1, 1]$，有

$$\left|(1-x^2)T_n'(x)\right|=\left|(1-x^2)^{\frac{1}{2}}n\sin n(\arccos x)\right|\leqslant n,$$

所以对 $x\in[-1, 1]$ 有

$$\left|H_n(t, x)-x\right|\leqslant\frac{2}{n}\left|T_n(x)\right|. \tag{4.13}$$

最后，由 Chebyshev 多项式零点性质：$\sum_{k=1}^{n}x_{nk}=0$ 导出二阶中心矩

$$H_n((t-x)^2, x)=\sum_{k=1}^{n}(x_{nk}-x)^2(1-xx_{nk})\left(\frac{T_n(x)}{n(x-x_{nk})}\right)^2$$

$$=\left(\frac{T_n(x)}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}(1-xx_{nk})=\frac{T_n^2(x)}{n} \tag{4.14}$$

由于

$$H_n(t^2, x)-x^2=H_n((t-x)^2, x)+2x(H_n(t, x)-x),$$

所以对 $x\in[-1, 1]$，由(4.13)和(4.14)导出

$$\left|H_n(t^2, x)-x^2\right|\leqslant\frac{4}{n}\left|T_n(x)\right|+\frac{|T_n(x)|^2}{n}\leqslant\frac{5|T_n(x)|}{n}.$$

由上述可见，对 $k=0, 1, 2$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|H_n(e_k)-e_k\|_{C[-1,1]}=0,$$

因此由定理 1.8 得到

系6　对每个 $f\in C[-1, 1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|H_n(f)-f\|_{C[-1,1]}=0.$$

现在讨论代数卷积算子列的局部收敛性，为明确起见，我们以峰形核奇异积分列 $\{\Phi_n\}_{n\in N}$ 为例。

例7 设 $\rho(x)$ 是 $[-r, r]$ 上的峰形函数，对 $f\in C[a, b]$ $(0<b-a\leqslant r)$ 和 $n\in N$，有

$$\Phi_n(f, x)=C_n\int_a^b f(t)\rho^n(t-x)dt;\ x\in[a, b]$$

其中

$$C_n^{-1}=\int_{-r}^{r}\rho^n(t)dt.$$

为建立 $\{\Phi_n\}_{n\in N}$ 的局部收敛定理，首先证明如下的渐近关系：对每个 $\delta\in(0, r)$ 有

$$\lim_{n\to\infty} C_n\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(t)dt=1 \tag{4.15}$$

或 $\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(t)dt\sim C_n^{-1}$ $(n\to+\infty)$，事实上，对每个 $\delta\in(0, r)$ 有

$$C_n^{-1}\int_{-r}^{r}\rho^n(t)dt=\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(t)dt+\left(\int_{-r}^{-\delta}+\int_{\delta}^{r}\right)\rho^n(t)dt,$$

由于 $\rho(x)$ 在 $[-r, -\delta]$ 和 $[\delta, r]$ 上是连续，恒正的，所以

$$0<q(\delta)=\max_{\delta\leqslant|x|\leqslant r}\rho(x)<1.$$

因此

$$\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(t)dt\leqslant C_n^{-1}\leqslant\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(t)dt+2rq^n(\delta),$$

又因 $\rho(0)=1$，所以对 $\varepsilon=\frac{1-q(\delta)}{2}$，存在 $\delta_1\in(0, \delta)$ 使得当 $|x|<\delta_1$ 时，有

$$\rho(x)>1-\varepsilon=\frac{1+q(\delta)}{2}>q(\delta),$$

因此对 $\delta\geqslant\delta_1$ 有

$$\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(x)dx\geqslant\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\rho^n(x)dx\geqslant\left(\frac{1+q(\delta)}{2}\right)^n 2\delta_1,$$

$$C_nq^n(\delta)\leqslant\frac{1}{2\delta_1}\left(\frac{q(\delta)}{\frac{1+q(\delta)}{2}}\right)^n \tag{4.16}$$

于是有

$$1\leqslant\left(C_n\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(x)dx\right)^{-1}\leqslant 1+2rC_nq^n(\delta).$$

由于 $\lim_{n\to\infty} C_nq^n(\delta)=0$， 令 $n\to+\infty$ 导出 (4.15)。

其次证明，对每个 $\delta\in(0, r)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|\Phi_n(e_k)-e_k\|_{C[a+\delta, b-\delta]}=0,\ (k=0, 1, 2).$$

事实上，对 $x\in[a+\delta,\ b-\delta]$ 有

$$\Phi_n(1,\ x)=C_n\int_a^b\rho^n(t-x)dt=C_n\int_{a-x}^{b-x}\rho^n(s)\,ds.$$

因为 $x\in[a+\delta,\ b-\delta]$，所以 $a-x\in(-r,\ -\delta]$；$b-x\in[\delta,\ r)$. 因而有

$$C_n\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(s)ds\leqslant C_n\int_{a-x}^{b-x}\rho^n(s)ds\leqslant C_n\int_{-r}^{r}\rho^n(s)ds,$$

或 $\quad C_n\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(s)ds\leqslant\Phi_n(1,\ x)\leqslant1$，因而有

$$\|\Phi_n(e_0)-e_0\|_{C[a+\delta,b-\delta]}\leqslant1-C_n\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(s)ds,$$

由(4.15)导出

$$\lim_{n\to+\infty}\|\Phi_n(e_0)-e_0\|_{C[a+\delta,b-\delta]}=0.$$

由于对 $x\in[a+\delta,\ b-\delta]$ $(0<\delta<r)$ 有

$$\Phi_n(t,\ x)=C_n\int_a^b t\rho^n(t-x)dt$$

$$=C_n\int_a^b(t-x)\rho^n(t-x)dt+C_nx\int_a^b\rho^n(t-x)dt,$$

所以有

$$\Phi_n(t,\ x)-x=C_n\int_a^b(t-x)\rho^n(t-x)dt+x(\Phi_n(1,\ x)-1),$$

注意到对任意的 $\alpha\in(0,\ \delta)$ 有

$$C_n\int_{-r}^{r}|s|\rho^n(s)ds=C_n\left(\int_{-r}^{-\alpha}+\int_{-\alpha}^{\alpha}+\int_{\alpha}^{r}\right)|s|\rho^n(s)ds$$

$$\leqslant rC_n\left(\int_{-r}^{-\alpha}+\int_{\alpha}^{r}\right)\rho^n(s)ds+\alpha C_n\int_{-\alpha}^{\alpha}\rho^n(s)\,ds$$

$$\leqslant2r^2C_nq^n(\delta)+\alpha C_n\int_{-\alpha}^{\alpha}\rho^n(s)ds,$$

所以对 $\forall x\in[a+\delta,\ b-\delta]$ 有

$$\left|C_n\int_a^b(t-x)\rho^n(t-x)dt\right|\leqslant C_n\int_{a-x}^{b-x}|s|\rho^n(s)ds$$

$$\leqslant2r^2C_nq^n(\delta)+\alpha C_n\int_{-\alpha}^{\alpha}\rho^n(s)ds.$$

因而对任意确定的 $\alpha\in(0,\delta)$ 有

$$\|\Phi_n(e_1)-e_1\|_{C[a+\delta,b-\delta]}\leqslant$$

$$\leqslant 2r^2C_nq^n(\delta)+\alpha C_n\int_{-\alpha}^{\alpha}\rho^n(s)ds+\max(|a+\delta|,|b-\delta|)\left(1-C_n\int_{-\delta}^{\delta}\rho^n(s)ds\right)$$

令 $n\to+\infty$，由(4.15)和(4.16)导出

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|\Phi_n(e_1)-e_1\|_{C[a+\delta,b-\delta]}\leqslant\alpha,$$

再令 $\alpha\to0^+$ 得到

$$\lim_{n\to+\infty}\|\Phi_n(e_1)-e_1\|_{C[a+\delta,b-\delta]}=0。$$

最后注意到对 $\forall x\in[a+\delta,b-\delta]$ 有

$$\Phi_n((t-x)^2,x)=C_n\int_a^b(t-x)^2\rho^n(t-x)dt$$

$$=C_n\int_{a-x}^{b-x}s^2\rho^n(s)ds,$$

对任意固定的 $\alpha\in(0,\delta)$ 和 $\forall x\in[a+\delta,b-\delta]$ 有

$$\Phi_n((t-x)^2,x)\leqslant 2r^2C_nq^n(\delta)+\alpha^2C_n\int_{-\alpha}^{\alpha}\rho^n(s)ds,$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a+\delta,b-\delta]}\Phi_n((t-x)^2,x)=0,$$

从而导出

$$\lim_{n\to+\infty}\|\Phi_n(e_2)-e_2\|_{C[a+\delta,b-\delta]}=0,$$

利用定理 1.9 (Bohman 定理) 得到

系7 对每个 $f\in C[a,b]$ $(0<b-a\leqslant r)$ 和每个 $\delta\in(0,r)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|\Phi_n(f)-f\|_{C[a+\delta,b-\delta]}=0。$$

特别地分别取 $\rho(x)=e^{-x^2}$ $(-r\leqslant x\leqslant r)$ 和 $\rho(x)=1-x^2$ $(|x|<1)$，则分别得到 Weierstrass 算子列 $\{W_n\}_{n\in N}$ 和 Landau 算子列 $\{l_n\}_{n\in N}$ 的局部收敛定理。

由上述可见，代数卷积算子列的逼近只是一种局部逼近。我们指出修正的代数卷积算子列，仍然可以实现整体逼近的。例如

例8 修正的 Landau 算子列 $\{\widetilde{l}_n\}_{n\in N}$：对 $f\in C[0,1]$，$n\in N$ 有

$$\widetilde{l}_n(f,x)=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}\int_{-1}^{1}f(x+tx(1-x))(1-t^2)^n dt,\quad x\in[0,1]。$$

由计算可得

$$\widetilde{l}_n(1, x)=1, \quad \widetilde{l}_n(t, x)=x$$

和

$$\widetilde{l}_n((t-x)^2, x)=(x(1-x))^2\frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}\int_{-1}^{1}t^2(1-t^2)^n dt$$

$$=(x(1-x))^2\frac{2(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$$

$$=\frac{(x(1-x))^2}{2n+3},$$

所以对 $k=0, 1, 2$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{l}_n(e_k)-e_k\|_{C[0,1]}=0.$$

因此由定理1.8得到

系8 对每个 $f\in C[0, 1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{l}_n(f)-f\|_{C[0,1]}=0.$$

4.4 Bohman-Korovkin型定理

§4.2中的Bohman-Korovkin定理，所讨论的正线性算子列，其定义域都是致密集D上连续函数空间C(D)，但是，许多常见的正线性算子列，它们的定义域是支柱为无界域上连续函数集，例如，在§2.1中讨论的指数型算子序列，就有Gauss-Weierstrass算子列 $\{G_n\}_{n\in N}$，Szasz-Mirakjan算子列 $\{S_n\}_{n\in N}$ 以及Baskakov算子列 $\{V_n\}_{n\in N}$ 等等都是这种类型的正线性算子列．人们自然要问：对这种类型的正线性算子列，Bohman-Korovkin定理的结论是否仍然有效？回答是否定的．例如，对每个 $f\in C[0, \infty)$，$n\in N$，令

$$U_n(f, x)=B_n(f, x)+f(n)e^{-n}, \quad x\in[0, 1]$$

其中 $B_n(f, x)$ 是Bernstein算子，则 $\{U_n\}_{n\in N}$ 是 $C[0, +\infty)$ 到 $C[0, 1]$ 内的正线性算子列，且对 $\forall x\in[0, 1]$ 有

$$U_n(1, x)=1+e^{-n},$$

$$U_n(t, x)=x+ne^{-n},$$

$$U_n(t^2, x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}+n^2e^{-n},$$

由此可见，对 $k=0, 1, 2$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\|U_n(e_k)-e_k\|_{C[0,1]}=0,$$

可是对 $f_0(x)=e^x\in C[0, \infty)$ 却有

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n(f_0)-f_0\|_{C[0,1]}\neq 0.$$

事实上，对 $f_0(x)=e^x$，有

$$U_n(f_0, x)=B_n(f_0,x)+1;\ x\in[0,1],$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\|B_n(f_0)-f_0\|_{C[0,1]}=0$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\|U_n(f_0)-f_0\|_{C[0,1]}=1\neq 0.$$

不过人们不难发现，只要对 $f\in C[0,\infty)$，在无穷远的增长给予适当限制，类似的 Bohman-Korovkin 断言还是可以成立的。譬如，对 $f\in C[0,\infty)$，若限制它适合如下条件：

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-x}=0,$$

则有

$$\lim_{n\to+\infty}\|U_n(f)-f\|_{C[0,1]}=0.$$

针对上述问题 Z、Ditzian 建立一个局部收敛定理并称它为 Bohman-Korovkin 型定理，为确定起见，设 T 为 $(-\infty,\infty)$ 或半闭无穷区间，$\mu(t)\in C(T)$ 且 $\mu(t)\geqslant 1$ $(t\in T)$，记

$C_\mu(T)=\{f\mid f\in C(T)$ 且 $|f(t)|\leqslant M_f(1+t^2)\mu(t),\ t\in T\}$，其中 M_f 是与 f 有关的正常数，我们有

定理1.10（Z. Ditzian）设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(T)$ 上的正线性算子列，且对 $D=[\alpha,\beta]\subset T$ 适合如下条件：

i) 对 $k=0,1,2$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(e_k)-e_k\|_{C(D)}=0,$$

ii) $\lim_{n\to+\infty}\max_{x\in D}|L_n((t-x)^2\mu(t),\ x)|=0,$

则对每个 $f\in C_\mu(T)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(f)-f\|_{C(D)}=0.$$

证明 明显地，由条件 i) 导出

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{x\in D} L_n((t-x)^2,\ x)=0 \tag{4.17}$$

注意到

$$L_n(f,\ x)-f(x)=L_n(f(t)-f(x),x)+f(x)(L_n(1,\ x)-1),$$

因此有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D)}\leqslant \max_{x\in D} L_n(|f(t)-f(x)|,\ x)+\|f\|_{C(D)}\|L_n(e_0)-e_0\|_{C(D)} \tag{4.18}$$

其次，因为 $f\in C_\mu(T)$，$D=[\alpha,\beta]\subset T$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对 $t\in T$，$x\in D$ 且 $|t-x|<\delta$ 时，有

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon,$$

又因为对 $x\in D$，$t\in T$ 且 $|t-x|\geqslant\delta$ 时，有

$$|f(t)-f(x)|\leqslant|f(t)|+|f(x)|\leqslant M_f(1+t^2)\mu(t)+\|f\|_{C(D)}$$

$$\leqslant M_f(t-x)^2\mu(t)\sup_{\substack{|t-x|\geqslant\delta\\ x\in D}}\left(\frac{1+t^2}{(t-x)^2}\right)+\frac{\|f\|_{C(D)}}{\delta^2}(t-x)^2,$$

记 $M_\delta=\sup\limits_{\substack{|t-x|\geqslant\delta\\ x\in D}}\frac{1+t^2}{(t-x)^2}$，则有

$$|f(t)-f(x)|\leqslant M_fM_\delta\mu(t)(t-x)^2+\frac{\|f\|_{C(D)}}{\delta^2}(t-x)^2,$$

所以对$\forall t\in T$，$\forall x\in D$有

$$|f(t)-f(x)|\leqslant\varepsilon+M_fM_\delta\mu(t)(t-x)^2+\frac{\|f\|_{C(D)}}{\delta^2}(t-x)^2,$$

因此有

$$\max_{x\in D}L_n(|f(t)-f(x)|,x)\leqslant\varepsilon(1+\|L_n(e_0)-e_0\|_{C(D)})$$

$$+M_fM_\delta\max_{x\in D}L_n((t-x)^2\mu(t),x)+\frac{\|f\|_{C(D)}}{\delta^2}\max_{x\in D}L_n((t-x)^2,x)$$

根据条件 i)，ii) 及（4.17），并注意 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们得到，对每个 $f\in C_\mu(T)$有

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{x\in D}L_n(|f(t)-f(x)|,x)=0.$$

因而由（4.18）断定，对每个 $f\in C_\mu(T)$有

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n(f)-f\|_{C(D)}=0.$$

证毕。

对于一般的无界闭集 T 可以类似讨论．作为应用考查在 §2.1 引入的指数型算子列 $\{E_n\}_{n\in N}$中的几个特例．设 T 为 $[0,\infty)$ 或 $(-\infty,+\infty)$，对 $f\in C(T)$，$n\in N$有

$$E_n(f,x)=\int_T f(u)\mathcal{E}_n(x,u)du,$$

其中 $\mathcal{E}_n(x,u)$是 §2.1 中的核函数。

由计算可得，对 $n\in N$，$x\in T$ 有

$$E_n(1,x)=1,\quad E(t,x)=x,$$

对非负整数 r，记

$$T_{n,r}(x)=n^r\int_T(u-x)^r\mathcal{E}_n(x,u)du,$$

则有如下递推关系：

$$T_{n,r+1}(x)=nr\phi(x)T_{n,r-1}(x)+\phi(x)\frac{d}{dx}T_{n,r}(x)\tag{4.19}$$

事实上，由积分号下求导法则，并注意$\mathcal{E}_n(x,u)$所适合的条件得到

$$\phi(x)\frac{d}{dx}T_{n,r}(x)=n^r\phi(x)\int_T\left((u-x)^r\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial x}-r(u-x)^{r-1}\mathcal{E}_n(x,u)\right)du$$

$$=n^{r+1}\int_T (u-x)^{r+1}\mathcal{E}_n(x,\ u)du-rn^r\phi(x)\int_T (u-x)^{r-1}\mathcal{E}_n(x,\ u)du$$

$$=T_{n,r+1}(x)-rn\phi(x)T_{n,r-1}(x),$$

整理后得到(4.19)。

由于 $T_{n0}(x)=1$，$T_{n1}(x)=0$，所以递推可得

$$T_{n2}(x)=n\phi(x),\qquad T_{n3}(x)=n\phi(x)\phi'(x),$$

$$T_{n4}(x)=3n^2\phi^2(x)+n\phi(x)(\phi'(x)^2+\phi(x)\phi''(x)),$$

又注意到 $E_n((t-x)^r,\ x)=n^{-r}T_{nr}(x)$，所以有

$$E_n(t^2,\ x)=x^2+\frac{\phi(x)}{n}.$$

设 $D=[\alpha,\ \beta]\subset T$，记 $K(D)=\max(\|\phi\|_{C(D)},\ \|\phi'\|_{C(D)})$，则有

$$\|E_n(e_2)-e_2\|_{C(D)}\leqslant\frac{K(D)}{n},$$

因此对 $k=0,\ 1,\ 2$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|E_n(e_k)-e_k\|_{C(D)}=0,$$

从而有

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{x\in D}E_n((t-x)^2,\ x)=0.$$

其次，由递推关系(4.19)得到

$$\max_{x\in D}E_n((t-x)^4,\ x)=\frac{\|T_{n4}\|_{C(D)}}{n^4}\leqslant\frac{M(D)}{n^2},$$

其中 $M(D)$ 是依赖于 $D=[\alpha,\ \beta]$ 的正常数，又对 $e_l=x^l$（l 是非负整数），有

$$\|E_n(e_l)\|_{C(D)}\leqslant M_l(D)$$

其中 $M_l(D)$ 是依赖于 l 和 D 的正常数。

现在就特殊形式的指数型算子列，讨论其局部收敛性，为此需要选取定理1.10中的 $\mu(t)$ 并验证条件 (I)。

例1 Baskakov 算子列 $\{V_n\}_{n\in N}$，此时 $T=[0,\ \infty)$，$\phi(x)=x(1+x)$，$D=[\alpha,\ \beta]$ $(0\leqslant\alpha<\beta<+\infty)$，选取

$$\mu(t)=(t^l+1)^{\frac{1}{2}}\qquad t\in[0,\ \infty)$$

其中 l 是任意确定的非负整数。对 $\forall x\in D$，应用 Schwarz 不等式得到

$$V_n((t-x)^2\mu(t),\ x)\leqslant\left(V_n((t-x)^4,x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(V_n(t^l+1),\ x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\frac{M(D)}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}(M_l(D)+1)^{\frac{1}{2}},$$

所以有

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{x\in D}V_n((t-x)^2\mu(t),\ x)=0,$$

因此由定理1.10得到

系1 对每个 $f\in C[0,\infty)$ 且

$$|f(t)|\leqslant M_f(1+t^2)(t^4+1)^{\frac{1}{2}},\quad t\in[0,\infty)$$

有

$$\lim_{n\to+\infty}\|V_n(f)-f\|_{C(D)}=0,$$

其中 $D=[\alpha,\beta]\subset[0,\infty)$ 的任意闭区间。

例2 Szász-Mirakjan 算子列 $\{S_n\}_{n\in N}$；此时 $T=[0,+\infty)$，$\phi(x)=x$，$D=[\alpha,\beta]$ $(0\leqslant\alpha<\beta<+\infty)$。选取

$$\mu(t)=e^{\lambda t}\quad(\lambda\geqslant 0),$$

由于

$$S_n(te^{\lambda t},x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}e^{\lambda\frac{k}{n}}\frac{n^kx^k}{k!}e^{-nx}$$

$$=xe^{\frac{\lambda}{n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^kx^k}{k!}e^{\frac{\lambda k}{n}}e^{-nx}$$

$$=xe^{\frac{\lambda}{n}}\exp\{(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)nx\}.$$

类似地，有

$$S_n(t^2e^{\lambda t},x)=\left(x^2e^{\frac{2\lambda}{n}}+\frac{xe^{\frac{\lambda}{n}}}{n}\right)\exp\left\{(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)nx\right\},$$

从而有

$$S_n((t-x)^2e^{\lambda t},x)=\left(x^2e^{\frac{2\lambda}{n}}+\frac{x}{n}e^{\frac{\lambda}{n}}-2x^2e^{\frac{\lambda}{n}}+x^2\right)\exp\left\{(e^{\frac{\lambda}{n}}-1)nx\right\}.$$

由于当 $x\geqslant 0$ 时，有 $e^x-1\leqslant xe^x$，所以

$$S_n((t-x)^2e^{\lambda t},x)\leqslant\exp\left(\frac{\lambda}{n}e^{\frac{\lambda}{n}}nx\right)\left(\frac{x}{n}e^{\frac{\lambda}{n}}+x^2\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2e^{\frac{2\lambda}{n}}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{n}e^{\frac{\lambda}{n}}+\frac{x^2\lambda^2}{n^2}e^{\frac{2\lambda}{n}}\right)\exp\left(\lambda xe^{\frac{\lambda}{n}}\right).$$

因此对每个 $D=[\alpha,\beta]\subset[0,\infty)$，存在正常数 $K(D)$ 使得对 $\forall x\in D$ 有

$$S_n((t-x)^2e^{\lambda t},x)\leqslant\frac{K(D)}{n}.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{x\in D}S_n((t-x)^2e^{\lambda t},x)=0.$$

由定理 1.10 得到

系2 对每个 $f\in C[0,\infty)$，且 $|f(t)|\leqslant M_f(1+t^2)e^{\lambda t}$ $(t\geqslant 0,\ \lambda\geqslant 0)$

有

$$\lim_{n\to+\infty}\|S_n(f)-f\|_{C(D)}=0,$$

其中 $D=[\alpha, \beta] \subset [0, \infty)$ 是任意的闭区间。

例2 Gauss-Weierstrass 算子列 $\{G_n\}_{n\in N}$，此时 $T=(-\infty, +\infty)$，$\phi(x)=1$，$D=[\alpha, \beta]$ $(-\infty<\alpha<\beta<+\infty)$。选取

$$\mu(t)=e^{\frac{t^2}{4}},\ t\in(-\infty,\ +\infty)。$$

由计算容易证实，对每个 $D=[\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty)$ 存在正常数 $K(D)$ 使得

$$\max_{m\in D}\left|G_n\left((t-x)^2e^{\frac{t^2}{4}},\ x\right)\right|<\frac{K(D)}{n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ \max_{x\in D} G_n\left((t-x)^2e^{\frac{t^2}{4}},\ x\right)=0。$$

由定理 1.10 得到

系3 对每个 $f\in C(-\infty, +\infty)$ 且

$$|f(t)|\leqslant M_f\,(1+t^2)e^{\frac{t^2}{4}},$$

有

$$\lim_{n\to+\infty}\|G_n(f)-f\|_{C(D)}=0,$$

其中 $D=[\alpha, \beta] \subset(-\infty, +\infty)$ 的任意闭区间。

§5 逼近度的渐近表示

设 D 是实轴上的致密集，$B(D)$ 是 D 上有界函数的全体，$\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $B(D)$ 到自身内的正线性算子列。对 $f\in B(D)$，$x\in D$ 称误差

$$\Delta_n(f,\ x)=L_n(f,\ x)-f(x)$$

为 $L_n(f)$ 逼近于 f 在 x 点的逼近度。若存在 $\alpha_n(x)\to0^+$ $(n\to+\infty)$ 和常数 $G(f,\ x)$ 使得

$$\Delta_n(f,\ x)\sim G(f,\ x)\alpha_n(x)\qquad (n\to+\infty),$$

或

$$\Delta_n(f,\ x)=G(f,\ x)\alpha_n(x)+o(\alpha_n(x))\quad (n\to+\infty),$$

则说 $\alpha_n(x)$ 为 $\Delta_n(f,\ x)$ 的渐近阶，$G(f,\ x)$ 为 Nikolsky 常数。可见无穷小量 $\alpha_n(x)$ 是度量 $L_n(f,\ x)$ 收敛于 $f(x)$ 的速度，常见的是取 $\alpha_n(x)=n^{-\alpha}$ $(\alpha>0)$。

本节建立逼近度的各种渐近表示，例如 Nikolsky 渐近表示和 Vonorovskya 渐近表示等等。

5.1 渐近关系转化定理

对确定的 $x\in D$ 和 $\delta>0$，记

$$\lambda_\delta(t,\ x)=\begin{cases}1 & |t-x|\geqslant\delta>0,\\ 0 & |t-x|<\delta,\end{cases}$$

明显地，若 $0<\delta_1<\delta_2$ 有

$$\lambda_{\delta_1}(t, x)\geq\lambda_{\delta_2}(t, x),$$

因此对正线性算子 L_n，有

$$L_n(\lambda_{\delta_1}(t, x), x)\geq L_n(\lambda_{\delta_2}(t, x), x) \tag{5.1}$$

为建立逼近度渐近关系的转化定理，首先需要证明一些引理。

引理1.6 （等价关系转化引理） 设 $\varphi(t)$ 是非负连续函数，且至多有 $\varphi(0)=0$，$\{L_n\}_{n\in N}$ 是 B(D)上的正线性算子列，并对确定的 $x\in D$ 适合如下条件：当 $n\to+\infty$ 时有

I) $L_n(1, x)-1=o_x(L_n(\varphi(t-x), x))$，

II) 对每个 $\delta>0$，有

$$L_n(\lambda_\delta(t, x), x)=o_x(L_n(\varphi(t-x), x)).$$

若 $f\in B(D)$ 在 x 点连续，且当 $t\to x$ 时有

$$f(t)-f(x)\sim G(x)\varphi(t-x),$$

则当 $n\to+\infty$ 时有

$$L_n(f(t), x)-f(x)\sim G(x)L_n(\varphi(t-x), x).$$

证明 由于

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{\varphi(t-x)}=G(x),$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$ 使得对 $t\in D$ 且 $0<|t-x|<\delta$ 有

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{\varphi(t-x)}-G(x)\right|<\varepsilon$$

或
$$|f(t)-f(x)-G(x)\varphi(t-x)|<\varepsilon\varphi(t-x) \tag{5.2}$$

注意到 $f(t)$ 在x点连续，所以当 $\varphi(0)\neq0$ 时，必有 $G(x)=0$，因此不论 $\varphi(0)=0$ 与否，只要 $t\in D$ 且 $|t-x|<\delta$ 都有（5.2），记

$$M_\delta=\sup_{\substack{|t-x|\geq\delta\\ t\in D}}|f(t)-f(x)-G(x)\varphi(t-x)|,$$

则对 $t\in D$ 且 $|t-x|\geq\delta$ 有

$$|f(t)-f(x)-G(x)\varphi(t-x)|\leq M_\delta\lambda_\delta(t, x) \tag{5.3}$$

结合(5.2)和(5.3)得到，对 $t\in D$ 有

$$|f(t)-f(x)-G(x)\varphi(t-x)|\leq\varepsilon\varphi(t-x)+M_\delta\lambda_\delta(t, x),$$

因此有

$$|L_n(f(t)-f(x)-G(x)\varphi(t-x), x)|\leq L_n(|f(t)-f(x)-G(x)\varphi(t-x)|, x)$$
$$\leq\varepsilon L_n(\varphi(t-x), x)+M_\delta L_n(\lambda_\delta(t,x),x),$$

于是 $|L_n(f(t),x)-f(x)-G(x)L_n(\varphi(t-x),x)|$

$$\leq|f(x)|\,|L_n(1,x)-1|+\varepsilon L_n(\varphi(t-x),x)+M_\delta L_n(\lambda_\delta(t,x),x)$$

或
$$\left|\frac{L_n(f(t),x)-f(x)}{L_n(\varphi(t-x),x)}-G(x)\right|\leq$$
$$\leq|f(x)|\frac{|L_n(1,x)-1|}{L_n(\varphi(t-x),x)}+\varepsilon+M_\delta\frac{L_n(\lambda_\delta(t,x),x)}{L_n(\varphi(t-x),x)},$$

由引理条件 i), ii) 并注意 $\varepsilon>0$ 是任意的，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(f,x)-f(x)}{L_n(\varphi(t-x),x)}=G(x)$$

证毕。

特别地，取 $\varphi(t)=1$ 得到点态 Kororkin 定理，即

推论1.10 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 B(D)上正线性算子列，$x\in D$ 且适合如下条件：当 $n\to+\infty$ 时有

i) $L_n(1,x)\to 1$，

ii) 对每个 $\delta>0$，$L_n(\lambda_\delta(t,x),x)\to 0$。

若 $f\in B(D)$ 且在 x 点连续，则有

$$\lim_{n\to\infty}L_n(f,x)=f(x)。$$

定理1.11（渐近关系转化定理） 设 $\varphi(t)$ 是非负连续偶函数，且至多有 $\varphi(0)=0$，$\{L_n\}_{n\in N}$ 是B(D)上正线性算子列，对$x\in D$适合如下条件：当 $n\to+\infty$ 时有

i) $L_n(1,x)-1=o_x(L_n(\varphi(t-x),x))$，

ii) 对每个 $\delta>0$，有

$L_n(\lambda_\delta(t,x),x)=o_x(L_n(\varphi(t-x),x))$。

若 $f\in B(D)$，且当 $t\to x^{\pm}$ 时，有

$$\lim_{\substack{t\to x^{\pm}\\ t\in D}}\frac{f(t)-f(x^{\pm})}{\varphi(t-x)}=G^{\pm}(x),$$

其中 $f(x_-)$，$f(x_+)$ 分别是 $f(t)$ 在x点的左、右极限，而 $G\pm(x)$是有限的且适合如下条件：当 $n\to+\infty$ 时有

iii) $(G_+(x)-G_-(x))L_n(\varphi(t-x)\mathrm{sgn}(t-x),x)=o_x(L_n(\varphi(t-x),x))$，

iv) $(f(x_+)-f(x_-))L_n(\mathrm{sgn}(t-x),x)=o_x(L_n(\varphi(t-x),x))$。

则有 $$L_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\sim\frac{G_+(x)+G_-(x)}{2}L_n(\varphi(t-x),x),\quad(n\to+\infty)。$$

证明　作辅助函数

$$F(t)=\begin{cases}f(t)-\dfrac{f(x_+)+f(x_-)}{2}-\dfrac{f(x_+)-f(x_-)}{2}\mathrm{sgn}(t-x)-\dfrac{G_+(x)-G_-(x)}{2}\varphi(t-x)\mathrm{sng}(t-x), & t\in D/\{x\}\\ 0, & t=x,\end{cases}$$

则 $F\in B(D)$ 且$F(t)$ 在 x 点连续，并有

$$\lim_{t\to x}\frac{F(t)-F(x)}{\varphi(t-x)}=\frac{G_+(x)+G_-(x)}{2},$$

由等价关系转化引理得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{L_n(F,x)-F(x)}{L_n(\varphi(t-x),x)}=\frac{G_+(x)+G_-(x)}{2}。$$

因为 $F(x)=0$ 和

$$L_n(F,x)=L_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}+\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}(1-L_n(1,x))$$

$$-\frac{f(x_+)-f(x_-)}{2}L_n(\operatorname{sgn}(t-x),x)-\frac{G_+(x)-G_-(x)}{2}L_n(\varphi(t-x)\operatorname{sgn}(t-x),x),$$

所以由条件 i)，iii) 和 iv) 导出等价关系：

$$L_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\sim\frac{G_+(x)+G_-(x)}{2}L_n(\varphi(t-x),x);\ n\to+\infty.$$

证毕。

特别地，若 $\varphi(t)=1$，此时必有 $G_\pm^{\pm}(x)=0$，我们有

推论1.11 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $B(D)$ 上正线性算子列，$x\in D$ 且适合如下条件，当 $n\to+\infty$ 时，有

i) $L_n(1,x)\to1$,

ii) 对每个 $\delta>0$，$L_n(\lambda_\delta(t,x),x)\to0$.

若 $f\in B(D)$ 在 $t=x$ 点存在左、右极限 $f(x_-)$ 和 $f(x_+)$ 且适合如下条件

iii) $(f(x_+)-f(x_-))L_n(\operatorname{sgn}(t-x),x)\to0$,

则有

$$\lim_{n\to\infty}L_n(f,x)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}.$$

例1 设 $\{B_n\}_{n\in N}$ 是 Bernstein算子列。若 $f\in B[0,1]$ 且 $x\in(0,1)$ 是第一类间断点，则有

$$\lim_{n\to\infty}B_n(f,x)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}.$$

这是 Herzog-Hill 得到的。

证明 由于 $B_n(1,x)=1$，且对每个 $\delta>0$ 有

$$B_n(\lambda_\delta(t,x),x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_\delta\left(\frac{k}{n},x\right)p_{nk}(x)$$

$$=\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}p_{nk}(x)\leq\frac{1}{\delta^4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^4p_{nk}(x)$$

$$=\frac{T_{n4}(x)}{n^4\delta^4}=\frac{1}{n^4\delta^4}x(1-x)(3n^2x(1-x)-2nx(1-x)+n(1-2x)^2)$$

$$\leq\frac{1}{n^2\delta^2}\qquad x\in[0,1].$$

其中利用了引理 1.4 中的递推关系，所以对每个 $\delta>0$ 有

$$B_n(\lambda_\delta(t,x)x)\to0;\ (n\to+\infty).$$

又由概率论中心极限定理推出

$$B_n(\operatorname{sgn}(t-x),x)\to0\ (n\to+\infty),$$

因此由推论 1.11 得到

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f, x)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}.$$

例2 设 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是对应于 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 的正卷积算子族，且 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是偶的逼近恒等核。若 $f\in B_{2\pi}$ 且 x 是第一类间断点，则有

$$\lim_{\rho\to\rho_0} I_\rho(f,x)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}.$$

证明 由于 $I_\rho(1, x)=1$，且对每个 $\delta>0$ 有

$$I_\rho(\lambda_\delta(t,x), x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lambda_\delta(x-t,x)\,d\mu_\rho(t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} d\mu_\rho(t)\to 0\quad(\rho\to\rho_0)$$

又因为 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是偶的，所以有

$$I_\rho(\mathrm{sgn}(t-x), x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sgn}\,t\,d\mu_\rho(t)=0,$$

因此由推论 1.11 得到

$$\lim_{\rho\to\rho_0} I_\rho(f, x)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}.$$

最后我们指出，定理 1.11 中的条件 ii)，在实用中经常由如下引理给出一个较强条件代替。

引理1.7 设 $\varphi(t)$ 是非负连续函数且至多有 $\varphi(0)=0$，$\{L_n\}_{n\in N}$ 是B(D)上的正线性算子列。若存在 $\delta_n\to0^+$ $(n\to\infty)$，使得

$L_n(\lambda\delta_n(t, x), x)=o_x(L_n(\varphi(t-x), x))$; $(n\to+\infty)$,

则对每个 $\delta>0$ 有

$L_n(\lambda_\delta(t,x), x)=o_x(L_n(\varphi(t-x), x))$; $(n\to+\infty)$.

证明 由于 $\delta_n\to0^+$ $(n\to+\infty)$，所以对每个 $\delta>0$ 存在正整数 n_0 使得当 $n>n_0$ 时有 $0<\delta_n<\delta$，由（5.1）得到当 $n>n_0$ 时

$0<L_n(\lambda_\delta(t,x), x)\leqslant L_n(\lambda\delta_n(t,x), x)$

因此引理成立是明显的，证毕。

5.2 Nikolsky渐近表示式

设 $f\in B(D)$ 且 $x\in D$ 是 f 的第一类间断点或连续点，若

$$\lim_{D\ni t\to x^-}\frac{f(t)-f(x_-)}{|t-x|}=-f'_-(x),$$

和

$$\lim_{D\ni t\to x^+}\frac{f(t)-f(x_+)}{|t-x|}=f'_+(x)$$

存在，则称 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 分别为 f 在 x 点的准左、右导数，特别当 f(t) 在 x 点连续时，它们就是 f 在 x 点的左，右导数。

作为定理1.11的特例，取 $\varphi(t)=|t|$ 我们得到 Nikolsky 渐近表示式。

定理1.12（Nikolsky型渐近表示式） 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是B(D)上正线性算子列，$x\in D$ 且适合如下条件：当 $n\to+\infty$ 时，有

i) $L_n(1,\ x)-1=o_x(L_n(|t-x|,\ x))$，

ii) 对每个 $\delta>0$ 有

$L_n(\lambda_\delta(t,\ x),\ x)=o_x(L_n(|t-x|,x))$。

若 $f\in B(D)$ 在 x 点具有准左，右导数 $f'_+(x)$ 和 $f'_-(x)$ 且适合如下条件：当 $n\to+\infty$ 时有

iii) $(f(x_+)-f(x_-))L_n(\mathrm{sgn}(t-x),\ x)=o_x(L_n(|t-x|,\ x))$，

iv) $(f'_+(x)+f'_-(x))L_n((t-x),x)=o_x(L_n(|t-x|,\ x))$。

则有

$$L_n(f,\ x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{2}L_n(|t-x|,x)+O_x(L_n(|t-x|,x)),(n\to\infty)$$

应当指出，当 $f\in B_{2\pi}$ 时由于 $|t|\sim2\left|\sin\frac{t}{2}\right|(t\to0)$，所以在定理1.12中改取 $\varphi(t)=2\left|\sin\frac{t}{2}\right|$ 更方便，作为应用实例，给出几个熟知的正线性算子列的 Nikolsky 型渐近表示式。

例 1 设 $\{\sigma_n\}_{n\in N}$ 是 Fej'er 算子例，若 $f\in B_{2\pi}$ 且在 x 点具有准左，右导数 $f'_+(x)$ 和 $f'_-(x)$，则有

$$\sigma_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{\pi}\frac{\ln n}{n}+o_x\left(\frac{\ln n}{n}\right),\ (n\to+\infty)。$$

证明 取 $\varphi(t)=2\left|\sin\frac{t}{2}\right|$，有

$$\sigma_n\left(2\left|\sin\frac{t-x}{2}\right|,x\right)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2}tdt=\frac{4}{n\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$$=\frac{4}{n\pi}\left(\ln2+\frac{1}{2}\ln n+O(1)\right)\sim\frac{2\ln n}{n\pi},\qquad(n\to+\infty)，$$

由于 $\sigma_n(1,\ x)=1$，

$$\sigma_n\left(2\sin\frac{t-x}{2},\ x\right)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\sin\frac{t}{2}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt=0,$$

和

$$\sigma_n(\mathrm{sgn}(t-x),x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sgn}t\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt=0,$$

所以定理1.12中条件i)，iii)及iv)都适合，又对每个 $\delta>0$ 有

$$\sigma_n(\lambda_\delta(t,x),x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt$$

$$\leqslant\frac{1}{n\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_\delta^\pi dt\leqslant\frac{1}{n\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

因此 $\dfrac{\sigma_n(\lambda_\delta(t,x),\ x)}{\sigma_n\left(2\left|\sin\frac{t-x}{2}\right|,\ x\right)}\leqslant\dfrac{\pi}{2\sin^2\frac{\delta}{2}\ln n}\to 0\quad(n\to+\infty)$,

即定理1.12中条件 ii)也适合，因而得到

$$\sigma_n(f,\ x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{\pi}\frac{\ln n}{n}+o_x\left(\frac{\ln n}{n}\right),\ n\to+\infty,$$

证毕.

特别地，当 $f(t)$ 在 x 点连续时，有

$$\sigma_n(f,\ x)-f(x)=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{\pi}\frac{\ln n}{n}+o_x\left(\frac{\ln n}{n}\right),\ (n\to+\infty),$$

这是 Nikolsky 得到的。

在讨论例 2 之前，首先给出一个引理

引理1.8 当 $n\to+\infty$时，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4du=n^2\ln 2+\frac{\ln n}{4}+O(1).$$

证明 由于

$$\frac{1}{\sin^4 u}=\frac{1}{u^4}+\frac{2}{3u^2}+O(1),$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u^3}du+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u}du+O(1),$$

因为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u^3}du=n^2\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 t}{t^3}dt$$

$$=n^2\int_0^\infty\frac{\sin^4 t}{t^3}dt+n^2\int_{\frac{n\pi}{2}}^\infty\frac{\sin^4 t}{t^3}dt$$

利用 $\dfrac{1}{t^3}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-tx}dx$，并交换积分顺序得到

$$\int_0^\infty\frac{\sin^4 t}{t}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty\sin^4 t\left(\int_0^\infty x^2e^{-tx}dx\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^2\left(\int_0^{\infty}\sin^4 t e^{-tx}dt\right)dx$$

$$=12\int_0^{\infty}\frac{x}{(x^2+4)(x^2+16)}=\ln 2.$$

而 $$\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin^4 t}{t^3}dt=O(n^{-2}),$$

因而得到

$$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u^3}du=n^2\ln 2+O(1).$$

又因为

$$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u}du=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{x}dx$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2}\pi}\frac{\sin^4 x}{x}dx\geqslant\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{\pi(k+1)}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2}\pi}\sin^4 x dx$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

另一方面，有

$$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u}du\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{x}dx+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{k\pi}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{k+1}{2}\pi}\sin^4 x dx$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+O(1),$$

从而得到

$$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nu}{u}du=\frac{1}{4}\ln n+O(1),$$

证毕。

例2 设 $\{J_n\}_{n\in N}$ 是 Jackson 算子列，若 $f\in B_2$，且在 x 点具有准左，右导数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$，则有

$$J_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{3\ln 2}{n\pi}\left(f'_+(x)-f'_-(x)\right)+O_x\left(\frac{\ln n}{n}\right),\quad n\to+\infty.$$

证明 取 $\varphi(t)=2\left|\sin\frac{t}{2}\right|$，由引理1.6得到

$$J_n\left(2\left|\sin\frac{t-x}{2}\right|,\ x\right)=\frac{3}{2n\pi(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4dt$$

$$=\frac{12}{n\pi(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4du$$

$$=\frac{12}{n\pi(2n^2+1)}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin u-u)\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4du\right)$$

$$=\frac{6\ln 2}{\pi n}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

由于 $J_n(1,x)=1$,

$J_n\left(2\sin\frac{t-x}{2},\ x\right)=0$,

和 $J_n(\operatorname{sgn}(t-x),\ x)=0$,

所以定理1.12中条件i),iii)和iv)都适合,又因为对$\delta_n\to0^+(n\to+\infty)$,有

$$J_n(\lambda_{\delta_n}(t,x),x)=\frac{6}{n\pi(2n^2+1)}\int_{\frac{\delta_n}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4du$$

$$\leqslant\frac{6}{n\pi(2n^2+1)}\int_{\frac{\delta_n}{2}}^{\infty}\frac{du}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^4u^4}=\frac{3\pi^2}{n(2n^2+1)\delta_n^3},$$

取$\delta_n=n^{-\frac{1}{6}}\to0^+(n\to+\infty)$,则有

$$\frac{J_n(\lambda_{\delta_n}(t,x),x)}{J_n(2|\sin\frac{t-x}{2}|,x)}\leqslant\frac{\frac{3\pi^2}{2n^2+1}}{\frac{6\ln 2}{n\pi}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)}\longrightarrow0(n\to+\infty),$$

于是由引理1.7断定条件ii)也适用,因而由定理1.12得到

$$J_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{3\ln 2}{n\pi}(f'_+(x)-f'_-(x))+O_x\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),\quad(n\to\infty)$$

证毕。

特别地,当$f\in B_{1,x}$且在x点连续,则有

$$J_n(f,x)-f(x)=\frac{3\ln 2}{n\pi}(f'_+(x)-f'_-(x)+O_x\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).\quad(n\to\infty)$$

这是吴顺唐得到的。

最后讨论 Bernstein 算子列的 Nikolsky 渐近表示式,为此需要如下引理。

引理1.9 设$0<\delta_n<n^{-\alpha}\left(\frac{1}{3}<\alpha<1\right)$,则对任何$m\geqslant0$有如下等价关系:

当 $n\to+\infty$ 时，

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta_n}\left|\frac{k}{n}-x\right|^m p_{nk}(x)\sim\left(\frac{2x(1-x)}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}},\tag{5.4}$$

$$\sum_{x<\frac{k}{n}<x+\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)^m p_{nk}(x)\sim\left(\frac{2x(1-x)}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\tag{5.5}$$

和

$$\sum_{x-\delta_n<\frac{k}{n}<x}\left|\frac{k}{n}-x\right|^m p_{nk}(x)\sim\left(\frac{2x(1-x)}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\tag{5.6}$$

其中 $p_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ （$0\leqslant k\leqslant n$）。

证明　由概率的 Laplace 渐近公式：当 $\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta_n<n^{-\alpha}\left(\frac{1}{3}<\alpha<1\right)$ 有

$$p_{nk}(x)\sim\left(\frac{1}{2n\pi x(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{n}{2x(1-x)}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right),\quad(n\to+\infty),$$

于是对 $m\geqslant 0$ 有

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|^m p_{nk}(x)\sim\left(\frac{n}{2\pi x(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{k}{n}-x\right|^m\frac{1}{n}e^{-\frac{n}{2x(1-x)}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2},\quad(n\to\infty).$$

关于 k 求和得到，当 $n\to+\infty$ 时有

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta_n}\left|\frac{k}{n}-x\right|^m p_{nk}(x)\sim\left(\frac{n}{2\pi x(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta_n}\frac{1}{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|^m e^{-\frac{n}{2x(1-x)}(k-x)^2}$$

$$\sim\left(\frac{n}{2\pi x(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n}|u-x|^m e^{-\frac{n}{2x(1-x)}(u-x)}du.$$

由于

$$\left(\frac{n}{2\pi x(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{x-\delta_n}^{x+\delta_n}|u-x|^m e^{-\frac{n}{2x(1-x)}(u-x)^2}du$$

$$=\left(\frac{n}{2\pi x(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}2\int_0^{\delta_n}u^m e^{-\frac{n}{2x(1-x)}u^2}du$$

$$=\left(\frac{2x(1-x)}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\delta_n\left(\frac{n}{2x(1-x)}\right)^{\frac{1}{2}}}v^m e^{-v^2}dv$$

$$\sim\left(\frac{2x(1-x)}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t^{\frac{m+1}{2}-1}e^{-t}dt$$

$$=\left(\frac{2x(1-x)}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

所以等价关系（5.4）得证．用同样方法可证明（5.5）和（5.6）。证毕。

设 $\{B_n\}_{n\in N}$ 是 Bernstein 算子列，则有

$$B_n(1,\ x)=1,\ B_n(t,\ x)=x$$

且对每个$\delta>0$，有（§5.1中例1）

$$B_n(\lambda_\delta(t,x),\ x)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

又由引理1.9中的等价关系（5.4）导出

$$B_n(|t-x|,x)\sim\left(\frac{2x(1-x)}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(n\to+\infty)$$

所以定理1.12中条件 i)，ii）及 iv)都适合，但是

$$B_n(\operatorname{sgn}(t-x),\ x)\neq o_x(B_n(|t-x|,\ x)).$$

（实际上在第二章我们将证明，对 $x\in(0,\ 1)$，当 n 充分大时，有 $|B_n(\operatorname{sgn}(t-x),\ x)|\leqslant\frac{11}{2}\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$，其阶是不可改进的)，因此要使定理1.12中条件 iii) 也适用，只有假定 $f(x_+)=f(x_-)$，从而得到

例3 设 $\{B_n\}_{n\in N}$是Bernstein 算子列，若 $f\in B[0,1]$ 在 $x\in(0,1)$点连续且具有左，右导数 $f'_-(x)$，和$f'_+(x)$，则有

$$B_n(f;x)-f(x)=\frac{f'_+(x)-f'_-(x)}{2}\left(\frac{2x(1-x)}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}+o_x\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\qquad(n\to+\infty).$$

5.3 Vonorovskya 渐近表示式

设 $f\in B(D)$ 且在 $x\in D$点的准左，右导数存在且相等，则说 f 在 x 点是准可导的，其准导数记作 $f^{<1>}(x)$，明显地，可导必定准可导，反之未必，例如 $f(t)=\operatorname{sgn}(t-x)$ 在 x 点不可导但准可导且 $f^{<1>}(x)=0$。当 f 在 x 点准可导，若

$$\lim_{D\ni t\to x^{\pm}}\frac{f(t)-f^{<1>}(x)(t-x)-f(x\pm)}{\frac{1}{2}(t-x)^2}=f''_{\pm}(x)$$

存在，则说 $f''_-(x)$ 和 $f''_+(x)$ 为 f 的二阶准左，右导数．特别地，当 f 在x点可导，则 $f''_-(x)$ 和 $f''_+(x)$分别是 f 的二阶左，右导数。

现在取$\varphi(t)=\frac{1}{2}t^2$，对辅助函数

$$F(t)=f(t)-f^{(1)}(x)(t-x)$$

应用定理1.11导出如下的 Vonorovskya 型渐近表示式。

定理1.13 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是B(D)上正线性算子列，且对 $x\in D$ 适合如下条件：当 $n\to+\infty$ 有

i) $L_n(1,x)-1=o_x(L_n((t-x)^2,x))$,

$L_n(t-x,x)=o_x(L_n((t-x)^2,x))$,

ii) 对每个 $\delta>0$ 有

$$L_n(\lambda_\delta(t,x),x)=o_x(L_n((t-x)^2,x)).$$

若 $f\in B(D)$ 在 x 点具有二阶准左，右导数 $f''_-(x)$ 和 $f''_+(x)$，且适合如下条件：当 $n\to+\infty$ 时，有

iii) $(f(x_+)-f(x_-))L_n(\mathrm{sgn}(t-x),x)=o_x(L_n((t-x)^2,x))$.

iv) $(f''_+(x)-f''_-(x))L_n((t-x)^2\mathrm{sgn}(t-x),x)=o_x(L_n((t-x)^2,x))$.

则有

$$L_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{f''_+(x)+f''_-(x)}{4}L_n((t-x)^2,x)+o_x(L_n((t-x)^2,x));$$
$$(n\to+\infty).$$

特别地，若 f 在 x 点具有二阶导数，则有

$$L_n(f,x)-f(x)=\frac{f''(x)}{2}L_n((t-x)^2,x)+o_x(L_n((t-x)^2,x));\ (n\to+\infty).$$

应当指出，若 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $B_{2\pi}$ 上的正线性算子列，由于当 $t\to0$ 时有 $\sin t\sim t$，$\frac{1}{2}t^2\sim2\sin^2\frac{t}{2}$，所以在定理1.13中用 $\sin(t-x)$ 代替 $(t-x)$，$4\sin^2\frac{t-x}{2}$ 代替 $(t-x)^2$ 较为方便。

作为应用，讨论一些正线性算子列的 Vonorovskya 渐近表示式。

例1 设 $\{G_n\}_{n\in N}$ 是 Gauss-Weierstrass 算子列，若 $f\in B(-\infty,\infty)$ 且在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 点具有二阶准左，右导数 $f''_-(x)$ 和 $f''_+(x)$，则当 $n\to+\infty$ 时，有渐近表示式

$$G_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{f''_+(x)+f''_-(x)}{2n}+o_x\left(\frac{1}{n}\right)$$

证明 由于对 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$G_n(1,x)=1,$$
$$G_n(t,x)=x,$$
$$G_n((t-x)^2,x)=\frac{1}{n},$$

和

$$G_n(\mathrm{sgn}(t-x),x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sgn}(t-x)e^{-\frac{n(t-x)^2}{2}}dt,$$

$$=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sgn} t\, e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt=0$$

$$G_n\left((t-x)^2\operatorname{sgn}(t-x),\ x\right)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\operatorname{sgn} t\, e^{-\frac{nt^2}{2}}dt=0,$$

又对每个 $\delta>0$，有

$$G_n\left(\lambda_\delta(t,x),\ x\right)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{\delta\leqslant|t-x|<+\infty}\exp\left\{-\frac{n(t-x)^2}{2}\right\}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\int_{\delta}^{\infty}e^{-\frac{n}{2}t^2}dt\leqslant\frac{3}{\delta^4 n^2},$$

可见，定理1.13中条件 i)，ii)，iii) 及 iv)都适合，因而得到

$$G_n(f,\ x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{f''_+(x)+f''_-(x)}{2n}+o_x\left(\frac{1}{n}\right);\ \ (n\to+\infty)$$

证毕。

例2 设 $\{B_n\}_{n\in N}$ 是Bernstein 算子列。若 $f\in B[0,\ 1]$ 在 x 点连续，且具有二阶准左，右导数 $f''_-(x)$ 和 $f''_+(x)$，则当 $n\to+\infty$时，有

$$B_n(f,\ x)-f(x)=\frac{f''_+(x)+f''_-(x)}{4}\cdot\frac{x(1-x)}{n}+o_x\left(\frac{1}{n}\right).$$

证明 由于对 $x\in(0,\ 1)$有

$$B_n(1,\ x)=1,\qquad B_n(t,\ x)=x,$$

$$B_n\left((t-x)^2,\ x\right)=\frac{x(1-x)}{n}.$$

且对每个 $\delta>0$，有

$$B_n\left(\lambda_\delta(t,\ x),x\right)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

又由引理1.9中的（5.5）和（5.6）导出

$$B_n\left((t-x)^2\operatorname{sgn}(t-x),\ x\right)=o_x\left(\frac{1}{n}\right);\ \ (n\to+\infty).$$

可见定理1.13中条件 i)，ii) 和 ii)适合，又 f 在 x 点连续所以条件 iii)也适合，因而得到渐近表示式

$$B_n(f,\ x)-f(x)=\frac{f''_+(x)+f''_-(x)}{2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}+o_x\left(\frac{1}{n}\right),\ \ (n\to+\infty)$$

证毕。

特别当 f 在$x\in(0,\ 1)$点具有二阶导数，则当 $n\to+\infty$ 时有

$$B_n(f,\ x)-f(x)=\frac{x(1-x)}{2n}f''(x)+o_x\left(\frac{1}{n}\right).$$

这是 Vonorovskya 得到的。

关于周期情况有

例3 设 $\{J_n\}_{n\in N}$ 是 Jackson 算子列，若 $f\in B_{2\pi}$ 且在 x 点具有二阶准左，右导数 $f_-''(x)$ 和 $f_+''(x)$，则当 $n\to\infty$ 时有

$$J_n(f,\ x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{3(f_+''(x)+f_-''(x))}{4n^2}+o_x\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

证明 在定理 1.13 中用 $4\sin^2\frac{t-x}{2}$ 代替 $(t-x)^2$，$\sin(t-x)$ 代替 $(t-x)$，由于

$$J_n\left(4\sin^2\frac{t-x}{2},\ x\right)=\frac{12}{n\pi(2n^2+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nt}{\sin^2 t}dt$$

$$=\frac{24}{n\pi(2n^2+1)}\left(n\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 t}{t^2}dt+O(1)\right)$$

$$\sim\frac{6}{2n^2},\quad (n\to+\infty).$$

又因 $J_n(1,\ x)=1$，

$J_n(\sin(t-x),\ x)=J_n(\operatorname{sgn}(t-x),\ x)=0$，

和 $J_n\left(4\sin^2\frac{t-x}{2}\operatorname{sgn}(t-x),\ x\right)=0$，

以及对每个 $\delta_n\to0^+$ 有

$$J_n(\lambda\delta_n(t,x),\ x)\leqslant\frac{3\pi^2}{n(2n^2+1)\delta_n^2},$$

选取 $\delta_n=(\ln n)^{-\frac{1}{3}}$ 则有

$$\frac{J_n(\lambda_{\delta_n}(t,x),\ x)}{J_n\left(4\sin^2\frac{t-x}{2},x\right)}\to0\quad(n\to+\infty).$$

可见定理1.13中的条件都适合，因而有如下渐近表示式

$$J_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{3(f_+''(x)+f_-''(x))}{4n^2}+o_x\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad(n\to+\infty).$$

特别地，若 f 在 x 点存在二阶导数，则有

$$J_n(f,\ x)-f(x)=\frac{3}{2n^2}f''(x)+o_x\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad(n\to+\infty).$$

这是 Natanson 得到的。

5.4 正卷积算子的 Vonorovskya 渐近表示式

§5.3 讨论了 $B_{2\pi}$ 上正线性算子列的 Vonorovskya 渐近表示。现在特别讨论具有偶性 Borel 核的正卷积算子族，在较一般的条件下，直接应用等价关系转化引理建立Vonorovskya 渐近表示式。

设 $f\in B(D)$ 且在 $x\in D$ 点具有左，右极限 $f(x_-)$ 和 $f(x_+)$，若极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-f(x_+)-f(x_-)}{h^2}=f^{[2]}(x),$$

存在，则称 $f^{[2]}(x)$ 为 f 在 x 点的二阶准 Riemann 导数。明显地，若 $f''(x)$ 存在，则有 $f^{[2]}(x)=f''(x)$，反之未必成立。例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -(x-2)^2, & 1<x\leqslant 2\pi\end{cases}$$

则有 $f^{[2]}(1)=0$，但 f 在 $x=1$ 点不连续。其次易证，若 f 在 x 点具有二阶准左，右导数 $f''_-(x)$ 和 $f''_+(x)$，则有

$$f^{[2]}(x)=\frac{f''_+(x)+f''_-(x)}{2}.$$

应用等价关系转化引理（引理1.6）证得如下定理

定理1.14 设 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是对应于偶性，非负 Borel 核 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 的卷积算子族，且

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{2\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=4 \tag{5.7}$$

其中 $\alpha_{k\rho}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,d\mu_\rho(t)$，若 $f\in B_{2\pi}$ 且在 x 点具有二阶准 Riemann 导数 $f^{[2]}(x)$，则当 $\rho\to\rho_0$ 时，有

$$I_\rho(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=f^{[2]}(x)(1-\alpha_{1\rho})+o(1-\alpha_{1\rho}).$$

证明 由于对每个 $\rho\in\Omega$，$d\mu_\rho$ 是偶的，且

$$I_\rho(1,x)=1$$

所以

$$I_\rho(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x_+)-f(x_-)}{2}d\mu_\rho(t).$$

令

$$h_x(t)=\begin{cases}\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-f(x_+)-f(x_-)}{2} & t\neq 0;\\ 0 & t=0,\end{cases}$$

则 $h_x(t)$ 在 $t=0$ 点连续的偶函数，且有

$$\lim_{t\to 0}\frac{h_x(t)-h_x(0)}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{h_x(t)}{\frac{1}{2}t^2}=f^{[2]}(x) \tag{5.8}$$

或

$$h_x(t)\sim 2\sin^2\frac{t}{2}\,f^{[2]}(x)\qquad (t\to 0)$$

又因为

$$I_\rho(2\sin^2\frac{t}{2},0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\sin^2\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)=1-\alpha_{1\rho}$$

且对每一个$\delta>0$有

$$I_\rho(\lambda_\delta(t,x),x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lambda_\delta(t,x)d\mu_\rho(t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}d\mu_\rho(t)\leqslant\frac{1}{\pi(1-\cos\delta)^2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)^2d\mu_\rho(t)$$

$$=\frac{1}{(1-\cos\delta)^2}\frac{1-\alpha_{1\rho}}{2}\left(4-\frac{1-\alpha_{2\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}\right)$$

由（5.7）导出，对每个$\delta>0$有

$$I_\rho(\lambda_\delta(t,x),x)=o(1-\alpha_{1\rho})=o\left(I_\rho\left(2\sin^2\frac{at}{2},0\right)\right),$$

因此应用等价关系转化引理，从（5.8）导出

$$I_\rho(h_x,0)\sim f^{[2]}(x)I_\rho\left(2\sin^2\frac{t}{2},0\right);\quad(\rho\to\rho_0),$$

或
$$I_\rho(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=(1-\alpha_{1\rho})f^{[2]}(x)+o(1-\alpha_{1\rho});\qquad(\rho\to\rho_0).$$

证毕。

作为例子，引入 Weierstrass 卷积算子 $W_\rho(\rho>0)$：对每个$f\in B_{2\pi}$和$\rho>0$，令

$$W_\rho(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\theta_\rho(t)dt$$

其中 $\theta_\rho(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\rho k^2}\cos kt$ 是 Jacobi-θ 函数，明显的，它是具有偶核的正卷算子，

例1 设$\{W_\rho\}_{\rho>0}$是Weierstrass 卷积算子族，若$f\in B_{2\pi}$且在x点具有二阶准Riemann 导数$f^{[2]}(x)$，则当$\rho\to0^+$时，有

$$W_\rho(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\rho f^{[2]}(x)+o(\rho);\quad(\rho\to0^+).$$

证明　由于对$\rho>0$，

$$\theta_\rho(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\rho k^2}\cos kt,$$

所以有　$1-\alpha_{k\rho}=1-e^{-\rho k^2}\qquad(k=1,2\cdots)$

因此有　$\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{1-\alpha_{2\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{1-e^{-4\rho}}{1-e^{-\rho}}=4$。

又　$1-\alpha_{1\rho}=1-e^{-\rho}\sim\rho\qquad(\rho\to0^+)$，

因而由定理1.14得到所求的渐近表示式，证毕。

现在研究定理1.14中（5.7）的等价条件，1967年 Turesky 证得如下定理

定理1.15（Turesky 等价条价）设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是偶性正 Borel 测度核，则如下条件是等价的：

i) 对$\forall k\in N$，$\lim\limits_{\rho\to\rho_0}\dfrac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=k^2$，

ii) $\lim\limits_{\rho\to\rho_0}\dfrac{1-\alpha_{2\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=4$，

iii) $I_\rho\left(\sin^4\dfrac{t}{2},\ 0\right)=o(1-\alpha_{1\rho})$；$(\rho\to\rho_0)$，

iv) 对任意确定的 $\delta>0$，有

$$\int_\delta^\pi d\mu_\rho(t)=o(1-\alpha_{1\rho})；\ (\rho\to\rho_0).$$

证明　i) $\Longrightarrow$ ii)是明显的。

ii) $\Longrightarrow$ iii)。由条件 ii) 导出

$$(1-\alpha_{2\rho})-4(1-\alpha_{1\rho})=o(1-\alpha_{1\rho})\qquad(\rho\to\rho_0),$$

或　$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(4\sin^2\frac{t}{2}-\sin^2 t\right)d\mu_\rho(t)=o(1-\alpha_{1\rho})\quad(\rho\to\rho_0).$$

由于

$$4\sin^2\frac{t}{2}-\sin^2 t=4\sin^2\frac{t}{2}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)=4\sin^4\frac{t}{2}.$$

所以有

$$I_\rho\left(\sin^4\frac{t}{2},\ 0\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)=o(1-\alpha_{1\rho}),(\rho\to\rho_0).$$

iii) $\Longrightarrow$ iv)　对任何 $\delta>0$ 有

$$\int_\delta^\pi d\mu_\rho(t)\leqslant\frac{1}{\sin^4\frac{\delta}{2}}\int_\delta^\pi\sin^4\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)\leqslant\frac{\pi}{\sin^4\frac{\delta}{2}}I_\rho\left(\sin^4\frac{t}{2},\ 0\right),$$

由 iii) 导出，对每个 $\delta>0$ 有

$$\int_\delta^\pi d\mu_\rho(t)=o(1-\alpha_{1\rho})；\ (\rho\to\rho_0).$$

iv) $\Longrightarrow$ i)。由于对每个 $k\in N$，有

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin^2\frac{kt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}=k^2,$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得当 $|t|<\delta$ 时，有

$$\left|\sin^2\frac{kt}{2}-k^2\sin^2\frac{t}{2}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sin^2\frac{t}{2},$$

从而有

$$\left|(1-\alpha_{k\rho})-k^2(1-\alpha_{1\rho})\right|=\left|\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^2\frac{kt}{2}-k^2\sin^2\frac{t}{2}\right)d\mu_\rho(t)\right|$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\sin^2\frac{kt}{2}-k^2\sin^2\frac{t}{2}\right|d\mu_\rho(t)+(1+k^2)\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}d\mu_\rho(t)$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)+\frac{4(1+k^2)}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}d\mu_\rho(t)$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha_{1\rho})+\frac{4(1+k^2)}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}d\mu_\rho(t),$$

由条件 iv) 和 $\varepsilon>0$ 是任意导出，对每个 $k\in N$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=k^2$$

证毕。

最后我们指出，有一些熟知的正卷积算子族它们相应的 Borel 测度核不适合 Turesky 等价条件，例如 Fejer 核 $\{F_n\}_{n\in N}$ 和Poisson 核 $\{P_r\}_{r\in(0,1)}$，可见对此类正卷积算子建立 Vonproskya渐近表示是不适宜的。

还应说明，§5.1—§5.4中的大部分结果是作者得到的，有的还是第一次出现的。

5.5 Mamedov 渐近表示式

现在讨论逼近度的一般渐近表示，主要是建立正线性算子列的 Mamedov 渐近表示式，为此需要说明如下引理。

引理1.10 设 $\{L_n\}_{n\in N}$是 B(D)上的正线性算子列，若$\varphi(n)\to+\infty$（$n\to+\infty$）使得对 $x\in D$有

$$L_n((t-x)^4,x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)\qquad(n\to\infty),$$

则对每个 $\delta>0$ 和每个$g\in B(D)$有

$$L_n(g(t)\lambda_\delta(t,x),x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)\qquad(n\to+\infty).$$

证明 记$U_x(\delta)=\{t\,|\,t\in D$ 且 $|t-x|<\delta\}$，因为$D/U_x(\delta)$是致密集，所以能够选取足够大的正数M（与 δ，x 有关）使得对$\forall t\in D$ 有

$$M(t-x)^4\geqslant|g(t)|\lambda_\delta(t,x),$$

因此，当$n\to+\infty$时，有

$$|L_n(g(t)\lambda_\delta(t,x),x)|\leqslant L_n(|g(t)|\lambda_\delta(t,x),x)$$

$$\leqslant ML_n((t-x)^4,x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right).$$

证毕。

引理1.11 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是B(D)上的正线性算子列，存在$\varphi(n)\to+\infty$（$n\to+\infty$）使得对 $x\in D$，当 $n\to+\infty$ 时有

$$L_n((t-x)^2,x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right),\tag{5.9}$$

$$L_n((t-x)^4,x)=O_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right).\tag{5.10}$$

若 $\varepsilon(t-x)\in B(D)$ 且 $\varepsilon(t-x)\to 0\ (t\to x)$，则当 $n\to+\infty$ 时有

$$L_n(\varepsilon(t-x)(t-x)^2,\ x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right) \tag{5.11}$$

证明 因为 $\varepsilon(t-x)\to 0\ (t\to x)$，所以对 $\forall \varepsilon_0>0$，$\exists\delta>0$，使得对 $\forall t\in U(x,\delta)=\{t\mid t\in D$ 且 $|t-x|<\delta\}$ 有 $|\varepsilon(t-x)|<\varepsilon_0$。因此对 $\forall t\in D$ 有

$$|\varepsilon(t-x)(t-x)^2|\leqslant \varepsilon_0(t-x)^2+\lambda_\delta(t,x)|\varepsilon(t-x)|(t-x)^2,$$

从而

$$|L_n(\varepsilon(t-x)(t-x)^2,x)|\leqslant\varepsilon_0 L_n((t-x)^2,x)+L_n(\lambda_\delta(t,x)|\varepsilon(t-x)|(t-x)^2,x).$$

由于 $|\varepsilon(t-x)|(t-x)^2\in B(D)$，利用引理1.10和（5.9）及（5.10）导出

$$|L_n(\varepsilon(t-x)(t-x)^2,\ x)\leqslant\varepsilon_0 O_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)+o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right).$$

因为 $\varepsilon_0>0$ 是任意的，所以当 $n\to+\infty$ 时有

$$L_n(\varepsilon(t-x)(t-x)^2,\ x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right).$$

证毕。

定理1.16（Mamedov） 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $B(D)$ 上的正线性算子列，存在 $\varphi(n)\to+\infty$ $(n\to+\infty)$ 使得对 $x\in D$ 和 $n\to+\infty$ 有

i) $L_n(1,\ x)=1+o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$；

ii) $L_n(t^k,x)=x^k+\frac{\Psi_k(x)}{\varphi(n)}+o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$ $(k=1,\ 2)$；

iii) $L_n((t-x)^4,\ x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$.

若 $f\in B(D)$ 在 x 点的某个小邻域内连续可微且 $f''(x)$ 存在，则当 $n\to+\infty$ 时，有

$$L_n(f,\ x)-f(x)=\frac{2f'(x)\Psi_1(x)+f''(x)(\Psi_2(x)-2x\Psi_1(x))}{2\varphi(n)}+o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right) \tag{5.12}$$

证明 由 $f\in B(D)$ 和条件 i) 有

$$L_n(f,\ x)-f(x)=L_n(f(t)-f(x),\ x)+o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right) \tag{5.13}$$

又因为 $f\in B(D)$ 在 x 的某个邻域连续可微且 $f''(x)$ 存在，所以对 $t\in D$ 有

$$f(t)-f(x)=f'(x)(t-x)+\frac{f''(x)}{2}(t-x)^2+\varepsilon(t-x)(t-x)^2,$$

其中 $\varepsilon(t-x)\to 0\ (t\to x)$ 且 $\varepsilon(t-x)\in B(D)$，因此有

$$L_n(f(t)-f(x),\ x)=f'(x)L_n(t-x,\ x)+\frac{f''(x)}{2}L_n((t-x)^2,\ x)+L_n(\varepsilon(t-x)(t-x)^2,\ x) \tag{5.14}$$

由条件 i)，ii) 导出，当 $n\to+\infty$ 时

$$L_n(t-x,\ x)=\frac{\Psi_1(x)}{\varphi(n)}+o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right),$$

$$L_n((t-x)^2, x)=\frac{\Psi_2(x)-2x\Psi_1(x)}{\varphi(n)}+o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right),$$

应用引理1.11有

$$L_n(\varepsilon(t-x)(t-x)^2, x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right) \qquad (n\to+\infty)$$

因而由（5.13），（5.14）导出（5.12），证毕。

例1 设 $\{P_n\}_{n\in N}$ 是 Bernstein-Kantorovich 算子列。若 $f\in B[0, 1]$ 在 $x\in[0, 1]$ 的某个小邻域连续可微且 $f''(x)$ 存在，则当 $n\to+\infty$ 时，有

$$P_n(f, x)-f(x)=\frac{[x(1-x)f'(x)]'}{2(n+1)}+o\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

证明 由于（见§4.3例4），对$n\in N$有

$$P_n(1, x)=1,$$

$$P_n(t, x)=x+\frac{1-2x}{2(n+1)},$$

$$P_n(t^2, x)=x^2+\frac{x(2-3x)}{n+1}+\frac{1-6x+6x^2}{3(n+1)^2},$$

并由引理1.4导出，当 $n\to+\infty$ 有

$$P_n((t-x)^4, x)=o\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

所以取 $\varphi(n)=n+1$，$\Psi_1(x)=\frac{1}{2}(1-2x)$，$\Psi_2(x)=x(2-3x)$，由（5.12导出）

$$P_n(f, x)-f(x)=\frac{(x(1-x))f'(x))'}{2(n+1)}+o\left(\frac{1}{n+1}\right) \qquad (n\to\infty)$$

证毕。

类似于定理1.16的证明，我们可以得到如下定理。

定理1.17 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $B(D)$上的正线性算子列，存在 $\varphi_k(n)\to+\infty$（$k=1, 2$）且 $\frac{1}{\varphi_2(n)}=O\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$ （$n\to+\infty$），使得当 $n\to+\infty$时，对$x\in D$有

i) $L_n(1, x)=1+o_x\left(\frac{1}{\varphi_1(n)}\right)$,

ii) $L_n(t^k, x)=x^k+\frac{\Psi_k(x)}{\varphi_k(n)}+o_x\left(\frac{1}{\varphi_1(n)}\right)$, （$k=1, 2$）。

iii) $L_n((t-x)^4, x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi_1(n)}\right)$,

若 $f\in B(D)$在 x 点的某个邻域内连续可微且 $f''(x)$存在，则当 $n\to+\infty$时，有

$$L_n(f, x)-f(x)=\frac{f'(x)-xf''(x)}{\varphi_1(n)}\Psi_1(x)+o_x\left(\frac{1}{\varphi_1(n)}\right).$$

定理1.18 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $B(D)$上的正线性算子列，存在 $\varphi_k(n)\to+\infty$ 且 $\frac{1}{\varphi_1(n)}=o\left(\frac{1}{\varphi_2(n)}\right)$（$n\to+\infty$），使得当 $n\to\infty$时，对 $x\in D$ 有

i) $L_n(1, x)=1+o_x\left(\frac{1}{\varphi_2(n)}\right)$,

ii) $L_n(t^k, x)=x^k+\frac{\psi_k(x)}{\varphi_k(x)}+o_x\left(\frac{1}{\varphi_2(n)}\right)$ $(k=1, 2)$,

iii) $L_n((t-x)^4, x)=o_x\left(\frac{1}{\varphi_2(n)}\right)$.

若$f\in B(D)$在x点的某个邻域内连续可微且$f''(x)$存在，则当$n\to+\infty$时，有

$$L_n(f, x)-f(x)=\frac{\psi_2(x)f''(x)}{2\varphi_2(n)}+o_x\left(\frac{1}{\varphi_2(n)}\right).$$

作为定理1.18的应用给出修正的Landau算子列的Vonorovskya渐近表示式。

例2 设$\{\widetilde{l}_n\}_{n\in N}$是修正的Landau算子列，若$f\in B\,[0, 1]$在$x\in[0, 1]$点的某个邻域内连续可微且$f''(x)$存在，则当$n\to+\infty$时有

$$l_n(f, x)-f(x)=\frac{(x(1-x))^2}{4n}f''(x)+o_x\left(\frac{1}{n}\right).$$

证明 由于（见§4.3例9），对$x\in[0, 1]$和$n\in N$有

$$\widetilde{l}_n(1, x)=1,\quad \widetilde{l}_n(t, x)=x$$

和

$$\widetilde{l}_n(t^2, x)=x^2+\frac{(x(1-x))^2}{2n+3}$$

$$=x^2+\frac{(x(1-x))^2}{2n}+o_x\left(\frac{1}{n}\right).$$

又因

$$\widetilde{l}_n((t-x)^4, x)=(x(1-x))^4\frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}2\int_0^1 t^4(1-t^2)^n dt$$

$$=\frac{3}{2}\ \frac{(x(1-x))^4}{(2n+3)(2n+5)}=o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad (n\to+\infty);$$

所以取$\varphi_2(n)=n$，$\varphi_1(n)=n^2$和$\psi_2(x)=\frac{(x(1-x))^2}{2}$，$\psi_1(x)\equiv0$，应用定理1.18导出所求的渐近表示式，证毕。

应当指出，从定理1.16的证明中可见，若$f\in C^2(D)$，则渐近表示式（5.12）在D上是一致成立的，同样地，这个断言对定理1.17和定理1.18也是正确的。

现在讨论定理1.16中条件（5.10）的等价条件，类似于定理1.15的Turesky等价条件，我们给出如下Mamedov等价条件。

定理1.19（Mamedov等价条件） 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C\,[a, b]$上的正线性算子列，记

$$\mu_n(x)=\frac{1}{2}L_n((t-x)^2, x)$$

且对每个$x\in[a, b]$，当$n\to+\infty$时有

$$L_n(1, x)=1+o_x(\mu_n(x)),$$

$$L_n(t, x)=x+o_x(\mu_n(x)),$$

则如下条件是等价的：

i) 对每个$f\in C\,[a, b]$且在$x\in[a, b]$的某个邻域内二次连续可微，有

$$L_n(f, x)-f(x)=f''(x)\mu_n(x)+o_x(\mu_n(x)) \quad (n\to+\infty);$$

ii) $L_n((t-x)^4, x)=o_x(\mu_n(x)), \quad (n\to+\infty)$.

iii) 对每个 $f\in C[a, b]$ 和每个 $\delta>0$，有

$$L_n(f(t)\lambda_\delta(t, x), x)=o_x(\mu_n(x)) \quad (n\to+\infty).$$

证明　因为 $f(t)=(t-x)^4\in C^2[a,b]$ 且 $f''(x)=0$，所以由 i) $\Longrightarrow$ ii) 是明显的。而 ii) $\Longrightarrow$ iii) 是引理 1.10的断言，最后只要取 $\varphi_1(x)\equiv0$，$\mu_n(x)=\dfrac{\varphi_2(x)}{\omega(n)}$，则 iii) $\Longrightarrow$ i) 仍是定理1.16的特例，证毕。

第二章 逼近度估计

§1· 光滑模与K—泛函

1.1 光滑模

设$D=[a,b]$，$D_{rh}=[a,b-rh]$ $(h>0,\ r\in N)$·若$x\in D_{rh}$，记$\Delta_h(f,x)=f(x+h)-f(x)$，$\Delta_h^r(f,x)=\Delta_h(\Delta_h^{r-1})(f,x)$，即

$$\Delta_h^r(f,x)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}f(x+jh) \tag{1.1}$$

称它为f在x点的r阶向前差分。若$f\in X_p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，有

$$\|\Delta_h^r(f)\|_{X_p(D_{rh})}\leqslant 2^r\|f\|_{X_p(D)}. \tag{1.2}$$

若$f\in L_1^r(D)$，则有

$$\Delta_h^r(f,x)=\int_0^h\int_0^h\int_0^h\cdots f^{(r)}(x+u_1+u_2+\cdots+u_r)\,du_1du_2\cdots du_r$$

或

$$\Delta_h^r(f,x)=h^r\int_0^{rh}\frac{N_r\left(\frac{u}{h}\right)}{h}f^{(r)}(x+u)\,du$$

其中$N_r(t)$是Peano核，即

$$\int_0^r N_r(t)dt=1$$

且有$0\leqslant N_r(t)\leqslant 1$和$\|N_r\|_{L_p[0,r]}\leqslant 1$ $(1\leqslant p<+\infty)$. 可见若$f\in X_p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$有

$$\|\Delta_h^r(f)\|_{X_p(D_{rh})}\leqslant h^r\|f^{(r)}\|_{X_p(D)} \tag{1.3}$$

特别当$f\in C^r(D)$时，由积分中值定理存在$\theta\in[x,x+rh]$使得

$$\Delta_h^r(f,x)=h^rf^{(r)}(\theta)$$

现在设$f\in X_p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，对$r\in N$，$0<t\leqslant\frac{b-a}{r}$，记

$$\omega_r(f,t)_p=\omega_r(f,t)_{X_p}=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_h^r(f)\|_{X_p(D_{rh})}$$并称为X_p上的r阶光滑模，特别当$r=1$时，通称$\omega_1(f,t)_p$为X_p上的连续模，下文约定记$\omega_1(f,t)_p=\omega(f,t)_p$，$\omega_r(f,t)_\infty=\omega_r(f,t)$及$\omega_0(f,t)_p=\|f\|_{X_p}$

由X_p上的连续模的定义，不难得到r阶光滑模的如下性质：

i）对每个$f\in X_p(D)$（$1\leqslant p\leqslant\infty$）有$\omega_r(f,0^+)_p=0$，即$\omega_r(f,t)_p\to 0\quad(t\to 0^+)$

ii）单增性，即当$0<t_1<t_2$时，有$\omega_r(f,t_1)_p\leqslant\omega_r(f,t_2)_p$

iii）对$k\in N$，有

$$\omega_r(f,kt)_p\leqslant k^r\omega_r(f,t)_p$$

从而对$\forall\lambda>0$有

$$\omega_r(f,\lambda t)_p\leqslant(1+\lambda)^r\omega_r(f,t)_p \tag{1,4}$$

iv）对每个$f\in X_p(D)$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）和$1\leqslant j\leqslant r$有

$$\omega_r(f,t)_p\leqslant 2^j\omega_{r-j}(f,t)_p \tag{1,5}$$

特别当$j=r$时有$\omega_r(f,t)_p\leqslant 2^r\|f\|_p$

证明　由r阶向前差分的定义有

$$\triangle_h^r(f,x)=\triangle_h^j(\triangle_h^{r-j})(f,x)$$

由（1,2）导出

$$\|\triangle_h^r(f)\|_{X_p(D_{rh})}\leqslant 2^j\|\triangle_h^{r-j}(f)\|_{X_p(D_{(r-j)h})}$$

再由r阶光滑模定义得到（1,5）证毕。

利用（1,3）类似地可得

v）对每个$f\in X_p^j(D)$（$1\leqslant j\leqslant r$）有

$$\omega_r(f,t)_p\leqslant t^j\omega_{r-j}(f^{(j)},t)_p \tag{1,6}$$

在应用中我们需要如下引理，设$y=\alpha x+\beta$将$D=(a,b)$映为$D_1=(c,d)$，而$x=\gamma y+\delta(\gamma=\alpha^{-1})$为它的逆映照，不难证明

引理2.1设　$f\in X_p(D)$（$1\leqslant p\leqslant\infty$），则$F(y)=f(\gamma y+\delta)\in X_p(D_1)$，且对$t\in\left(0,\frac{d-c}{r}\right)$有

$$\omega_r(F,t)_{X_p(D_1)}=\alpha^{\frac{1}{p}}\omega_r(f,\alpha^{-1}t)_{X_p(D)} \tag{1,7}$$

由（1,5）和（1,6）可见，高阶光滑模可以由低阶光滑模控制，Marchaud建立了用高阶光滑模估计低阶光滑模的不等式，即

引理2.2（Marchaud不等式）　设$r\in N$，$1\leqslant p\leqslant+\infty$，$D=(a,b)$，我们有

i）存在仅依赖于r，p和D的正常数M和δ，使得对每个$f\in X_p(D)$和$t\in(0,\delta)$有

$$\omega_j(f,t)_p\leqslant Mt^j\left(\|f\|_p+\int_t^\delta u^{-1-j}\omega_r(f,u)_p du\right) \tag{1,8}$$

其中$j=1,2,\cdots r-1$。

ii）若对某个$\delta>0$

$$\int_0^\delta u^{-1-j}\omega_r(f,u)_p du<+\infty \tag{1,9}$$

则$f\in X_p^r(D)$且对$t\in(0,\delta)$有

$$\omega_{r-1}(f^{(1)},t)_p\leqslant M\int_0^t u^{-1-1}\omega_r(f,u)_p du \qquad (1,10)$$

由引理2.2中ii）断定，若r阶光滑模$\omega_r(f,u)_p du$关于u以足够快的速度趋于零时，f具有足够的光滑性，引理的证明留在§1.3。

为下文研究需要，引入如下光滑函数类，设r是非负整数，$0<\alpha\leqslant1$，记

$$W_{p,\alpha}^r(K)=\{f|f\in L_p(D)\text{且}\omega_{r+1}(f,t)_p\leqslant(r+1)Kt^{r+\alpha}\}$$

$$W_{p,\alpha}^r=\bigcup_{K>0}W_{p,\alpha}^r(K)=\{f|f\in L_p(D)\text{且}\omega_{r+1}(f,t)_p=O(t^{r+\alpha})\}$$

其中$1\leqslant p<+\infty$，特别约定$W_{p,\alpha}=W_{p,\alpha}^0$，$W_p^r=W_{p,1}^r$。又记

$$Lip_K^r\alpha=\{f|f\in C(D)\text{且}\omega_{r+1}(f,t)\leqslant(r+1)Kt^{r+\alpha}\},$$

$$Lip^r\alpha=\bigcup_{k>0}Lip_k^r\alpha=\{f|f\in C(D)\text{且}\omega_{r+1}(f,t)=O(t^{r+\alpha})\}$$

特别约定 $Lip\alpha=Lip^0\alpha$，$Lip^r\alpha=Lip^1\alpha$，再令

$$X_{p,\alpha}^r(K)=\begin{cases}W_{p,\alpha}^r(K) & 1\leqslant p<+\infty\\ Lip_K^r\alpha & p=\infty\end{cases}\quad\text{和}\quad X_{p,\alpha}^r=\bigcup_{k>0}X_{p,\alpha}^r(k)\quad(1\leqslant p\leqslant+\infty)$$

由引理2.2导出

$$X_p^{r+1}(D)\subseteq X_{p,\alpha}^r\subseteq X_p^r(D)\qquad(1\leqslant p\leqslant+\infty)$$

此外还有如下结果

引理2.3 设$0<\alpha<1$，r是非负整数，则有

$$X_{p,\alpha}^r=\{f|f\in X_p^r(D)\text{且}f^{(r)}\in X_{p,\alpha}\}$$

证明 设$f\in X_p^r(D)$且$f^{(r)}\in X_{p,\alpha}$，即$\omega_1(f^{(r)},t)_p=O(t^\alpha)$ 由（1,6）导出

$$\omega_{r+1}(f,t)_p\leqslant t^r\omega_1(f^{(r)},t)_p=O(t^{\alpha+r}),\quad\text{即}f\in X_{p,\alpha}^r.$$

反之，若$f\in X_{p,\alpha}^r$，则对$\delta>0$有 $\int_0^\delta u^{-(r+1)}\omega_{r+1}(f,u)_p du<+\infty$

由引理2.2中ii），断定$f\in X_p^r(D)$且对$t\in(0,\delta)$有

$$\omega_1(f^{(r)},t)_p<C_1\int_0^t u^{-(r+1)}u^{r+\alpha}du=O(t^\alpha),\text{即}f^{(r)}\in X_{p,\alpha}\text{证毕。}$$

1.2 K——泛函

设X是线性赋范空间，范数用$\|\cdot\|_X$，表示U是X中的稠密子空间，且具有半范$|\cdot|_U$，对每个$f\in X$和$t>0$，记

$$K_U(f, t)_X = \inf_{g\in U}\{\|f-g\|_X + t|g|_U\} \qquad (1,11)$$

称它为X上的K—泛函，由（1.11）可见，K—泛函是度量用U中元素逼近 $f\in X$ 的逼近程度，它是J.Peetre首先引进的，明显地$K_U(f, t)$是X上的非线性泛函。

由K—泛函的定义直接可导出如下性质。

i）对$f_1, f_2\in X$，和$t>0$有$K_U(f_1+f_2, t)_X \leqslant K_U(f_1, t)_X + K_U(f_2, t)_X$，

ii）对每个$f\in X$，有$K_U(f, t)_X\to 0 \quad (t\to 0^+)$

iii)对$0<t_1\leqslant t_2$，有$K_U(f, t_1)_X \leqslant K_U(f, t_2)_X$

iv)对每个$f\in X$，有$K_U(f, t)_X \leqslant \|f\|_X$ (1,12)

而对$g\in U$，有$K_U(g, t)_X \leqslant t|g|_U$ (1,13)

对于X，U的各种不同选取，产生了各种不同形式的K—泛函，例如

例1 设$X=X_p(D)$，$U=X_p^r(D)$（$1\leqslant p\leqslant +\infty$，$r\in N$），规定$f\in X_p(D)$的范数为$\|f\|_p$，$g\in X_p^r(D)$的半范为$|g|_r = \|g^{(r)}\|_p$，则

$$K_r(f, t)_p = \inf_{g\in X_p^r}\{\|f-g\|_p + t^r|g|_r\}$$

为$X_p(D)$上的K—泛函。

例2 设$X=X_p(D)$，$U=X_p^r(D)$（$1\leqslant p\leqslant +\infty$，$r\in N$），规定$f\in X_p(D)$的范数为$\|f\|_p$，$g\in X_p^r(D)$的范数为$\|g\|_{p,r} = \|g\| + |g|_r$，则

$$\widetilde{K}_r(f, t)_p = \inf_{g\in X_p^r(D)}\{\|f-g\|_p + t^r\|g\|_{p,r}\}$$

也是$X_p(D)$上的K—泛函。

更一般地我们引入X上的双参数K—泛函：对每个$f\in X$和$t_1, t>0$，记

$$\widetilde{K}_U(f, t, t_1)_X = \inf_{g\in U}\{\|f-g\|_X + t|g|_U + t_1\|g\|_X\},$$

若$t_1=t$，则记$\widetilde{K}_U(f, t)_X = \widetilde{K}_U(f, t, t)_X$

X空间的两个K—泛函$K_U(f, t)_X$和$\widetilde{K}_U(f, t, t_1)_X$有如下弱等价关系。

引理2.4，对每个$f\in X$和$t, t_1>0$有

$$\tfrac{1}{2}\left(\min(1, t_1)\|f\|_X + K_U(f, t)\right)_X \leqslant \widetilde{K}_U(f, t, t_1)_X \leqslant \min(1, t_1)\|f\|_X$$

$$+(1+t_1)\chi_{(0,1)}(t_1)K_U\left(f, \frac{t}{1+t_1}\right)_X \qquad (1,14)$$

其中$\chi_{(0,1)}$是〔0，1〕上的特征函数，因而有

$$\widetilde{K}_U(f, t, t_1)_X \asymp \min(1, t_1)\|f\|_X + K_U(f, t)_X$$

证明　由(1.12)对$f\in X$和$t,\ t_1>0$有$\widetilde{K}_U(f,\ t,\ t_1)_X\leqslant\|f\|_X$，又对$\forall g\in U$有

显然$\widetilde{K}_U(f,\ t,\ t_1)_X\leqslant\|f-g\|_X+t|g|_U+t_1\|g\|_X\leqslant(1+t_1)\|f-g\|_U+t|g|_X+t_1\|f\|_X$

于是对$t,\ t_1>0$和$\forall g\in U$有

$$\widetilde{K}_U(f,\ t,\ t_1)_X\leqslant\min(1,t_1)\|f\|_X+(1+t_1)\chi_{(0,1)}(t_1)\Big(\|f-g\|_X+\frac{t}{1+t_1}|g|_U\Big)$$

所以有

$$\widetilde{K}_U(f,t,t_1)_X\leqslant\min(1,t_1)\|f\|_X+(1+t_1)\chi_{(0,1)}(t_1)K_U(f,t)_X\leqslant 2(K_U(f,t)_X+\min(1,t_1)\|f\|_X)$$

另一方面，由于$\|g\|_X\geqslant\|f\|_X-\|f-g\|_X$，所以当$0<t_1\leqslant 1$时有

$$K_U(f,\ t)_X\leqslant\|f-g\|_X+t|g|_U+t_1\|g\|_X-t_1\|g\|_X\leqslant(1+t_1)\|f-g\|_X+t|g|_U+t_1\|g\|_X$$
$$-t_1\|f\|_X\leqslant 2\|f-g\|_X+t|g|_U-t_1\|f\|_X$$

而当$t_1\geqslant 1$时，有

$$K_U(f,\ t)_X\leqslant\|f-g\|_X+t|g|_U+t_1\|g\|_X-t_1\|g\|_X\leqslant\|f-g\|_X+t|g|_U+t_1\|g\|_X-\|g\|_X$$
$$\leqslant 2\|f-g\|_X+t|g|_U+t_1\|g\|_X-\|f\|_X$$

因此对$t,\ t_1>0$有

$$K_U(f,\ t)_X+\min(1,\ t_1)\|f\|_X\leqslant 2\widetilde{K}_U(f,\ t,\ t_1)_X.$$

特别地由（1.14）得到

推论2.1　设$r\in N$，则每对个$f\in X_p(D)$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）和$t>0$有

$$\widetilde{K}_r(f,\ t)_p\asymp\min(1,\ t^r)\|f\|_p+K_r(f,\ t)_p \qquad (1.15)$$

现在设U是X中的稠密子空间，U_0是U中稠密线性集，其元素的半范分别为$|\cdot|_U$和$|\cdot|_{U_0}$对每对$t_1,\ t_2>0$和每个$g\in U$，记

$$\widetilde{K}_{U_0}(g,\ t_1,\ t_2)_U=\inf_{g_0\in U_0}\{|g-g_0|_U+t_1|g_0|_{U_0}+t_2|g_0|_U\}$$

易见，对每对确定的$t_1,\ t_2>0$，$K_{U_0}(g,\ t_1,\ t_2)_U$是U上的半范且对$\forall t_1,\ t_2>0$有

$$\widetilde{K}_{U_0}(g,\ t_1,\ t)_U\leqslant|g|_U \qquad (1.16)$$

利用这个特殊的半范，我们引入X上含有三个参数的K—泛函：对每个$f\in X$和t、t_1、t_2，记

$$K_U^*(f,\ t,\ t_1,\ t_2)_X=\inf_{g\in U}\{\|f-g\|_X+t\widetilde{K}_{U_0}(g,\ t_1,\ t_2)_U\}$$

由(1.16)可见，对$\forall t,\ t_1,\ t_2>0$有

$$K_U^*(f,\ t,\ t_1,\ t_2)_X\leqslant K_U(f,\ t)_X \qquad (1.17)$$

特别地，取$X=X_p(D)$，$U=X_p^r(D)$和$U_0=X_p^{r+l}(D)$($1\leqslant p\leqslant+\infty$，$t$，$p\in N$)，则对每个$f\in X$和$t,\ t_1,\ t_2>0$有

$$K_r^*(f,\ t,\ t_1,\ t_2)_p=\inf_{g\in X_p^{r+l}}\Big\{\|f-g\|_p+t\widetilde{K}_l(g,\ t_1,\ t_2)_{X_p^r}\Big\}$$

其中

$$\widetilde{K}_r(g, t_1, t_2)_{X_p^r}=\inf_{g\in X_p^{r+s}}\left\{\|g^{(r)}-g_0^{(r)}\|_p+t_1\|g_0^{(r+s)}\|_p+t_2\|g_0^{(r)}\|_p\right\}$$

关于X、U及其范数的各种特殊选取，将在下文中陆续讨论，最后引入集合

$$\Omega_\alpha=\{f\,|\,f\in X\text{且}K_U(f, t)_X=O(t^\alpha),\ t\to 0^+\}$$

其中$\alpha>0$并称它为X上的α阶光滑类。

1.8 $X_p(D)$上光滑模与K—泛函的弱等价定理

为建立$X_p(D)(1\leqslant p\leqslant +\infty)$上光滑模$\omega_r(f, t)_p$与K—泛函$K_r(t, t)_p$的弱等价关系，需要如下引理(证明参见L.L.Schurmaker〔1〕)

引理2.5(导数间插补不等式) 设$D=〔a, b〕$，$r\in N$，则存在仅依赖于r和D的正常数$C_{rj}(1\leqslant j\leqslant r-1)$使得对每个$f\in X_p^r(D)$和$\varepsilon\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$有

$$\|f^{(j)}\|_p\leqslant C_{rj}(\varepsilon^{-j}\|f\|_p+\varepsilon^{r-j}\|f^{(r)}\|_p) \qquad (1,18)$$

引理2.6 设$J=〔c,d〕$，$\widetilde{J}=〔c, d+r^2t〕$，其中$t>0$，$r\in N$，则对每个$f\in X_p(\widetilde{J})$ $(1\leqslant p\leqslant +\infty)$，存在$g\in X_p^{(r)}(\widetilde{J})$使得

$$\|f-g\|_{X_p(J)}\leqslant\int_0^t\|\Delta_{iu}^r(f)\|_{X_p(J)}du\leqslant r^{r+1}\omega_r(f, t)_{X_p(\widetilde{J})} \qquad (1,19)$$

和

$$\begin{aligned}t^r\|g^{(r)}\|_{X_p(J)}&\leqslant(2^r-1)\max_{1\leqslant i\leqslant r}\|\Delta_{it}^r(f)\|_{X_p(J)}\\&\leqslant r^r(2^r-1)\omega_r(f, t)_{X_p(\widetilde{J})}\end{aligned} \qquad (1,20)$$

类似地，若$\widetilde{J}=〔c-r^2t, d〕$，只需将$\Delta_{iu}^r$和$\Delta_{it}^r$分别改为$\Delta_{-iu}^r$和$\Delta_{-it}^r$，(1,19)和(1,20)仍然成立。

证明 对$f\in X_p(\widetilde{J})$作Steklov平均：

$$g(x)=\int_0^{rt}\left(f(x)+(-1)^{r+1}\Delta_u^r(f, x)\right)\frac{N_r\left(\frac{u}{t}\right)}{t}du$$

$$=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}\binom{r}{j}\int_0^{rt}f(x+ju)\frac{N_r\left(\frac{u}{t}\right)}{t}du$$

其中$N_r(t)$是Peano核，设$F\in X_p^r(\widetilde{J})$使得$F^{(r)}(x)=f(x)(a, e)$，则对$1\leqslant j\leqslant r$有

$$\int_0^{rt}f(x+ju)\frac{N_r\left(\frac{u}{t}\right)}{t}du=\int_0^{jrt}f(x+u)\frac{N_r\left(\frac{u}{jt}\right)}{jt}du$$

$$=\int_0^{rt}F^{(r)}(x+u)\frac{N_r\left(\frac{u}{jt}\right)}{jt}du=(jt)^{-r}\Delta_{jt}^r(F,x)$$

因此有

$$g(x)=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+r}\binom{r}{j}(jt)^{-r}\Delta_{jt}^r(F,x) \qquad (1,21)$$

由(1，21)可见 $g\in X_p^r(J)$，注意到peano核 $N_r(t)$ 的性质导出。

$$\|f-g\|_{X_p(J)}\leq\int_0^r\|\Delta_{tu}^r(f)\|_{X_p(J)}N_r(u)du\leq\int_0^r\|\Delta_{tu}^r(f)\|_{X_p(J)}du$$

$$\leq r\sup_{0<h\leq t}\|\Delta_h^r(f)\|_{X_p(J)}=r\omega_r(f,rt)_{X_p}(\tilde{J})\leq r^{r+1}\omega_r(f,t)_{X_p}(\tilde{J})$$

其次，由(1，21)对g微分r次得到

$$g^{(r)}(x)=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\binom{r}{i}(it)^{-r}\Delta_{it}^r(F^{(r)},x)$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}\binom{r}{i}(it)^{-r}\Delta_{it}^r(f,x)$$

由于 $\sum_{i=1}^{r}\binom{r}{i}=2^r-1$ 和

$$\max_{1\leq i\leq r}\|\Delta_{it}^r(f)\|_{X_p(J)}\leq r^r\omega_r(f,t)_{X_p}(\tilde{J})$$

所以有

$$t^r\|g^{(r)}\|_{X_p(J)}\leq(2^r-1)r^r\omega_r(f,t)_{X_p}(\tilde{J}).$$

定理2.1(Peetre—Johnen) 设 $r\in N$，$D=[a,b]$，存在仅依赖于r，p和D的正常数 C_1 和 C_2 使得对每个 $f\in X_p(D)$ $(1\leq p\leq+\infty)$ 和 $t>0$ 有

$$C_1\omega_r(f,t)_p<K_r(f,t)_p\leq C_2\omega_r(f,t)_p \qquad (1.22)$$

证明 由差分性质，对 $\forall g\in X_p^r(D)$ 有

$$\|\Delta_h^r(f)\|_{X_p(D_{rh})}\leq\|\Delta_h^r(f-g)\|_{X_p(D_{rh})}+\|\Delta_h^r(g)\|_{X_p(D_{rh})}$$

$$\leq 2^r\|f-g\|_{X_p(D_{rh})}+h^r\|g^{(r)}\|_{X_p(D_{rh})}$$

$$\leq 2^r(\|f-g\|_{X_p(D)}+h^r\|g^{(r)}\|_{X_p(D)})$$

其中 $D_{rh}=[a,b-rh]$ $(h>0)$，关于 $g\in X_p^r(D)$ 取下确界得到

$$\|\Delta_h^r(f)\|_{X_p(D_{rh})}\leq 2^rK_r(f,h),$$

从而得

$$\omega_r(f, t)_p \leqslant 2^r K_r(f, t),$$

因此只要取$C_1=2^{-r}$得到（1．22）的左端不等式。

现在证明（1，22）的右端不等式，设$\eta_i=a+i\frac{b-a}{3}$（$i=0, 1, 2, 3$）并令$J_1=[\eta_0, \eta_2]$，$J_2=[\eta_1, \eta_3]$ 和$J_3=[\eta_1, \eta_2]$，又设 $g_j \in X_p^r$（$j=1,2$）且适合（1，19）和（1，20），我们根据g_1和g_2构造函数$g\in X_p^r(D)$，为此取$\Psi\in L_\infty^r(D)$使得对$t\in D$有$0\leqslant\Psi(t)\leqslant 1$且

$$\Psi(t)=\begin{cases}0 & t\in[\eta_0, \eta_1]\\ 1 & t\in[\eta_2, \eta_3]\end{cases}$$

和

$$\|\Psi^{(i)}\|_{L_\infty(D)}\leqslant C_\infty<+\infty \quad (i=0, 1, 2, \cdots r).$$

令

$$g=(1-\Psi)g_1+\Psi g_2=g_1+\Psi(g_2-g_1)$$

则$g\in X_p^r(D)$。由（1．19）得到

$$\|f-g\|_{X_p(D)}\leqslant\|f-g_1\|_{X_p(J_1)}+\|f-g_2\|_{X_p(J_2)}\leqslant 2r^{r+1}\omega_r(f, t)_{X_p(D)} \qquad (1.23)$$

利用Leibniz法则和引理2．5得到

$$\begin{aligned}\|g^{(r)}\|_{X_p(J_3)}&\leqslant C_3\left(\|g_1^{(r)}\|_{X_p(J_3)}+\max_{0\leqslant i\leqslant r}\|g_2^{(i)}-g_1^{(i)}\|_{X_p(J_3)}\right)\\&\leqslant C_4\left(2\|g_1^{(r)}\|_{X_p(J_3)}+\|g_2^{(r)}\|_{X_p(J_3)}+\|g_2-g_1\|_{X_p(J_3)}\right)\\&\leqslant C_5\left(\|g_1^{(r)}\|_{X_p(J_3)}+\|g_2^{(r)}\|_{X_p(J_3)}+\max_{i=1,2}\|f-g_i\|_{X_p(J_3)}\right)\end{aligned}$$

由于$J_3\subseteq J_1$，$J_3\subseteq J_2$，所以有

$$\|g^{(r)}\|_{X_p(J_3)}\leqslant C_6\left(\|g_1^{(r)}\|_{X_p(J_1)}+\|g_2^{(r)}\|_{X_p(J_2)}+\max_{i=1,2}\|f-g_i\|_{X_p(J_i)}\right) \quad (i=1, 2)$$

又因为$t\in J_1$时$g(t)=g_1(t)$，而$t\in J_2$时，$g(t)=g_2(t)$，所以对$i=1, 2, 3$有

$$\|g^{(r)}\|_{X_p(J_i)}\leqslant C_6\left(\|g_1^{(r)}\|_{X_p(J_1)}+\|g_2^{(r)}\|_{X_p(J_2)}+\max_{i=1,2}\|f-g_i\|_{X_p(J_i)}\right)$$

因此得到

$$\|g^{(r)}\|_{X_p(D)}\leqslant C_6\max_{i=1,2}\left(\|f-g_i\|_{X_p(J_i)}+\|g_i^{(r)}\|_{X_p(J_i)}\right)$$

由（1，19）和（1，20），当$r^2t\leqslant\frac{b-a}{3}$时，有

$$t^r\|g^{(r)}\|_{X_p(D)}\leqslant C_7\omega_r(f, t)_{X_p(D)} \qquad (1.24)$$

因此，当$0<t<\frac{b-a}{3r^2}$时，由（1，23），（1，24）得到

$$K_r(f, t)_p \leqslant \|f-g\|_{X_p(D)} + t^r \|g^{(r)}\|_{X_p(D)} \leqslant C_2 \omega_r(f, t)_p$$

其中C_2是仅依赖于r，P及D的正常数，证毕。

由定理2.1和推论2.1得到

推论2.2 设$r \in N$，则对每个$f \in X_p(D)$（$1 \leqslant p \leqslant +\infty$）和$t>0$有

$$\widetilde{K}r(f, t)_p \asymp \min(1, t^r)\|f\| + \omega_r(f, t)_p \qquad (1.25)$$

应用定理2.1要证明光滑模的Marchaud不等式（即引理2.2），只需证明$X_p(D)$上的K—泛函成立Marchaud不等式。

定理2.2（Marchaud） 设$0<t\leqslant 1$，则对每个$f \in X_p(D)$（$1 \leqslant p \leqslant +\infty$）和$j$（$1 \leqslant j \leqslant r-1$）有

$$K_j(f, t)_p \leqslant Ct^j\left(\|f\|_p + \int_t^1 s^{-1-j} K_r(f, s)_p ds\right) \qquad (1.26)$$

其中C是仅依赖于j，r和D的正常数。

证明　设$f \in X_p(D)$（$1 \leqslant p \leqslant +\infty$），对每个$h>0$存在$g_h \in X_p^r(D)$使得

$$\|f-g_h\|_p + h^r \|g_h^{(r)}\|_p \leqslant 2K_r(f, h)_p \qquad (1.27)$$

对给定的$t \in (0, 1)$，选取n使得$\frac{1}{2} < 2^n t < 1$，令$\varphi_k = g_{2^k t}$，则

$$g_t = \varphi_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(\varphi_k - \varphi_{k+1}) + \varphi_n$$

固定j（$1 \leqslant j \leqslant r-1$）。对上式求j次导数，并应用导数间插补不等式得到

$$t^j \|g_t^{(j)}\|_p \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-jk}\left(\|\varphi_k - \varphi_{k+1}\|_p + (2^k t)^r \|\varphi_k^{(r)} - \varphi_{k+1}^{(r)}\|_p\right)$$

$$+2^{-nj}\left(\|\varphi_n\|_p + (2^n t)^r \|\varphi_n^{(r)}\|_p\right)$$

$$\leqslant C_2 \sum_{k=0}^{n} 2^{-jk}\left(\|f-\varphi_k\|_p + (2^k t)^r \|\varphi_k^{(r)}\|_p\right) + 2^{-nj}\|f\|_p$$

$$\leqslant C_3 \sum_{k=0}^{n} 2^{-jk} K_r(f, 2^k t)_p + 2^{-nj}\|f\|_p$$

由于$\|f-g_t\|_p \leqslant 2K_r(f, t)_p$，所以

$$K_j(f, t)_p \leqslant \|f-g_t\|_p + t^j \|g_t^{(j)}\|_p$$

$$\leqslant C_4\left[2^{-nj}\|f\|_p + t^j \sum_{k=0}^{n}(2^k t)^{-j} K_r(f, 2^k t)_p\right]$$

$$\leqslant C_5\left(2^{-nj}\|f\|_p + t^j \int_{\frac{t}{2}}^{2^n t} s^{-1-j} K_r(f, s)_p ds\right)$$

$$\leqslant C_6 t^j\left(\|f\|_p + \int_{\frac{t}{2}}^{1} s^{-1-j} K_r(f, s)_p ds\right)$$

注意到

$$\int_{\frac{t}{2}}^{1} s^{-1-j}K_r(f, s)_p ds \leqslant 2^j \int_t^2 s^{-1-j} K_r\left(f, \frac{s}{2}\right)_p ds$$

$$\leqslant 2^j \int_t^2 s^{-1-j}K_r(f, s)_p ds$$

$$\leqslant 2^j\left(\int_t^1 s^{-1-j}K_r(f, s)_p ds + \|f\|_p\right)$$

从而得到，对 $j\ (1\leqslant j\leqslant r-1)$ 有

$$K_j(f, t)_p \leqslant Ct^j\left(\|f\|_p + \int_t^1 s^{-1-j}K_r(f, s)_p ds\right)$$

定理2．3（Marchaud） 设 $r\in N$，若 $f\in X_p(D)$ $(1\leqslant p\leqslant +\infty)$ 使得对某个 $j\ (1\leqslant j\leqslant r-1)$ 有

$$\int_0^1 s^{-1-j}K_r(f, s)_p ds < +\infty \qquad (1．28)$$

则 $f\in X_p^j(D)$，且

$$\|f^{(j)}\|_p \leqslant C_1\left(\|f\|_p + \int_0^1 s^{-1-j}K_r(f, s)_p ds\right) \qquad (1．30)$$

其中 C_1 是仅依赖于 j，r，p 和 D 的正常数。

证明　设 $f\in X_p(D)$，而 $g_k\in X_p^r(D)$ 使得

$$\|f-g_k\|_p + h^r\|g_k^{(r)}\|_p \leqslant 2K_r(f, h)_p$$

与定理2．2的证明类似可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k^{(j)} - \varphi_{k+1}^{(j)}\|_p \leqslant C_t \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k}t)^{-j}K_r(f, 2^{-k-1}t)_p$$

$$\leqslant C_2 \int_0^t s^{-1-j}K_r(f, s)_p ds$$

特别取 $t=1$，由（1，28）导出

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k^{(j)} - \varphi_{k+1}^{(j)}\|_p \leqslant C_2 \int_0^1 s^{-1-j}K_r(f, s)_p ds < +\infty$$

可见级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_k - \varphi_{k+1})$ 在 $X_p^j(D)$ 内收敛。即 φ_k 在 $X_p^j(D)$ 内有极限元。由 φ_k 的选取可知

$$\|f-\varphi_k\|_p \leqslant 2K_r(f, 2^{-k}t)_p$$

注意 $K_r(f, t)_p$ 是 t 的单调不减函数和条件（1．28）导出

$$\lim_{k\to+\infty} K_r(f, 2^{-k}t)_p = 0$$

从而有

$$\|f-\varphi_k\|_p \longrightarrow 0 \qquad (k\longrightarrow +\infty)$$

因此得到$f\in X_p^j(D)$ $(1\leqslant j\leqslant r-1)$.

其次证明(1.29),由于

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|\varphi_k^{(j)}-\varphi_{k+1}^{(j)}\|_p\leqslant C_4\sum_{k=0}^{\infty}2^{kj}K_r(f,2^{-(k+1)})_p\leqslant C_3\int_0^1 s^{-1-j}K_r(f,s)_p ds$$

和$\|\varphi_k-f\|_p\longrightarrow 0$ $(k\to+\infty)$,所以对$1\leqslant j\leqslant r-1$有

$$\|g^{(j)}\|_p\leqslant\|\varphi_0^{(j)}\|_p+C_3\int_0^1 s^{-1-j}K_r(f,s)_p ds$$

$$=\|g_1^{(j)}\|_p+C_3\int_0^1 s^{-1-j}K_r(f,s)_p ds$$

由$K_r(f,t)_p$的单调性和g_1的选取,有

$$\|g_1^{(r)}\|_p\leqslant 2K_r(f,1)_p\leqslant 2\|f\|_p,$$

$$\|f-g_1\|_p\leqslant 2\|f\|_p.$$

于是由导数间插补不等式得到

$$\|g_1^{(j)}\|_p\leqslant C(\|g_1\|_p+\|g_1^{(r)}\|_p)\leqslant C(\|f-g_1\|_p+\|f\|_p+\|g_1^{(r)}\|_p)$$

$$\leqslant C\|f\|_p$$

因此得到(1.29).

最后证明(1.30),注意到

$$K_{r-j}(f^{(j)},t)_p\leqslant\|f^{(j)}-\varphi_t^{(j)}\|_p+t^{r-j}\|(g_t^{(j)})^{(r-j)}\|_p$$

$$\leqslant\|f^{(j)}-g_t^{(j)}\|_p+t^{r-j}\|g_t^{(r)}\|_p$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|\varphi_k^{(j)}-\varphi_{k+1}^{(j)}\|_p+t^{r-j}\|g_t^{(r)}\|_p$$

$$\leqslant C_3\left(\int_0^t s^{-1-j}K_r(f,s)_p ds+t^{-j}K_r(f,t)_p\right).$$

1.4 C空间K—泛函的上界估计

用$K_r(f,t)$表示$C(D)$ $(D=[a,b]$, $r\in N)$上的K—泛函,约定$\|\cdot\|_{C(D)}=\|\cdot\|$定理2.1指出对每个$f\in C(D)$和$0<t<b-a$有

$$2^{-r}\omega_r(f,t)\leqslant K_r(f,t)\leqslant C_2(r)\omega_r(f,t)$$

其中$C_2(r)$是仅依赖于r、D的正常数,在逼近度量化估计中$C_2(r)$的显式表示是重要的,本节论论$r=1$、2的情况。

首先设$\omega(t)$是$[0,\infty)$上连续函数且$\omega(0^+)=0$,若对$\forall 0<t_1<t_2$有

$$0\leqslant\omega(t_2)-\omega(t_1)\leqslant\omega(t_2-t_1)$$

则说$\omega(t)$是连续模函数,例如对每个$f\in C[a,b]$,它的一阶连续模$\omega_1(f,t)$(约定

当$t\geqslant b-a$时，$\omega_1(f,t)=\omega_1(f,b-a)$是连续模函数，容易证明，若$\omega(t)$是$[0,\infty)$上连续，不减的上凸函数且$\omega(0^+)=0$，则$\omega(t)$必是连续模函数．称上凸的连续模函数为上凸连续模，我们指出，非上凸的连续模是存在的，例如，设$0<h<1$，则

$$\omega_h(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{h} & (0\leqslant t\leqslant h)\\ 1 & (h\leqslant t\leqslant 1)\\ \dfrac{1}{h}(t-1+h) & (1\leqslant t\leqslant 1+h)\\ 2 & (t\geqslant 1+h)\end{cases}$$

是非上凸的连续模．

设$\omega(t)$是连续模函数，对任意$n\in N$，$t_i\geqslant 0$，$\lambda_i\geqslant 0$（$i=1,2\cdots n$）且$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，记

$$\tilde{\omega}(t)=\sup_{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i t_i=t}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\omega(t_i)\right)$$

容易证明$\tilde{\omega}(t)$是上凸连续模、明显地，若$\omega(t)$是上凸连续模，则有$\tilde{\omega}(t)=\omega(t)$，又若连续模$\omega_1(t)\leqslant\omega_2(t)\big(t\in(0,\infty)\big)$，则有$\tilde{\omega}_1(t)\leqslant\tilde{\omega}(t)$．由于如下的结论成立，所以我们称$\tilde{\omega}(t)$为$\omega(t)$的最小上凸优函数．

引理2.7 对任何连续函数$\omega(t)\neq 0$，存在上凸连续模$\tilde{\omega}(t)$使得对$t>0$有

$$\omega(t)\leqslant\tilde{\omega}(t)<2\omega(t) \qquad (1.31)$$

其中常数2是不能再减小的

证明 由定义可见对$\forall t\geqslant 0$有$\omega(t)\leqslant\tilde{\omega}(t)$，现需证对每个$t>0$有$\tilde{\omega}(t)<2\omega(t)$，显然地只须证明对$\omega(t)<\tilde{\omega}(t)$成立的$t$不等式成立，若$t$是这种点，则存在$t_1$和$t_2$使得$\tilde{\omega}(t_1)=\omega(t_1)$，$\tilde{\omega}(t_2)=\omega(t_2)$且$\tilde{\omega}(t)$在$[t_1,t_2]$是线性的，因此有

$$\tilde{\omega}(t)=\frac{t_2-t}{t_2-t_1}\omega(t_1)+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\omega(t_2)$$

由连续模的定义导出

$$\omega(t_1)\leqslant\omega(t), \qquad \omega(t_2)\leqslant\left(\frac{t_2}{t}+1\right)\omega(t)$$

所以

$$\frac{\tilde{\omega}(t)}{\omega(t)}=\frac{t_2-t}{t_2-t_1}\frac{\omega(t_1)}{\omega(t)}+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\frac{\omega(t_2)}{\omega(t)}$$

$$\leqslant\frac{t_2-t}{t_2-t_1}+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\frac{t_2+t}{t}$$

$$=1+\frac{t_2}{t_2-t_1}-\frac{t_1}{t_2-t_1}\cdot\frac{t_2}{t}<2$$

因此得到（1.31）.

容易计算对h>0有

$$\tilde{\omega}_h(t)=\begin{cases}\frac{t}{h} & 0\leqslant t\leqslant h\\ 1+t-h & h\leqslant t\leqslant 1+h\\ 2 & 1+h\leqslant t\end{cases}$$

于是

$$\frac{\tilde{\omega}_h(1)}{\omega_h(1)}=2-h \qquad (0<h<1)$$

可见（1.31）中的常数2是不能再减小的 证毕.

现在设$f\in C(D)$，$\rho(x,y)$是x，y间的一种度量，记

$$\omega_\rho(f,t)=\sup_{\substack{\rho(x,y)\leqslant t\\ x,y\in D}}|f(x)-f(y)|,$$

$$|f|_\rho=\sup_{x,y\in D}\frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)}.$$

令

$$K_\rho(f,t)=\inf_{g\in G_\rho}\{\|f-g\|_C+t|g|_\rho\}$$

其中$G_\rho=\{f\,|\,f\in C(D)$且$|f|_\rho<+\infty\}$.

关于K—泛函K_ρ有如下定理.

定理2.4（Brudnyi） 设$f\in C(D)$，$t>0$，则有

$$K_\rho(f,t)=\tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\rho(f,2t) \qquad (1.32)$$

证明 由于对$\forall g\in G_\rho$有

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\omega_\rho(f,2t)&\leqslant\tfrac{1}{2}\omega_\rho(f-g,2t)+\tfrac{1}{2}\omega_\rho(g,2t)\\&\leqslant\tfrac{1}{2}\cdot2\|f-g\|+\tfrac{1}{2}(2t)|g|_\rho\\&=\|f-g\|+t|g|_\rho\end{aligned}$$

关于$g\in G_\rho$取下确界得到

$$\tfrac{1}{2}\omega_\rho(f,2t)\leqslant K_\rho(f,t)$$

注意到$K_\rho(f,t)$是上凸的，于是由最小上凸优函数的性质导出

$$\tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_\rho(f,2t)\leqslant\tilde{K}_\rho(f,t)=K_\rho(f,t)$$

另一方面，对$f\in C(D)$和任意正数$\lambda>0$，记

$$d=\frac{1}{2}\sup_{\tau>0}\left(\omega_\rho(f,\tau)-\lambda\tau\right)$$

令

$$\Phi_\lambda(x,y)=f(y)-d-\lambda\rho(x,y), \qquad (x,y)\in D\times D.$$

$$g_\lambda(x)=\sup_{y\in D}\Phi_\lambda(x,y)$$

则有

$$\|\Phi_\lambda(\cdot,y)\|_\rho\leqslant\lambda \qquad (y\in D)$$

因此$\|g_\lambda\|_\rho\leqslant\lambda<+\infty$，即$g_\lambda\in G_\rho$，又因

$$g_\lambda(x)-f(x)=\sup_{y\in D}\left(f(y)-f(x)-d-\lambda\rho(x,y)\right)\geqslant -d$$

但

$$f(y)-f(x)-\lambda\rho(x,y)\leqslant\omega_\rho(f,\rho(x,y))-\lambda\rho(x,y)\leqslant 2d$$

所以对$\forall x\in D$有

$$|f(x)-g_\lambda(x)|\leqslant d$$

于是有

$$K_\rho(f,t)\leqslant\|f-g_\lambda\|_C+t\|g_\lambda\|_\rho\leqslant d+t\lambda$$

$$=\frac{1}{2}\sup_{\tau>0}\left(\omega_\rho(f,\tau)-\lambda\tau\right)+\lambda t$$

由于$\lambda>0$是任意的所以

$$K_\rho(f,t)\leqslant\frac{1}{2}\inf_{\lambda>0}\sup_{\tau>0}\left(\omega_\rho(f,\tau)-\lambda\tau+2\lambda t\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\sup_{\lambda>0}\left(-2\lambda t-\sup_{\tau>0}\left(-\lambda\tau+\omega_\rho(f,\tau)\right)\right)$$

利用凸分析中一个经典定理得到

$$K_\rho(f,t)\leqslant\frac{1}{2}\tilde{\omega}_\rho(f,2t)$$

因而得到，对$f\in C(D)$和$t>0$有

$$K_\rho(f,t)=\frac{1}{2}\tilde{\omega}_\rho(f,2t)$$

证毕.

特别地，取$\rho(x,y)=|x-y|^\alpha$（$0<\alpha\leqslant 1$），则有

$$\omega_\rho(f,t)=\omega_1(f,t^{\frac{1}{\alpha}}),$$

$$\|f\|_\alpha=\sup_{x,y\in D}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$G_\rho=\mathrm{Lip}\,\alpha,$$

$$K_\rho(f,t)\overset{\Delta}{=}K_\alpha(f,t)=\inf_{g\in\mathrm{Lip}\,\alpha}\{\|f-g\|+t\|g\|_\alpha\}.$$

因此有

推论2.3　对每个$f\in C(D)$和$t>0$有

$$K_\alpha(f,t)=\frac{1}{2}\widetilde{\omega}_1\left(f,(2t)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

其中$0<\alpha\leqslant 1$，若取$G_\rho=C^1[a,b]$，则有

$$K_1(f,t)=\frac{1}{2}\widetilde{\omega}_1(f,2t)$$

于是利用（1.31）得到

推论2.4　对每个$f\in C(D)$和$t>0$有

$$\frac{1}{2}\omega_1(f,t)\leqslant K_1(f,t)\leqslant 2\omega_1(f,t).$$

设$K_1^*(f,t,t_1,t_2)$是$C(D)$上三个参数的K—泛函，即对每个$(f,t,t_1,t_2)\in C[a,b]\times R_+^3$，有

$$K_1^*(f,t,t_1,t_2)=\inf_{g\in C^1(D)}\{\|f-g\|+t\widetilde{K}_2(g,t_1,t_2)_{C^1}\}$$

其中

$$\widetilde{K}_2(g,t_1,t_2)_{C^1}=\inf_{g_0\in C^2}\{\|g'-g_0'\|+t_2\|g_0''\|+t_1\|g_0'\|\}$$

为给出K_1^*的上界估计，我们需要如下引理

引理2.8　设$f\in C^1[a,b]$对$0<h\leqslant b-a$令

$$(f')_h(x)=\frac{1}{h}\int_{-h\frac{a-b}{x-a}}^{h-h\frac{x-a}{b-a}}f'(x+t)dt\qquad x\in[a,b],$$

记$f_0'(x)=(f')_h(x)$，则$f_0\in C^2[a,b]$且有

$$\|f_0'\|\leqslant\|f'\|,$$

$$\|f'-f_0'\|\leqslant\omega_1(f',h)\qquad(1.33)$$

$$\|f_0''\|\leqslant\frac{1}{h}\left(1-\frac{h}{b-a}\right)\omega_1(f',h)$$

证明　由于对$\forall x\in[a,b]$有

$$|f'(x)-f_0'(x)|\leqslant\frac{1}{h}\int_{-h\frac{x-a}{b-a}}^{h-h\frac{x-a}{b-a}}|f'(x+t)-f'(x)|dt$$

$$\leqslant\omega_1(f',h)$$

又因为

$$f_0''(x)=\left(1-\frac{h}{b-a}\right)\frac{1}{h}\left(f'\left(x+h-h\frac{x-a}{b-a}\right)-f'\left(x-h\frac{x-a}{b-a}\right)\right)$$

所以

$$\|f_0''\|\leqslant\frac{1}{h}\left(1-\frac{h}{b-a}\right)\omega_1(f',h)$$

而$\|f_0'\|\leqslant\|f'\|$是明显的，证毕。

为方便对$h>b-a>0$，令$(f')_h(x)=(f')_{(b-a)}(x)$,则有$(f')_h'(x)=0$ ($x\in[a,b]$，$h>b-a$)，于是对$\forall h>0$有

$$\|f'-f_0'\|\leqslant\omega_1(f',h),$$

$$\|f_0''\|\leqslant\frac{1}{h}\max\left(0,\ 1-\frac{h}{b-a}\right)\omega_1(f',h)$$

定理2.5 对每个$(f,t,t_1,t_2)\in C^1[a,b]\times R_+^3$和$\forall h>0$有

$$K_1^*(f,t,t_1,t_2)\leqslant\begin{cases}\min(1,t_1)\|f'\|+\chi_{(0,1)}(t_1)\max\left(\frac{1+t_1}{2},\frac{t_2}{h}\right)\widetilde{\omega}_1(f',h)\\ t\left\{t_1\|f'\|+\left(1+\frac{t_2}{h}\max\left(0,1-\frac{h}{a-b}\right)\right)\omega_1(f',h)\right\}\end{cases}$$

其中$\chi_{(0,1)}$是$(0,1)$上的特征函数，

证明　首先由$f\in C^1[a,b]$，所以对$(t,t_1,t_2)\in R_+^3$有

$$K_1^*(f,t,t_1,t_2)\leqslant t\widetilde{K}_2(f,t_1,t_2)_{C^1}$$

利用（1.14）和（1.32），对$\forall h>0$有

$$\widetilde{K}_2(f,t_1,t_2)_{C'}=\inf_{g_0\in C''}\{\|f'-g'\|+t_1\|g'\|+t_2\|g''\|\}$$

$$\leqslant\min(1,t_1)\|f'\|+(1+t_1)\chi_{(0,1)}(t_1)K_1\left(f',\frac{t_2}{1+t_1}\right)$$

$$\leqslant\min(1,t_1)\|f'\|+\chi_{(0,1)}(1+t_1)\max\left(1,\frac{2t_2}{h(1+t_1)}\right)K_1\left(f',\frac{h}{2}\right)$$

$$=\min(1,t_1)\|f'\|+\chi_{(0,1)}(t_1)\max\left(\frac{1+t_1}{2},\frac{t_2}{h}\right)\widetilde{\omega}_1(f',h)$$

其次，由于$f\in C^1[a,b]$，取g_0为引理2.8中的f_0并利用（1.33）得到，对$\forall h>0$有

$$K_1^*(f,t,t_1,t_2)\leqslant t\inf_{g_0\in C^2}\{\|f'-g'\|+t_2\|g_0''\|+t_1\|g_0'\|\}$$

$$\leqslant t\{\|f'-f_0'\|+t\|f_0''\|+t\|f_0'\|\}$$

$$\leqslant t\left\{t_1\|f'\|+\left(1+\frac{t_2}{h}\max\left(0,1-\frac{h}{b-a}\right)\right)\omega_1(f',h)\right\}$$

因而定理证毕。

特别地，当$t_1=0$时，有

推论2.5 对每个$(f, t, 0, t_2)\in C^1[a, b]\times R_+^2$和$\forall h>0$有

$$K_1^*(f, t, 0, t_2)\leqslant\begin{cases} t\max(\frac{1}{2}, \frac{t_2}{h})\widetilde{\omega}_1(f', h) \\ t\left(1+\frac{t_2}{h}\max(0, 1-\frac{h}{b-a})\right)\omega_1(f', h) \\ t\min\left(\max(1, \frac{2t_2}{h}), 1+\frac{t_2}{h}\right)\omega_1(f', h). \end{cases}$$

现在设$f\in C(D)$，对$0<h\leqslant b-a$令

$$f_{1h}(x)=\frac{1}{h}\int_{-h\frac{x-a}{b-a}}^{h-h\frac{x-a}{b-a}} f(x+t)dt \qquad x\in[a, b]$$

而对$h\geqslant b-a$，令$f_{1h}(x)=f_{1,(b-a)}(x)$，类似于引理2.8我们有

引理2.9 设$f\in C[a, b]$，则对$\forall h>0$有

$$\|f-f_{1h}\|\leqslant\omega_1(f, h) \tag{1.34}$$

$$\|f'_{1h}\|\leqslant\frac{1}{h}\max\left(0, 1-\frac{h}{b-a}\right)\omega_1(f, h)$$

利用定理2.4和(1.34)得到

定理2.6 对每个$(f, t, t_1, t_2)\in C[a, b]\times R_+^3$和$\forall h>0$有

$$K_1^*(f, t, t_1, t_2)\leqslant\begin{cases} \frac{1}{2}\max(1, \frac{2t}{h})\widetilde{\omega}_1(f, h) \\ \inf\limits_{C\in R}\left\{\left(1+\frac{t}{h}\max(0, 1-\frac{h}{b-a})\right)\omega_1(f-Ce_1, h)+tt_1|C|\right\} \\ \min\left(\max(1, \frac{2t}{h}), 1+\frac{t}{h}\right)\omega_1(f, h) \end{cases}$$

证明　首先由于$f\in C(D)$，所以对$(t, t_1, t_2)\in R_+^3$和$\forall h>0$，利用定理2.4得到

$$K_1^*(f, t, t_1, t_2)\leqslant K_1(f, t)\leqslant\max(1, \frac{2t}{h})K_1(f, \frac{h}{2})$$

$$=\max(1, \frac{2t}{h})\frac{1}{2}\widetilde{\omega}_1(f, h).$$

其次设$l=Ce_1+de_0$ ($e_i(t)=t^i$ (i=1, 2))是线性函数，则有

$$K_1^*(f, t, t_1, t_2)\leqslant K_1^*(f-l, t, t_1, t_2)+K_1^*(l, t, t_1, t_2)$$

由定理2.5得到

$$K_1^*(l, t, t_1, t_2)\leqslant tt_1\|l'\|=tt_1|C|$$

又由（1．34）得到，对$\forall h>0$有

$$K_1^*(f-l,\ t,\ t_1,\ t_2)\leqslant\|f-f_{1h}\|+t\ \|f'_{1h}\|$$

$$\leqslant\left\{1+\frac{t}{h}\max\left(0,\ 1-\frac{h}{b-a}\right)\right\}\omega_1(f-l,\ h)$$

由于l是任意的，所以

$$K_1^*(f,\ t,\ t_1,\ t_2)\leqslant\inf_{c\in R}\left\{\left(1+\frac{t}{h}\max\left(0,\ 1-\frac{h}{b-a}\right)\omega_1(f-Ce_1,h)+tt_1|C|\right\}\right.,$$

若取$C=0$并注意到$\max\left(0,\ 1-\frac{h}{b-a}\right)\leqslant 1$和(1．31)，由定理中的前二个不等式可导出

$$K_1^*(f,\ t,\ t_1,\ t_2)\leqslant\min\left(\max\left(1,\ \frac{2t}{h}\right),1+\frac{t}{h}\right)\omega_1(f,\ h)$$ 证毕。

特别地，记$\omega_1^*(f,\ h)=\inf\limits_{c\in R}\omega_1(f-ce_1,\ h)$，则有

$$K_1^*(f,\ t,\ 0,\ t_2)\leqslant\left(1+\frac{t}{h}\max\left(0,\ 1-\frac{h}{b-a}\right)\right)\omega_1{}^*(f,\ h).$$

现在$0<h<\frac{b-a}{2}$，$x\in[a+h,\ b-h]$，$f\in C(D)$的二阶中心差分为$\triangle_h^2(f,\ x)$

$=f(x+h)-2f(x)+f(x-h)$，称

$$\omega_2(f,\ t)=\sup_{0<t\leqslant h}\|\triangle_t^2(f)\|_{C[a+h,\ b-h]}$$

为f的二阶连续模。

引理2．10 设$f\in C[a,\ b]$，对$0<h\leqslant b-a$令

$$\widetilde{f_{2h}}(x)=\begin{cases}f(x+h)-f(a+h)+f(a) & x\in[a-h,\ a]\\ f(x) & x\in[a,\ b]\\ f(x-h)-f(b-h)+f(b) & x\in[b,\ b+h]\end{cases}$$

则对$x\in[a,\ b]$，$0<\delta\leqslant h$有

$$|\triangle_\delta^2(\widetilde{f_{2h}},x)|\leqslant\begin{cases}\omega_2\left(f,\ \frac{h}{2}\right)+2\omega_2(f,h) & 0<\delta<h\\ \omega_2\left(f,\ \frac{h}{2}\right)+\omega_2(f,\ h) & \delta=h\end{cases}\qquad(1．35)$$

证明 分如下四种情况讨论

1°）设$x+\delta,\ x,\ x-\delta\in[a,\ b]$则

$$|\triangle_\delta^2(\widetilde{f_{2h}},\ x)|=|\triangle_\delta^2(f,\ x)|\leqslant\omega_2(f,\ h)$$

2°）设$x-\delta\in[a-h,\ a]$，$a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant x+\delta\leqslant b$，若$\delta<h$，则

$$|\triangle_\delta^2(\widetilde{f_{2h}},\ x)|=|f(x-\delta+h)-f(a+h)+f(a)-2f(x)+f(x+\delta)|$$

$$\leqslant \omega_2(f, |x-a|)+\omega_2(f, |a-x+\frac{h}{2}|)+\omega_2(f, |-\delta+\frac{h}{2}|)$$

$$\leqslant \omega_2(f, h)+2\omega_2(f, \frac{h}{2}).$$

若$\delta=h$，则有

$$|\Delta_\delta^2\widetilde{f_{2h}}, x)|=|f(a)+f(x+h)-f(x)-f(a+h)|$$

$$\leqslant \omega_2(f, \tfrac{1}{2}|a-x-h|)+\omega_2(f, \tfrac{1}{2}|a+h-x|)$$

$$\leqslant \omega_2(f, h)+\omega_2(f, \frac{h}{2}).$$

3°）设$a\leqslant x-\delta$，$\frac{a+b}{2}<x$，$b<x+\delta$，对$0<\delta\leqslant h$可类似于2°）中的处理得到

$$|\Delta_\delta^2(\widetilde{f_{2h}}, x)|\leqslant\begin{cases}\omega_2(f, h)+2\omega_2(f, \frac{h}{2}) & \delta<h\\ \omega_2(f, h)+\omega_2(f, \frac{h}{2}) & \delta=h\end{cases}$$

4°）设$x-\delta\in[a-h, a)$，$x+\delta\in[b, b+h)$，即δ，$h>\frac{b-a}{2}$，若$\delta<h$，则有

$$|\Delta_\delta^2(\widetilde{f_{2h}}, x)|=|f(x-\delta+h)-f(a+h)+f(a)-2f(x)$$
$$+f(x+\delta-h)-f(b-h)+f(b)|$$

$$\leqslant \omega_2(f, \frac{b-a}{2})+\omega_2(f, |\delta-h|)+\omega_2(f, \tfrac{1}{2}|b-a-2h|)$$

$$\leqslant \omega_2(f, \frac{h}{2})+2\omega_2(f, h).$$

若$\delta=h$，则有

$$|\Delta_\delta^2(\widetilde{f_{2h}}, x)|=|f(x)-f(a+h)+f(a)-2f(x)+f(x)$$
$$-f(a+h)-f(b-h)|$$

$$\leqslant \omega_2(f, \frac{b-a}{2})+\omega_2(f, |\frac{a+b}{2}-b+h|)$$

$$\leqslant \omega_2(f, \frac{h}{2})+2\omega_2(f, h)$$

因而(1．34)得证。

引理2．11 设$0<h<b-a$，$f\in C[a, b]$的二阶Steklov平均定义为

$$f_{2h}(x)=\frac{1}{h^2}\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\widetilde{f_{2h}}(x+s+t)dsdt \qquad x\in[a, b]$$

则$f_{2h}\in C^2[0, 1]$且有

$$|f-f_{2h}|\leqslant\omega_2(f,\ h)+\frac{1}{2}\omega_2\left(f,\ \frac{h}{2}\right)$$

$$|f'_{2h}|\leqslant\frac{2}{h}\omega_1(f,\ h) \qquad (1.36)$$

$$|f''_{2h}|\leqslant\frac{1}{h^2}\left(\omega_2\left(f,\ \frac{h}{2}\right)+\omega_2(f,\ h)\right)$$

证明 由（1.35）对$\forall x\in[a,\ b]$有

$$|f(x)-f_{2h}(x)|\leqslant\frac{1}{2h^2}\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}|\tilde{f}_{1h}(x+s+t)-2f(x)+\tilde{f}_{1h}(x-s-t)|dsdt$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\omega_2\left(f,\ \frac{h}{2}\right)+2\omega_2(f,\ h)\right)$$

又因为

$$f'_{2h}(x)=\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\tilde{f}_{1h}\left(x+t+\frac{h}{2}\right)-\tilde{f}_{1h}\left(x+t-\frac{h}{2}\right)\right)dt$$

和

$$f''_{2h}(x)=\frac{1}{h^2}\left(\tilde{f}_{1h}(x+h)-2\tilde{f}_{1h}(x)+\tilde{f}_{1h}(x-h)\right)$$

所以由（1.35）和（1.34）得到

$$|f''_{2h}|\leqslant\frac{1}{h^2}\left(\omega_2\left(f,\ \frac{h}{2}\right)+\omega_2(f,\ h)\right)$$

和

$$|f'_{2h}|\leqslant\frac{1}{h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\omega_1(\tilde{f}_{1h},\ h)dt\leqslant\frac{1}{h}\omega_1(\tilde{f}_{1h},\ h)$$

$$\leqslant\frac{2}{h}\omega_1(f,\ h)$$

证毕。

同样地约定：当$h>b-a>0$时，令$f_{2h}(x)=f_{2(b-a)}(x)$，于是由（1.36）导出，对$h>0$有

$$|f-f_{2h}|\leqslant\frac{3}{2}\omega_2(f,\ h)$$

$$|f''_{2h}|\leqslant2\max\left(\frac{1}{h^2},\ \frac{1}{(b-a)^2}\right)\omega_2(f,\ h) \qquad (1.37)$$

$$|f'_{2h}|\leqslant2\max\left(\frac{1}{h},\ \frac{1}{b-a}\right)\omega_1(f,\ h)$$

由引理2.10和引理2.11得到

定理2.7 对每个 $(f, t, t_1, t_2) \in C[a, b] \times R_+^3$ 和 $\forall h>0$ 有

$$K_1^*(f, t, t_1, t_2) \leqslant \left\{\frac{3}{2}+2tt_2\max\left(\frac{1}{h^2}, \frac{1}{(b-a)^2}\right)\right\}\omega_2(f, h)$$

$$+\left\{2tt_1\max\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{b-a}\right)\right\}\omega_1(f, h) \qquad (1.38)$$

证明 由于 $f \in C[a, b]$，所以对 $(t, t_1, t_2) \in R_+^3$ 有

$$K_1^*(f, t, t_1, t_2) = \inf_{g \in C^1}\{\|f-g\| + \inf_{g \in C^1}[\|g'-g_0'\|t_1\|g_0'\|+t_2\|g_0''\|]\}$$

$$\leqslant \inf_{g \in C^2}\left(\|f-g\|+t(t_1\|g'\|+t_2\|g''\|)\right)$$

取 $g=f_{2h}$ 且由(1.37)导出

$$K_1^*(f, t_1, t_2) \leqslant \|f-f_{2h}\|+t(t_1\|f_{2h}'\|+t_2\|f_{2h}''\|)$$

$$\leqslant\left(\frac{3}{2}+2tt_2\max\left(\frac{1}{h^2}, \frac{1}{(b-a)^2}\right)\omega_2(f, h)+\right.$$

$$\left.+\left\{2tt_1\max\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{b-a}\right)\right\}\omega_1(f, h)\right)$$

证毕。

特别取 $t_1=0$ 得到

推论2.6 对每个 $(f, t, 0, t_2) \in C[a, b] \times R_+^3$ 和 $\forall h>0$ 有

$$K_1^*(f, t, 0, t_2) \leqslant \left(\frac{3}{2}+2tt_2\max\left(\frac{1}{h^2}, \frac{1}{(b-a)^2}\right)\right)\omega_2(f, h)$$

其实由定理2.7的证明可见，当 $t=0$，$t_2=t$ 时有

$$K_2(f, t)=\inf_{g \in C^2}\{\|f-g\|+t^2\|g''\|\}$$

$$\leqslant\left(\frac{3}{2}+2t^2\max\left(\frac{1}{h^2}, \frac{t_2}{(b-a)^2}\right)\right)\omega_2(f, h)$$

特别取 $h=t>0$ 得到

推论2.7 对每个 $f \in C[a, b]$ 和 $t>0$ 有

$$K_2(f, t) \leqslant \left(\frac{3}{2}+2\max\left(1, \frac{t^2}{(b-a)^2}\right)\right)\omega_2(f, t)$$

因此当 $0 \leqslant t \leqslant (b-a)$ 时有

$$K_2(f, t) \leqslant \frac{7}{2}\omega_2(f, t).$$

1.5 修正K—泛函与修正光滑模

§1.3——1.4中建立的$X_P(D)$上K—泛函与光滑模之间的关系，都是假定D为有限闭区间 本节将涉及无穷区间讨论K—泛函与光滑模关系，不失一般可设 D=（a，b）表$I=[0,1]$，$R_+=[0,\infty)$或$R=(-\infty,\infty)$。

设$\varphi\in C^2(a,b)$是非负权函数且适合如下条件：

1°）存在常数$C>2$使得

i）在端点$a=0$，$-\infty$或$b=+\infty$的邻域有

$$C^{-1}\varphi(y)\leqslant\varphi(x)\leqslant C\varphi(y)\qquad \frac{1}{2}\leqslant\left|\frac{x}{y}\right|\leqslant 2,$$

$$|\varphi'(x)|\leqslant C\frac{\varphi(x)}{|x|},\qquad |\varphi''(x)|\leqslant C\frac{\varphi(x)}{x^2}$$

ii）在端点$b=1$的邻域有

$$C^{-1}\varphi(y)\leqslant\varphi(x)\leqslant C\varphi(y)\qquad \frac{1}{2}\leqslant\frac{1-x}{1-y}\leqslant 2,$$

$$|\varphi'(x)|\leqslant C\frac{\varphi(x)}{1-x},\qquad |\varphi''(x)|\leqslant C\frac{\varphi(x)}{(1-x)^2},$$

2°）i）在$a=0$的邻域有$\varphi(0^+)=0$，且或$\frac{\varphi(x)}{x}$有界或$\frac{\varphi(x)}{x}$无界但存在$r\in(0,1)$使得$\frac{\varphi(x)}{x}$在$a=0$的右邻域是弱下降的，即存在常数K使得对$0<x_1<x$有$\frac{\varphi(x)}{x^r}\leqslant K\frac{\varphi(x_1)}{x_1{}^r}$

ii）在$b=1$的左邻域有$\varphi(1^-)=0$且或$\frac{\varphi(x)}{1-x}$有界或者$\frac{\varphi(x)}{1-x}$无界但存在$r\in(0,1)$使得$\frac{\varphi(x)}{(1-x)^r}$在$b=1$的左邻域是弱下降的。

iii）在$a=-\infty$或$b=+\infty$的邻域$\frac{\varphi(x)}{x}$是有界的。

容易验证 $\varphi(x)=\sqrt{x(1+\alpha x)}$（$\alpha\geqslant 0$或$\alpha=-1$）在$I=[0,1]$（$\alpha=-1$）和$R_+$($\alpha\geqslant 0$）上适合上述条件。对$f\in L_P(D)$（$1\leqslant p+\infty$）和$t>0$，令

$$K_\varphi(f,t)_p=\inf_{g\in L_p^2}\{\|f-g\|_p+t^2\|\varphi^2g''\|_p\}$$

通称K_φ为$L_p(D)$上的修正K—泛函。

现在设$h>0$，令

$$h^*=\begin{cases}\inf\{x\,|x-h\varphi(x)>0\} & (a,b)=I\text{或}R_+\\ \inf\{x\,|x+h\varphi(x)>0\} & (a,b)=R_+\end{cases}$$

$$h^{**}=\begin{cases}\sup\{x\,|x+h\varphi(x)<1\} & (a,b)=I\\ \sup\{x\,|x-h\varphi(x)>0\} & (a,b)=R_+\text{或}R\end{cases}$$

明显地，无论何种（a，b）有

$$h\varphi(h^*)=|h^*|$$

而

$$h^{**}=\begin{cases}h\varphi(h^{**}) & (a,b)=R_+\text{或}R\\ 1-h\varphi(h^{**}) & (a,b)=I\end{cases}$$

本节约定K为正常数（各处出现未必相同），A是导数间插补不等式中的常数。即对$\forall(a',b')\subset(a,b)$有

$$\|f'\|_{L_p(a',b')}\leqslant A\left(\frac{1}{b'-a'}\|f\|_{L_p(a',b')}+(b'-a')\|f''\|_{L_p(a',b')}\right),$$

$$A_p=\begin{cases}2 & p=1\\ 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p & p>1\end{cases}$$

$$C_1=48C^6AA,$$

又设$\Psi(x)\in C^2(0,\infty)$，$0\leqslant\Psi(x)\leqslant1$且$\Psi(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant1\\ 0 & x\geqslant2\end{cases}$ 还设$|\Psi'(x)|<C$，$|\Psi''(x)|<C\left(x\in(0,\infty)\right)$。

现在对$f\in L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）和$t>0$，令

$$\Omega_0(f,t)_p=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta^2_{h\varphi}(f)\|_{L_p((c_h)^*,(c_h)^{**})}$$

又对$1\leqslant p<+\infty$，令

$$\Omega_1^{(0)}(f,t)_p=\sup_{0<h\leqslant t^*}\|\Delta^2_h(f)\|_{L_p}(h,(c_1h)^*+h),$$

$$\Omega_1^{(1)}(f,t)_p=\sup_{0<h\leqslant t^*}\|\Delta^2_h(f)\|_{L_p}(1(c_1h)^*-1-h,1-h)$$

其中$\Delta^2_h(f,\cdot)=f(\cdot+h)-2f(\cdot)+f(\cdot-h)$是$f$的二阶中心差分，记

$$\Omega_1(f,t)_p=\begin{cases}\Omega_1^{(0)}(f,t)_p+\Omega_1^{(1)}(f,t)_p & (a,b)=I,\\ \Omega_1^{(0)}(f,t)_p & (a,b)=R_+\\ 0 & (a,b)=R\end{cases}$$

并称

$$\omega_\varphi(f,t)_p=\Omega_0(f,t)_p+\Omega_1(f,t)_p$$

为$f\in L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）的修正光滑模，

由修正光滑模的定义可见

i）设φ_1，φ_2是适合条件的权函数，而ω_{φ_1}和ω_{φ_2}是相应的修正滑模，若$\varphi_1\leqslant k\varphi_2$，则存在正常数$k_1$和$t_0>0$使得对每个$f\in L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）和$t\in(0,t_0)$有

$$\omega_{\varphi_1}(f,t)_p\leqslant k_1\omega_{\varphi_2}(f,t)_p$$

ii）存在正常数k和$t_0>0$使得对每个$f\in X_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$），$t\in(0,t_0)$和$\lambda\geqslant1$有

$$\omega_\varphi(f,\lambda t)_p\leqslant k\lambda^2\omega_\varphi(f,t)_p$$

关于修正光滑模和修正K—泛函之间的关系如下结果。

定理2.8（V.Totik） 存在正常数k和$t_0>0$，使得对每个$f\in L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）和$t\in(0,t_0)$有

$$\frac{1}{k}\omega_\varphi(f,t)_p\leqslant K_\varphi(f,t)_p\leqslant k\omega_\varphi(f,t)_p$$

证明　首先证明$K_\varphi(f, t)_p \leqslant k\omega_\varphi(f, t)_p$。

I）当$(a, b)=[0,1]$，只要证明对$f\in L_p[0, 1]$且$\mathrm{Supp} f\subseteq(0, \frac{3}{4})$有$K_\varphi(f,t)_p \leqslant k\omega_\varphi(f, t)_p$即可。

i）先设φ在$(0, d)$是增加而$\frac{\varphi(x)}{x}$下降且设$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)}{x}=+\infty$，此时对$\forall h>0$有$h^*>0$，我们将证明存在函数$f_t$使得

$$\|f-f_t\|_{L_p((c_1t)^*, \frac{7}{8})}+t^2\|\varphi^2 f_t''\|_{L_p((c_1t)^*, \frac{7}{8})} \leqslant k\omega_\varphi(f,t)_p+\frac{12C^2A_p}{C_1}K_\varphi(f, t)_p \qquad (1.40)$$

其中t充分小，而k与f，t无关，

不妨设$0<t<\frac{1}{8}$，令

$$f_t(x)=\frac{1}{t^2}\int_0^t du\int_0^u \big(f(x+v\varphi(x))+f(x-v\varphi(x))\big)dv$$

则由Minkowski不等式，有

$$\|f-f_t\|_{L_p((c_1t)^*, \frac{7}{8})} \leqslant \frac{1}{t^2}\int_0^t du\int_0^u \|\Delta^2_{v\varphi}(f)\|_{L_p((c_1v)^*, \frac{7}{8})}dv \leqslant \omega_\varphi(f, t)_p.$$

由简单计算得到

$$\varphi^2 f_t''(x)=(-2\varphi''\varphi+6\varphi'^2)(f_t-f)+(\varphi\varphi''-4\varphi')\cdot\frac{1}{t}\int_0^t \Delta^2_{u\varphi}(f, x)du+\varphi'^2\Delta^2_{t\varphi}(f, x)+t^{-2}\Delta^2_{t\varphi}(f, x)$$
$$+\frac{2\varphi'}{t^2}\int_0^t\big(f(x+t\varphi)-f(x-t\varphi)-2f(x+u\varphi)+2f(x-u\varphi)\big)du$$

因而由$(C_1t)^*\leqslant x\leqslant\frac{7}{8}$和$\frac{\varphi(x)}{x}\downarrow$导出

$$\varphi'(x)^2+|\varphi''(x)\varphi(x)|=\varphi^2(x)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2+\left|\frac{\varphi''}{\varphi}\right|\leqslant 2C^2\frac{\varphi^2(x)}{x^2}$$
$$\leqslant 2C^2\frac{\varphi^2((c_1t)^*)}{(c_1t)^{*2}}\leqslant\frac{2C^2}{(c_1t)^2}\leqslant\frac{1}{t^2}$$

其中利用$h\varphi(h^*)=|h^*|$，应用Minkowski不等式得到

$$t^2\|\varphi^2 f''\|_{L_p((c_1t)^*, \frac{7}{8})}\leqslant t^2t^{-2}\Big\{8\|f_t-f\|_{L_p((c_1t)^*, \frac{7}{8})}$$
$$+\frac{5}{t}\int_0^t\|\Delta^2_{u\varphi}(f)\|_{L_p((c_1u)^*, \frac{7}{8})}du+\|\Delta^2_{t\varphi}(f)\|_{L_p((c_1t)^*, \frac{7}{8})}\Big\}$$
$$+\|\Delta^2_{t\varphi}(f)\|_{L_p((c_1t)^*, \frac{7}{8})}+B(f)\leqslant 15\omega_\varphi(f, t)_p+B(f)$$

其中

$$B(f)=2\|\varphi'\int_0^t\big(f(x+t\varphi)-f(x-t\varphi)-2f(x+u\varphi)$$

$$+2f(x-u\varphi)du\|_{L_p((c_1t)^*,\frac{7}{8})}$$

现设 $g\in L_p^2(0,1)$且$\varphi^2g''\in L_p[0,1]$，则

$$B(f)\leqslant B(f-g)+B(g)$$

而

$$B(f-g)\leqslant 2(\sup_{(c_1t)^*\leqslant x\leqslant\frac{7}{8}}|\varphi'(x)|)6t\|(f-g)(\cdot+u\varphi)\|_{L_p((c_1t)^*,\frac{7}{8})}$$

$$\leqslant 2\cdot 12ct\frac{\varphi((c_1t)^*)}{(c_1t)^*}\|f-g\|L_p[0,1]$$

$$\leqslant\frac{24C}{C_1}\|f-g\|_p$$

这里在计算中令$\rho=x+u\varphi(x)$，则当$|u|\leqslant t$，$x\in[(c_1t)^*,\frac{7}{8})$时，有

$$d\rho=(1+u\varphi'(x))dx\geqslant\left(1-tc\frac{\varphi((c_1t)^*)}{(c_1t)^*}\right)dx$$

$$=(1-\frac{c}{c_1})dx\geqslant\frac{1}{2}dx$$

又对充分小的t，$x\in[(c_1t)^*,\frac{7}{8})$和$|v|\leqslant t\varphi$有

$$x+v\geqslant x(1-t\frac{\varphi(x)}{x})\geqslant(1-t\frac{\varphi[(c_1t)^*]}{(c_1t)^*}\geqslant x(1-\frac{t}{c_1t})\geqslant\frac{x}{2}$$

且

$$x+v\leqslant x(1+t\frac{\varphi(x)}{x})\leqslant 2x$$

因此由Taylor公式得到

$$\left|\int_0^1[g(x+t\varphi)-g(x-t\varphi)-2g(x+u\varphi)+2g(x-u\varphi(x))]du\right|$$

$$=\left|\int_0^1 g'(x)(2t\varphi-4u\varphi)du+\int_0^1\left[\int_0^{t\varphi}(t\varphi-v)g''(x+v)dv\right.\right.$$

$$-\int_0^{-t\varphi}(-t\varphi-v)g''(x+v)dv-2\int_0^{u\varphi}(u\varphi-v)g''(x+v)dv$$

$$\left.\left.+2\int_0^{-u\varphi}(-u\varphi-v)g''(x+v)dv\right]du\right|$$

$$\leqslant 6t^2\varphi^2\left(\max_{|v|<t\varphi}\frac{1}{\varphi^2(x+v)}\right)M(\varphi^2g'',x)$$

其中$M(G,x)$表示G的极大函数，当$1<p<+\infty$利用Hardy—Littlewood不等式得到

$$B(g)\leqslant 2.6c^2t^2\left(\max_{x\in[(c_1t)^*,\frac{7}{8}]}|\varphi'(x)|\right)\|M(\varphi^2g'')\|_{L_p((c_1t)^*,\frac{7}{8})}$$

$$\leqslant 12C^3A_pt^2\frac{\varphi\left((c_1t^*)\right)}{(c_1t)^*}\|\varphi^2g''\|_{L_p((c_1t)^*,\ \frac{7}{8})}$$

$$\leqslant 12C^3A_pC_1^{-1}t^2\|\varphi^2g''\|_{L_p[0,\ 1]}$$

当$p=1$时，有

$$\left|\int_0^t\int_0^{\pm u\varphi}(\pm u\varphi-v)g''(x+u)\,dvdu\right|\leqslant$$

$$\leqslant t\varphi\left(\max_{|v|<t\varphi}\frac{1}{\varphi^2(x+v)}\right)\int_0^t\int_0^{\pm u\varphi}\varphi^2(x+u)|g''(x+v)|dvdu.$$

$$\leqslant C^2t\varphi\varphi^{-1}\int_0^t du\int_0^u\varphi^2(x\pm\tau\varphi)|g''(x\pm\tau\varphi)|\varphi d\tau$$

$$=C^2t\int_0^t(t-\tau)\varphi^2(x\pm\tau\varphi)|g''(x\pm\tau\varphi)|d\tau$$

$$\leqslant C^2t^2\int_0^t\varphi^2(x\pm\tau\varphi)|g''(x\pm\tau\varphi)|d\tau$$

于是由Taylor公式有

$$B(g)\leqslant 2\cdot 6c^2t^2\left(\max_{x\in[(c_1t)^*,\ \frac{7}{8}]}|\varphi'(x)|\right)$$

$$\cdot\max\left\|\int_0^t\varphi^2(x\pm\tau\varphi)|g''(x\pm\tau\varphi)|d\tau\right\|_{L_1((c_1t)^*,\ \frac{7}{8})}$$

$$\leqslant 12C^3C_1^{-1}t\int_0^t\int_{(c_1t)^*}^{\frac{7}{8}}(\varphi^2|g''|)(x\pm\tau\varphi(x))dxd\tau$$

$$\leqslant 24C^3C_1^{-1}t^2\|\varphi^2g''\|_{L_1[0,1]}$$

所以 对$\forall g\in L_p^2(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）有

$$B(f)\leqslant 12C^3A_pC_1^{-1}(\|f-g\|_p+t^2\|\varphi^2g''\|_p).$$

关于g取下确界导出

$$B(f)\leqslant 12C^3A_pC_1^{-1}K_\varphi(f,\ t).$$

因此（1．40）证得，

其次对充分小的t，作函数

$$f_t^*(x)=\frac{4}{t^2}\int_0^{\frac{t^*}{2}}\int_0^{\frac{t^*}{2}}(2f(x+u+v)-f(x+2(u+v))dudv$$

则有

$$\|f-f_t^*\|_{L_p[0,\ 1-(c_1t)^*]}\leqslant\omega_p(f,\ t)_p.$$

又由于对某 个$r\in(0,\ 1)$，$\frac{\varphi(x)}{x^r}$在$x=0$的邻域是下降的，所以有

$$t^2\|\varphi^2 f_t^{*''}\|_{L_p(0,\ 2(c_1t)^*)}\leqslant t^2\varphi^2\big(2(c_1t)^*\big)\|f_t^{*''}\|_{L_p(0,\ 2(c_1t)^*)}$$

$$\leqslant Ct^2\varphi^2\big((c_1t)^*\big)(t^*)^{-2}\omega_\varphi(f,\ t)_p$$

$$=ct^2(t^*)^{-2}\omega_\varphi(f,\ t)_p\varphi^2\left[\left(c_1t\frac{\varphi((c_1t)^*)}{[(c_1t)^*]^\tau}\right)^{\frac{1}{1-\tau}}\right]$$

$$\leqslant ct^2(t^*)^{-2}\omega_\varphi(f,\ t)_p\varphi^2\left[\left(c_1t\frac{\varphi((t)^*)}{[(t)^*]^\tau}\right)^{\frac{1}{1-\tau}}\right]$$

$$=Ct^2(t^*)^{-2}\omega_\varphi(f,\ t)_p\ \varphi^2(c_1^{\frac{1}{1-\tau}}t^*)$$

$$\leqslant kt^2(t^*)^{-2}\omega_\varphi(f,\ t)_p\varphi^2(t^*)\leqslant k\omega_\varphi(f,\ t)_p$$

因而有

$$\|f-f_t^*\|_{L_p[0,\ 2(c_1t)^*]}+t\|\varphi^2 f_t^{*''}\|_{L_p[0,\ 2(c_1t)^*]}$$

$$\leqslant k\omega_\varphi(f,\ t)_p$$

最后令

$$g_t(x)=\Psi((c_1t)^*x)\ f_t^*(x)+\big(1-\Psi((c_1t)^*x)\big)f_t(x)$$

由（1．40)和（1．41)导出

$$\|f-g_t\|_{L_p[0,\ 1]}+t^2\|\varphi^2 g_t''\|_{L_p[0,\ 1]}$$

$$\leqslant k\omega_\varphi(f,\ t)_p+\frac{12CA_p2AC^2}{C_1}K_\varphi(f,t)_p$$

取$C_1=48C^2AA_p$导出

$$K_\varphi(f,\ t)_p\leqslant k\omega_\varphi(f,\ t)_p+\tfrac{1}{2}K_\varphi(f,\ t)_p$$

即

$$K_\varphi(f,\ t)_p\leqslant k\omega_\varphi(f,\ t)_p$$

ii) 设$\frac{\varphi(x)}{x}$在$x=0$的右邻域是增加的或$\frac{\varphi(x)}{x}$是有界的，则对足够小的h有$h^*=0$，所以对足够小的$t>0$，取（1.40）中的f_t得到

$$\|f-f_t\|_{L_p[0,\ \frac{7}{8}]}+t^2\|\varphi^2 f_t''\|_{L_p[0,\ \frac{7}{8}]}\leqslant k\omega_\varphi(f,\ t)_p$$

Ⅱ）当$(a,\ b)=[0,\ \infty)$，只需证明对$f\in L_p(0,\ \infty)$且支柱$\operatorname{supp} f\subseteq(1,\ \infty)$时，有$K_\varphi(f,\ t)_p\leqslant k\omega_\varphi(f,\ t)_p$，事实上，由于$\frac{\varphi(x)}{x}$在$+\infty$的左邻域有界，则对足够小的$h>0$有$h^{**}=+\infty$，于是（1）中i）的证法在这里仍然是有效的，（此时甚至不需要引入函数f_t^*）至于$(a,\ b)=(-\infty,\ +\infty)$，可以同样处理。

其次转入证明

$\frac{1}{k}\omega_\varphi(f, t)_p \leqslant k\varphi(f, t)_p$。

分几种情况讨论

i）关于$\Omega_0(f, t)=\sup\limits_{0<h\leqslant t}\|\Delta^2_{h\varphi}(f)\|_{L_p[(c_1h)^*, (c_1h)^{**}]}$的估计。

设 $g_t \in L^2_p(D)$且使得

$$\|f-g_t\|_p+t^2\|\varphi^2 g''_t\|_p \leqslant 2K_\varphi(f, t)_p \qquad (1.42)$$

由于令$\rho=x+u\varphi(x)$，则对$x\in[(c_1t)^*, (c_1t)^{**}]$有$d\rho\geqslant\frac{1}{2}dx$，所以对$1<p<+\infty$由Hardy—Littlewood极大不等式和（1.42）导出

$$\Omega_0(f, t)\leqslant\Omega_0(f-g_t, t)+\Omega_0(g_t, t)$$

$$\leqslant 8\|f-g_t\|_{L_p(a, b)}+\sup_{0<h<t}\left\|\int\int_{-\frac{h\varphi}{2}}^{\frac{h\varphi}{2}}\frac{1}{\varphi^2(\cdot+u+v)}\varphi^2(\cdot+u+v)\right.$$

$$\left.\cdot|g''_t(\cdot+u+v)|\,dudv\right\|_{L_p[(c_1h)^*, (c_1h)^{**}]}$$

$$\leqslant 8\|f-g_t\|_{L_p(a, b)}+k\|\varphi^{-2}(t\varphi)^2M(\varphi^2 g''_t, \cdot)\|_{L_p(a, b)}$$

$$\leqslant k(\|f-g_t\|_p+t^2\|\varphi^2 g''_t\|_p)\leqslant kK_\varphi(f, t)_p。$$

而对p=1，只需用Fubini定理，仿照（I）中关于B(g)在p=1时的估计一样处理即可。

ii）关于$\Omega_1^{(1)}(f, t)_p=\sup\limits_{0<h\leqslant t^*}\|\Delta^2_h(f)\|_{L_p[a, a(c_1h)^*+h+h]}$的估计。

由假定$\varphi(0^-)=0$且在a=0的右邻域或$\frac{\varphi(x)}{x}$有界或$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)}{x}=+\infty$但存在$r\in$ (0，1)使得$\frac{\varphi(x)}{x^r}$在a=0的右邻域是下降的，对$x\leqslant h$有

$$\int_x^{x+\frac{h}{2}}\frac{u}{\varphi^2(u)}du=\int_x^{x+\frac{h}{2}}\frac{u^{2r}}{\varphi^2(u)}u^{1-2r}\,du$$

$$\leqslant k\frac{h^{2r}}{\varphi^2(h)}\int_x^{x+\frac{h}{2}}u^{1-2r}\,du\leqslant k\frac{h^{2r}}{\varphi^2(h)}h^{2-2r}$$

$$\leqslant k\frac{h^2}{\varphi^2(h)}$$

所以由Hölder不等式，对$0<h\leqslant t^*$有

$$\left\{\int_0^h\left|\int_x^{x+\frac{h}{2}}(x-u)\,g''_t(u)du\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left\{\int_0^h\left(\int_x^{x+\frac{h}{2}}\varphi^2(u)|g''_t(u)|\frac{u}{\varphi^2(u)}du\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant k\left\{\int_0^{h}\left(\frac{h}{\varphi(h)}\right)^{\frac{2p}{2}}\int_x^{x+\frac{h}{2}}\left|\varphi^2(u)\,g_t''(u)\right|^p\frac{u}{\varphi(u)}\,du\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant k\left(\frac{h}{\varphi(h)}\right)\left\{\int_0^{\frac{3h}{2}}\left(\varphi^2(u)\cdot\left|g_t''(u)\right|\right)^p du\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant k\frac{t^{*2}}{\varphi^2(t^*)}\|\varphi^2 g_t''\|_{L_p(a,\ b)}\leqslant Kt^2\|\varphi g_t''\|_p$$

因此由（1．42）导出

$$\Omega_1^{(0)}(f,\ t)_p\leqslant\Omega_1^{(0)}(f-g_t,\ t)_p+\Omega_1^{(0)}(g_t,\ t)_p$$

$$\leqslant 4\|f-g_t\|_p\leqslant Kt^2\|\varphi^2 g_t''\|_p\leqslant kK_\varphi(f,\ t)_p.$$

iii）关于$\Omega_1^{(1)}(f,\ t)=\sup\limits_{0<h<t^*}\|\triangle_h^2(f)\|_{L_p(2(c(h))^*-1-h,\ 1-h)}$的估计，

由条件 $\varphi(1^-)=0$ 且在 $b=1$ 的左邻域 $\frac{\varphi(x)}{1-x}$或有界或$\frac{\varphi(x)}{1-x}\to+\infty$但存在$r\in(0,1)$使得$\frac{\varphi(x)}{(1-x)^r}$在$b=1$的左邻域是下降的，因此，与ii）一样处理可得

$$\Omega_1^{(1)}(f,\ t)\leqslant kK_\varphi(f,\ t)_p$$

因而证得

$$\frac{1}{k}\omega_\varphi(f,\ t)_p\leqslant K_\varphi(f,\ t)_p.$$

我们指出如下事实是重要的，若存在$k>0$使得对$\forall x\in[h^*,h^{**}]$有$1\pm h\varphi'(x)\geqslant k$，则用

$$\Omega_\varphi^*(f,\ t)_p=\sup_{0<h\leqslant t}\|\triangle_{h\varphi}^2(f)\|_{L_p[h^*,\ h^{**}]}$$

代替$\Omega_\varphi(f,\ t)_p$，同样地，$\Omega_1^{(0)}(f,t)_p$和$\Omega_1^{(1)}(f,\ t)_p$分别由

$$\Omega_1^{(0)*}(f,t)_p=\sup_{0<h\leqslant t^*}\|\triangle_h^2(f)\|_{L_p[h,\ \xi)}$$

和

$$\Omega_1^{(1)*}(f,t)_p=\sup_{0<h\leqslant t^*}\|\triangle_h^2(f)\|_{L_p(\xi,\ 1-h)}$$

代替，其中$\xi\in(0,1)$是固定的，定理2．8的结论仍然成立，例如当$(a,b)=[0,1]$ $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$，有

$$h^*=\frac{h^2}{1+h^2},\qquad h^{**}=\frac{1}{1+h^2}$$

■

$$\omega_\varphi^*(f,\ t)_p=\Omega_\varphi^*(f,\ t)+\Omega_1^{(0)*}(f,\ t)+\Omega_1^{(1)*}(f,\ t)$$

$$= \sup_{0<h<t} \|\Delta^2_{h\varphi}(f)\|_{L_p[h^2,\ 1-h^2]} + \sup_{0<h\leqslant t^2} \|\Delta^2_h(f)\|_{L_p[h,\ 1-h]}$$

于是定理2．8的结论变形为

$$\frac{1}{k}\omega^2_\varphi(f,\ t)_p \leqslant K_\varphi(f,\ t)_p \leqslant k\,\omega^2_\varphi(f,\ t)_p.$$

怎样用二阶中心差分 $\sup_{0<h\leqslant t^*} \|\Delta^2_h(f)\|_{L_p[h^*,\ h^{**}]}$ 来估计 $K_\varphi(f,\ t)_p$，在应用中是定理2．8结论的重要补充，为此令

$$V_\varphi(f,\ t)_p = \sup_{0<h\leqslant t} \|\Delta^2_{h\varphi}(f)\|_{L_p[(c_1h)^*,\ (c_1h)^{**}]}.$$

我们有

定理2.9（V、Totik） 存在常数k和 $t_0>0$ 使得对所有 $f\in L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）和 $t\in(0,\ t_0)$ 有

$$\frac{1}{k}V_\varphi(f,\ t)_p \leqslant K_\varphi(f,\ t)_p \leqslant k\int_0^t \frac{V_\varphi(f,\ \tau)_p}{\tau}d\tau$$

证明．由定理2．8对 $f\in L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）有 $V_\varphi(f,\ t)_p = \Omega_\varphi(f,\ t)_p \leqslant kK_\varphi(f,t)_p$，所以只需要证明

$$\Omega_0(f,\ t)_p \leqslant k\int_0^t \frac{V_\varphi(f,\ \tau)_p}{\tau}d\tau,$$

$$\Omega_1(f,\ t)_p \leqslant k\int_0^t \frac{V_\varphi(f,\ \tau)_p}{\tau}d\tau$$

首先，由于

$$\Omega_0(f,\ t)_p = V_\varphi(f,\ t)_p \leqslant kV_\varphi\left(f,\ \frac{t}{2}\right)_p$$

$$\leqslant k\int_{\frac{1}{2}t}^t \frac{V_\varphi(f,\ \tau)_p}{\tau}d\tau \leqslant k\int_0^t \frac{V_\varphi(f,\ \tau)_p}{\tau}d\tau$$

其次，假定对 $t>0$ 有 $t^*>0$，我们仅需对 $f\in L_p[0,\ 1]$ 且 $\mathrm{supp} f\subseteq\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$ 有

$$\Omega_1^{(*)}(f,\ t)_p \leqslant k\int_0^t \frac{V_\varphi(f,\ \tau)_p}{\tau}d\tau$$

$$K^*(f,t) = \inf_{g\in L_p^2}\left(\|f-g\|_{L_p,\ [(c_1t)^*,\ \frac{7}{8}]} + t^2\|\varphi^2 g''\|_{L_p[(c_1t)^*,\ \frac{7}{8}]}\right)$$

是不完全K—泛函，由定理2．8的证明得到

$$K_\varphi(f,\ t) \leqslant kV_\varphi(f,\ t)_p + B(f).$$

又因为当 $x\geqslant(c_1t)^*$ 时，有

$$x - t\varphi(x) \geqslant (c_1t)^* - \frac{1}{c}(c_1t)\varphi((c_1t)^*) = \left(1-\frac{1}{c}\right)(c_1t)^*$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(c_1t)^* \geqslant \left(c_1\frac{t}{2}\right)^*$$

如同定理2．8的证明一样有

$$B(f) \leqslant 12C^2 A_p C_1^{-1}\left(\|f-g\|_{L_p\left(\left(\frac{c_1 t}{2}\right)^*, \frac{1}{2}\right)} \right.$$

$$\left. + t^2 \|\varphi^2 g''\|_{L_p\left(\left(\frac{c_1 t}{2}\right)^*, \frac{1}{2}\right)}\right)$$

由此导出

$$B(f) \leqslant 48C^2 A_p C_1^{-1} K_\varphi\left(f, \frac{t}{2}\right)$$

所以得到

$$K_\varphi(f, t) \leqslant kV_\varphi(f, t)_p + \frac{1}{2} K_\varphi\left(f, \frac{t}{2}\right) \qquad (1.43)$$

逐次利用（1.43）并注意到$V_\varphi(f, t)_p$是t的增加函数和$\forall t>0$有$K_\varphi(f, t) \leqslant \|f\|_p$，我们得到

$$K_\varphi(f, t) \leqslant kV_\varphi(f, t)_p + \frac{1}{2} K_\varphi\left(f, \frac{1}{2}\right)_p$$

$$\leqslant k\left(V_\varphi(f, t)_p + \frac{1}{2} V_\varphi\left(f, \frac{t}{2}\right)_p + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^n} V_\varphi\left(f, \frac{t}{2^n}\right)_p + \frac{1}{2^{n+1}} K_\varphi\left(f, \frac{t}{2^{n+1}}\right)\right)_p$$

令$n \to +\infty$导出

$$K_\varphi(f, t) \leqslant kV_\varphi(f, t)$$

现在由于当$x \geqslant (c_1 t)^*$时有

$$t^* = t\varphi(t^*) \leqslant t\varphi(x)$$

所以

$$\inf_{g \in L_p^2}\left(\|f-g\|_{L_p\left((c_1 t)^*, \frac{1}{2}\right)} + t^2 \|g''\|_{L_p\left((c_1 t)^*, \frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$\leqslant K_\varphi(f, t) \leqslant kV_\varphi(f, t)_p$$

由此容易导出

$$\|\triangle_{t^*}^2(f)\|_{L_p\left((c_1 t)^* + t^*, \frac{1}{2} - t^*\right)} \leqslant kV_\varphi(f, t)_p$$

由权函数φ的假定，存在$r \in (0, 1)$ 使得$\frac{\varphi(x)}{x^r}$在$x=0$的右邻域是下降的，对此r有

$$2(t^*)^{1-r} = 2t \cdot \frac{\varphi(t^*)}{(t^*)^r} \geqslant 2t \frac{\varphi((2t)^*)}{((2t)^*)^r} = ((2t)^*)^{1-r}$$

由（1.44）和$t \to t^*$映照的连续性导出数存在正常数L和k使得对所有$t \in [0, t_0]$，

$$\sup_{h \leqslant t^*} \|\triangle_h^2(f)\|_{L_p\left(Lh, \frac{1}{2} - h\right)} \leqslant kV_\varphi(f, t)_p$$

因为

$$\|\Delta_h^2(f)\|_{L_p[c,\ d]}\leqslant n^2\|\Delta_{\frac{h}{n}}^2(f)\|_{L_p(c-h+\frac{h}{n},\ d+h-\frac{h}{n})}$$

从前面的估计易得到，对$\forall t\in[0,\ t_0]$有

$$\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_h^2(f)\|_{L_p(2h,\ \frac{1}{2})}\leqslant kV_\varphi(f,\ t)_p \qquad (1.45)$$

现在令

$$W(f,\ t)=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_h^2(f)\|_{L_p[h,\ \frac{1}{2}]} \qquad (1.46)$$

由于

$$\Delta_h^2(f,\ x)=\Delta_{\frac{h}{2}}^2(f,\ x-\frac{h}{2})+2\Delta_{\frac{h}{2}}^2(f,\ x)+\Delta_{\frac{h}{2}}^2(f,\ x+\frac{h}{2})$$

从（1.45）和（1.46）导出

$$W(f,\ t)\leqslant W(f,\ \frac{t}{2})+3\sup_{h\leqslant t}\|\Delta_{\frac{h}{2}}^2(f)\|_{L_p[h,\ \frac{1}{2}]}$$

$$\leqslant W(f,\ \frac{t}{2})+kV_\varphi(f,\ t)_p$$

重复应用上式并注意到$f\in L_p(D)$推出$W(f,\ \frac{t}{2n})\longrightarrow 0(n\longrightarrow+\infty)$因而得到

$$W(f,\ t)\leqslant k\sum_{n=0}^{\infty}V_\varphi\left(f,\ \frac{t}{2^n}\right)_p\leqslant k\int_0^t\frac{V_\varphi(f,\ \tau)_p}{\tau}d\tau$$

因为对$t>0$有$t^*>0$，即有$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)}{x}=+\infty$，但存在$r\in(0,\ 1)$使得$\frac{\varphi(x)}{x^r}$在$x=0$的右邻域是下降，因此$\varphi'(x)\leqslant r\frac{\varphi(x)}{x}$，从而有$1-h\varphi'(x)\geqslant 1-h\frac{r\varphi(x)}{x}\geqslant 1-r(x\geqslant h^*)$，利用定理2.8后面所指出的重要事实，得知$\Omega_1^{(0)}(f,\ t)_p$可用$\Omega_1^{\xi(0)}(f,\ t)_p$代替，只要取$\xi=\frac{1}{2}$，有$\Omega_1^{\xi(0)}(f,\ t)_p=W(f,\ t)$，因而得到

$$\Omega_1^{(0)}(f,\ t)_p\leqslant k\int_0^t\frac{V_\varphi(f,\ \tau)_p}{\tau}d\tau$$

类似地可以证明

$$\Omega_1^{(1)}(f,\ t)_p\leqslant k\int_0^t\frac{V_\varphi(f,\ \tau)_p}{\tau}d\tau$$

因而定理证毕。

现在讨论连续函数空间$C(D)$〔$D=(a,\ b)$〕，用$C_0(D)$表示$C(D)$中函数且在端点a和b具有有限极限所组成的子空间，记$AC_1^1=\{g\ g\in C_0(D)且g'\in AC\}$，对$f\in C_0(D)$和$t>0$，令

$$K_\varphi(f,\ t)=\inf_{g\in AC_0^1}\{\|f-g\|+t^2\|\varphi^2 g''\|\}$$

则

$$\omega_\varphi(f,\ t)=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_{h\varphi}^2(f)\|_{C[h^*,\ h^{**}]}$$

分别称它们为$C_0(D)$上的修正K—泛函和修正光滑模，

由于假定权函数$\varphi(x)$在$\pm\infty$点的邻域使得$\frac{\varphi(x)}{x}$是有界的，所以当$D=R_+$时有$h^*=+\infty$，而当$D=R$时有$h^*=-\infty$和$h^{**}=+\infty$，特别地，当$D=[0,\ 1]$，$\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$时，可取$h^*=h^2$，$h^{**}=1-h^2$，当$D=R_+$，若$\varphi(x)=\sqrt{x}$，可取$h^*=h^2$，若$\varphi(x)=\sqrt{x(1+x)}$，可取$h^{**}=(1+\alpha)h^2$，一般地，若$\varphi(x)=\sqrt{x(1+\alpha x)}$（$\alpha\geqslant0$）可取$h^{**}=(1+\alpha)h^2$，因此修正光滑模经常写作如下形式：

$$\omega_\varphi(f,\ t)=\sup_{0<h\leqslant t}\ \sup_{x\pm h\varphi(x)\in(a,\ b)}|\Delta_{h\varphi(x)}^2(f,\ x)|$$

同样地，存在正常数k和$t_0>0$使得对每个$f\in C_0(D)$和$t\in(0,\ t_0)$及$\lambda\geqslant1$有

$$\omega_\varphi(f,\ \lambda t)\leqslant K\lambda^2\omega_\varphi(f,\ t)$$

与定理2．8的证明一样可以得到

定理2．10（V．Totik） 存在正常数k和$t>0$使得对每个$f\in C_0(D)$和$t\in(0,\ t_0)$有

$$\frac{1}{k}\omega_\varphi(f,\ t)\leqslant k_\varphi(f,\ t)\leqslant K\omega_\varphi(f,\ t)$$

最后指出，在权函数$\varphi(x)$具有较一般的条件下仍然可以建立上述的Totik定理，有兴趣可参阅V．Totik和Z．Ditzian的论文。

§2 逼近转化原理及其应用

2．1 逼近转化的一般原理

设X是赋范线性空间，U是X中的稠密线性集，$S\subset X$是一个逼近集，所谓逼近转化原理是揭示怎样将S对U的逼近度估计转化为S对X的逼近度估计，本质上它是Banach—Steinhaus定理的量化形式，

作为K—泛函概念的应用我们有

定理2．11 设X是线性赋范空间，其范数为$\|\cdot\|_X$，U是X中的稠密线性集，其半范为$|\cdot|_U$，若存在$h>0$和正常数C使得对每个$g\in U$，有$s_g\in S$使得

$$\|g-s_g\|_X\leqslant C_1 h|g|_U \qquad (2.1)$$

则对每个$f\in X$存在$s_f\in S$使得

$$\|f-s_f\|_X\leqslant C_2K_U(f,\ h)_X \qquad (2.2)$$

其中C_2是与f无关的正常数。

证明 由X与K—泛函的定义，对每个$f\in X$存在$g_f\in U$使得

$$\|f-g_f\|_X+h|g_f|_U\leqslant 2K_U(f,h)_X \quad (2.3)$$

由（2.1）对$g_f\in U$存在$s_f\in S$使得

$$\|g_f-s_f\|_X\leqslant c_1 h|g_f|_U$$

于是

$$\begin{aligned}\|f-s_f\|_X&\leqslant\|f-g_f\|_X+\|g_f-s_f\|_X\\&\leqslant\|f-g_f\|_X+c_1h|g_f|_U\\&\leqslant\max(1,c_1)(\|f-g_f\|_X+h|g_f|_U)\end{aligned}$$

因此由（2.3)导出

$$\|f-s_f\|_X\leqslant 2\max(1,c_1)K_U(f,h)_X$$

取$c_2=2\max(1,c_1)$即得（2.2）证毕。

特别地，设$D=[a,b]$，$r\in N$，取$X=X_p(D)$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），$U=X_p^r(D)$其半范为$|g|_U=\|g^{(r)}\|_{X_p}$（$g\in X_p^r$），则由（2.2）和定理2.1中弱等价关系得到，

推论2.8 设 $S\subset X_p(D)$)$1\leqslant p\leqslant+\infty$)是一个逼近集，若存在$h>0$和正常数$C_1$使得对每个$g\in X_p^r(D)$有$s_g\in S$使得

$$\|g-s_g\|_{X_p}\leqslant c_1h^r\|g^{(r)}\|_{X_p}$$

则对每个$f\in X_p(D)$存在$s_f\in S$使得

$$\|f-s_f\|_{X_p}\leqslant c_2\omega_r(f,h),$$

其中$c_2=2\max(1,c_1)$。

我们感兴趣的是以线性算子的像集作为逼近集S的情况。设$T\in\mathscr{L}(X)$取逼近集$S=\{Tf\ f\in X\}$我们得到算子逼近度的转化定理。

定理2.12 设$T\in\mathscr{L}(X)$，若存在$h>0$和$c_1>0$使得对每个$g\in U$有

$$\|Tg-g\|_X\leqslant c_1h|g|_U \quad (2.4)$$

则对每个$f\in X$有

$$\|Tf-f\|_X\leqslant c_2K_U(f,h)_X \quad (2.5)$$

其中$c_2=\max(1+\|T\|,c_1)$

证明 设$f\in X$，对$\forall g\in U$由（2.4）导出

$$\begin{aligned}\|Tf-f\|_X&\leqslant\|f-g\|_X+\|Tg-g\|_X+\|T(f-g)\|_X\\&\leqslant(1+\|T\|)\|f-g\|_X+c_1h|g|_U\\&\leqslant\max(1+\|T\|,c_1)\{\|f-g\|_X+h|g|_U\}\end{aligned}$$

对$g\in U$取下确界得到

$$\|Tf-f\|_X\leqslant\max(1+\|T\|,c_1)K_U(f,h)_X$$

取$c_2=\max(1+\|T\|,c_1)$即得（2.5），证毕。

类似于推论2.8，由定理2.12和定理2.1中的弱等价关系得到

推论2.9 设T是$X_p(D)$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）到自身内的有界线性算子，若存在$h>0$和

$c_1>0$ 使得对每个$X_p^r(D)$（$r\in N$）有

$$\|Tg-g\|_{X_p}\leqslant c_1h^r\|g^{(r)}\|_{X_p}$$

则对每个$f\in X_p(D)$有

$$\|Tf-f\|_{X_p}\leqslant c_2\omega_r(f,\ h)_p.$$

其中$c_2=\max(1+\|T\|,\ c_1)$。

例1 设$K_n(t)$是n次非负的三角多项式且

$$\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=1$$

对$f\in X_{2\pi}^p$定义线性算子L_n：

$$L_n(f,\ x)=\int_{-\pi}^{\pi}\{(-1)^{r+1}\triangle_t^r(f,\ x)+f(x)\}K_n(t)dt$$

明显地$L_n\in\mathscr{L}(X_{2\pi}^p)$且$\|L_n\|\leqslant 2^r$。

若$r\in N$且

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^rK_n(t)dt\leqslant Cn^{-r} \tag{2.6}$$

其中C是仅依赖于r的正常数，则对每个$g\in W^rX_{2\pi}^p=\{\ g|g\in X_{2\pi}^p$且$g^{(r)}\in X_{2\pi}^p\}$有

$$\|L_n(g)-g\|_{X_{2\pi}^p}\leqslant Cn^{-r}\|g^{(r)}\|_{X_{2\pi}^p}$$

事实上，对$\forall g\in W^rX_{2\pi}^p$有

$$\begin{aligned}\|L_n(g)-g\|_{X_{2\pi}^p}&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\|\triangle_t^r(g)\|_{X_{2\pi}^p}K_n(t)dt\\&\leqslant\|g^{(r)}\|_{X_{2\pi}^p}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^rK_n(t)dt\\&\leqslant Cn^{-r}\|g^{(r)}\|_p.\end{aligned}$$

因此由推论2.9得到，对每个$f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\|f-L_n(f)\|\leqslant c_1\omega_r(f,\ n^{-1})_p \tag{2.7}$$

应当指出，适合（2.6）条件的$K_n(t)$是存在的，例如，Jackson核

$$K_n(t)=C_{nr}\left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2r}$$

其中$m=\left[\frac{n}{r}\right]$，而$C_{nr}$使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=1.$$

由于$L_n(f)$是次数$\leqslant n$的三角多项式，由（2.7）导出，对每个$f\in X_{2\pi}^p$，其最佳逼近

$E_n^*(f)_p$有

$$E_n^*(f)_p \leqslant C\omega_r(f, \frac{1}{n})_p$$

2.2 算子依范数逼近的转化定理

设$\{T_n\}_{n\in N}$是X到自身内的线性算子序列，取逼近集 $S=\bigcap\limits_{n\in N}\{T_n f | f\in X\}$，由定理2.12可以导出线性算子列的逼近转化定理，更一般地，Dickmeis—Nessel对次线性算子序列建立如下转化定理。

定理2.13 设X，Y为赋范线性空间，其范数分别为$\|\cdot\|_X$和$\|\cdot\|_Y$，U是X中稠密的线性集其上的半范记作$|\cdot|_U$，又设$\{R_n\}_{n\in N}$是X到Y内一致有界的次线性算子列，即存在正常数C使得对$\forall f\in X$和$n\in N$有

$$\|R_n f\|_Y \leqslant C\|f\|_X \tag{2.8}$$

若存在$\varphi_n\to 0^+$ $(n\to+\infty)$使得对$\forall g\in U$和$n\in N$有

$$\|R_n g\|_Y \leqslant C_1\varphi_n |g|_U \tag{2.9}$$

其中C_1是与n，g无关的正常数，则对每个$f\in X$和$n\in N$有

$$\|R_n f\|_Y \leqslant C_2 K_U(f, \varphi_n)_X \tag{2.10}$$

其中$C_2=\max(C_1, C)$。

证明　设$f\in X$，$n\in N$，对$\forall g\in U$，由R_n的次线性及(2.8)和(2.9)得到

$$\begin{aligned}\|R_n f\|_Y &\leqslant \|R_n(f-g)\|_Y+\|R_n g\|_Y\\ &\leqslant C\|f-g\|_X+C_1\varphi_n|g|_U\\ &\leqslant \max(C, C_1)(\|f-g\|_X+\varphi_n|g|_U)\end{aligned}$$

对$g\in U$取下确界，并取$C_2=\max(C, C_1)$得到

$$\|R_n f\|_Y \leqslant C_2 K_U(f, \varphi_n)_X.$$

证毕。

特别地，若$\{T_n\}_{n\in N}\subset E(X)$且一致有界，记$T=\sup\limits_{n\in N}\{\|T_n\|\}$，取

$$R_n = T_n - I$$

其中I是X上恒等算子，则$\{R_n\}_{n\in N}\subset E(X)$且一致有界，记$R=\sup\limits_{n\in N}\{\|R_n\|\}$，则有$R\leqslant T+1$，因此由定理2.13导出如下转化定理

定理2.14（A. Grundmann）　设$\{T_n\}_{n\in N}\subset E(X)$且一致有界，若存在$C>0$和$\varphi_n\to 0^+$ $(n\to+\infty)$使得对每个$g\in U$和$n\in N$有

$$\|T_n g-g\|_X \leqslant C\varphi_n|g|_U \tag{2.11}$$

则对每个$f\in X$和$n\in N$有

$$\|T_n f-f\|_X \leqslant C_1 K_U(f, \varphi_n)_X \tag{2.12}$$

其中$C_1=\max(C, T+1)$

例1　设$I=[0, 1]$，取

$$U_1=\{g\,|\,g\in C^1(I)\text{且}\varphi g'\in BV(I)\}$$

对每个$g\in U$，赋予半范

$$|g|_{U_1}=\|\varphi g'\|_\infty+\bigvee_0^1(\varphi g')$$

对$f\in L_1(I)$和$t>0$引入如下K—泛函：

$$K_{U_1}(f,t)=\inf_{g\in U_1}(\|f-g\|_1+t\,|g|_{U_1}).$$

设$\{P_n\}_{n\in N}$是Bernstein—kantorovich算子列，即对$f\in L_1(I)$有

$$P_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(u)du\quad p_{nk}(x)$$

明显地对$\forall f\in L_1(I)$有$\|P_n(f)\|_1\leqslant\|f\|_1$且

$$\int_0^1 P_n(f,x)\,dx=\int_0^1 f(x)dx.$$

应用定理2．14得到如下结论：对每个$f\in L_1(I)$有

$$\|P_n(f)-f\|_1\leqslant C_2K_{U_1}(f,\frac{1}{n}),\qquad(2.13)$$

其中C_2是与f，n无关的正常数，

为此我们只需证明：对每个$g\in U$，有

$$\|P_n(g)-g\|_1\leqslant\frac{C_1}{n}|g|_{U_1}\qquad(2.14)$$

其中C_1是与f，n无关的正常数．

为证明成立估计式（2．14），我们需要如下命题．

命题1 设g，$\varphi\in L_1(I)$，$m\in L_\infty(I)$，若对$\forall x$，$y\in I$，有

$$g(x)-g(y)\leqslant m(x)\big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)$$

$$\big(\text{或}\geqslant m(x)(\varphi(x)-\varphi(y))\big)$$

则有

$$\|P_n(g)-g\|_1\leqslant2\|m\|_\infty\|P_n(\varphi)-\varphi\|_1$$

证明　因为对$\forall x$，$y\in I$，有

$$g(x)-g(y)\leqslant m(x)\big(\varphi(x)-\varphi(y)\big)$$

所以

$$g(x)-P_n(g,x)\leqslant m(x)\big(\varphi(x)-P_n(\varphi,x)\big)$$

因此（由$a\leqslant b$导出$|a|+a\leqslant|b|+b$）有

$$|g(x)-P_n(g,x)|\leqslant-\big(g(x)-P_n(g,x)\big)+|m(x)\big(\varphi(x)-P_n(\varphi,x)\big)|$$

$$+ m(x)\big(\varphi(x)-P_n(\varphi, x)\big)$$

从而有

$$\|g-P_n(g)\|_1 \leqslant 2\int_0^1 |m(x)\big(\varphi(x)-P_n(\varphi, x)\big)|dx$$

$$\leqslant 2\|m\|_\infty\|\varphi-P_n(\varphi)\|_1$$

证毕。

命题2　设 $S_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$ $(k\in N)$，$S_0=0$，则对 $x\in[0, 1]$ 有

$$\sum_{k=0}^{n}(S_n-S_k)p_{nk}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-x)^k}{k}.$$

证明　由于

$$S_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}=\sum_{j=0}^{k-1}\int_0^1\xi^j d\xi=\int_0^1\frac{1-\xi^k}{1-\xi}d\xi$$

所以

$$S_n-S_k=\int_0^1\frac{\xi^k-\xi^n}{1-\xi}d\xi$$

因此有

$$\sum_{k=0}^{n}(S_n-S_k)p_{nk}(x)=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\frac{\xi^k-\xi^n}{1-\xi}p_{nk}(x)d\xi$$

$$=\int_0^1\frac{\big((1-x)(1-\xi)+\xi\big)^n-\xi^n}{1-\xi}d\xi$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(1-x)^k\int_0^1(1-\xi)^{k-1}\xi^{n-k}d\xi$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-x)^k}{k}$$

证毕。

命题3　设 $L_1(x)=\ln x$，$L_2(x)=\ln(1-x)$，则有

$$\int_0^1|P_n(L_j, x)-L_j(x)|dx\leqslant\frac{5}{n}\qquad (j=1, 2).$$

证明　我们只证 $L_1(x)=\ln x$ 的情况，因为

$$P_n(L_1, x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\ln t\,dt$$

$$=ln\left(e^{-1}\frac{1}{n+1}\right)p_{n0}(t)+\sum_{k=1}^{n}ln\left(e^{-1}(1+\frac{1}{k})^{k}(\frac{k+1}{n+1})\right)p_{nk}(x)$$

又对$x\in(0,1)$有

$$ln x=ln\left(1-(1-x)\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{k}}{k}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n}(S_n-S_k)p_{nk}(x)-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1-x)^{k}}{k}$$

所以

$$P_n(L_1,x)-L_1(x)=p_{n0}(x)\left(ln(e^{-1}\frac{1}{n+1})+S_n\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}p_{nk}(x)\left\{ln\left(e^{-1}(1+\frac{1}{k})^{k}\frac{k+1}{n+1}\right)+(S_n-S_k)\right\}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1-x)^{k}}{k}$$

$$=p_{n0}(x)r_{n0}+\sum_{k=1}^{n}r_{nk}p_{nk}(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1-x)^{k}}{k}$$

其中

$$r_{n0}=ln(e^{-1}\frac{1}{n+1})+S_n$$

$$r_{nk}=ln\left(e^{-1}(1+\frac{1}{k})^{k}\frac{k+1}{n+1}\right)+S_n-S_k \qquad (k\geqslant 1)$$

注意到Euler常数

$$C=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-ln(1+\frac{1}{k})\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(-1)^{j}}{j}(\frac{1}{k})^{j}\right)>0$$

记

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-ln(1+\frac{1}{k})\right)$$

则有

$$\frac{1}{2k}-\frac{1}{6k^2}+\frac{1}{6(n+1)^2}-\frac{1}{n+1}\leqslant C_n-C_k\leqslant\frac{1}{2k}$$

又

$$-\frac{1}{2k}\leqslant ln\left(e^{-1}(1+\frac{1}{k})^{k}\right)\leqslant-\frac{1}{2k}+\frac{1}{3k^2}$$

所以得到

$$-\frac{1}{6k^2}+\frac{1}{6(n+1)^2}-\frac{1}{n+1}\leqslant r_{nk}\leqslant\frac{1}{3k^2},$$

或 $|r_{nk}|\leqslant\frac{1}{3k^2}+\frac{1}{n+1}(0<k<n)$。而$|r_{n0}|=1-C_n<ln2$，及$|r_{nn}|=1-ln(1+\frac{1}{n})^{n}\leqslant 1-ln2$，

因而有

$$|P_n(L_1,x)-L_1(x)|\leqslant(1-x)^n|r_{n0}|+\sum_{k=1}^{n}|r_{nk}|p_{nk}(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1-x)^k}{k}$$

$$\leqslant(1-x)^n ln2+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3k^2}+\frac{1}{n+1}\right)p_{nk}(x)+(1-ln2)x^n+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1-x)^k}{k},\quad x\in(0,1)$$

于是得到

$$\int_0^1|P_n(L_1,x)-L_1(x)|dx$$

$$<\frac{ln2}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3k^2}+\frac{n-1}{(n+1)^2}+\frac{1-ln2}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{5}{n}.$$

另一个估计式可类似进行，证毕。

命题4 设$h\in BV(I)$且$h(0)=h(1)=0$，若

$$g(x)=\int^x\frac{h(t)}{t(1-t)}dt+const$$

则有

$$\|P_n(g)-g\|_1\leqslant\frac{C}{n}\left(\|h\|_\infty+\overset{1}{\underset{0}{V}}(h)\right)$$

其中C是与g，n无关的正常数。

证明 由于$P_n(1,x)=1$和

$$g(x)=const+\int_\xi^1\frac{h(t)}{t}dt-\int_x^1\frac{h(t)}{t}dt+\int_0^x\frac{h(t)}{1-t}dt-\int_0^\xi\frac{h(t)}{1-t}dt$$

$$=const-\int_x^1\frac{h(t)}{t}dt+\int_0^x\frac{h(t)}{1-t}dt$$

所以不失一般性可设上式中的常数为零，又因$h\in BV(I)$，则可设h是不减的(但不能认为$h(0)=0$)。令

$$m(t)=h(t)-h(0)$$

则有

$$g(x)=-\int_x^1\frac{h(t)}{t}dt+\int_0^x\frac{h(t)}{1-t}dt$$

$$=-\int_x^1\frac{m(t)}{t}dt+\int_0^x\frac{m(t)}{1-t}dt-h(0)ln(1-x)+h(0)lnx$$

$$\triangleq-g_1(x)-g_2(x)-h(0)L_2(x)+h(0)L_1(x)$$

其中

$$g_1(x)=\int_x^1\frac{m(t)}{t}dt,\qquad g_2(x)=-\int_0^x\frac{m(t)}{1-t}dt.$$

由于$m(t)\geqslant0$，所以$g_1(x)$不增，于是对任何$x_0\in(0,1)$有

$$g_1(x)-g_1(x_0)=\int_x^{x_0}\frac{m(t)}{t}dt\leqslant m(x_0)(lnx_0-lnx)$$

由命题1和命题3得到

$$\|P_n(g_1)-g_1\|_1\leqslant 2\|m\|_\infty\|P_n(L_1)-L_1\|_1\leqslant\frac{10}{n}\bigvee_0^1(h)$$

类似地有

$$\|P_n(g_2)-g_2\|_1\leqslant\frac{10}{n}\bigvee_0^1(h)$$

从而有

$$\|P_n(g)-g\|_1\leqslant\|P_n(g_1)-g_1\|_1+\|P_n(g_2)-g_2\|_1+|h(0)|\ \big(\|P_n(L_1)-L_1\|_1$$

$$+\|P_n(L_2)-L_2\|_1\big)$$

$$\leqslant\frac{C}{n}\Big(\bigvee_0^1(h)+\|h\|_\infty\Big)$$

其中C与g，n无关的正常数，证毕。

现在设$g\in U_1$，则$\varphi g'\in BV(I)$，若记$h=\varphi g'$得到

$$g(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{h(t)}{t(1-t)}dt+\text{const}$$

因此由命题4得到（2．14）证毕。

最后由定理2．14和定理2．1及推论2．2得到

推论2．10 设$\{T_n\}_{n\in N}$是$X_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）到自身内一致有界线性算子列，若对$r\in N$存在$\varphi_n\to0^+$（$n\to+\infty$）和正常数C_1使得对$\forall g\in X_p^r(D)$和$n\in N$有

$$\|T_ng-g\|_p\leqslant C_1\varphi_n^r\|g^{(r)}\|_p,$$

则对每个$f\in X_p(D)$和$n\in N$有

$$\|T_nf-f\|_p\leqslant C_2\omega_r(f,\ \varphi_n)_p.$$

若对$r\in N$存在$\varphi_n\to0^+$（$n\to+\infty$）和正常数C_1使得对$\forall g\in X_p^r(D)$和$n\in N$有

$$\|T_ng-g\|_p\leqslant C_1\varphi_n^r\|g\|_p,$$

则对每个$f\in X_p(D)$和$n\in N$有

$$\|T_nf-f\|_p\leqslant C_2\Big\{\min(1,\ \varphi_n^r)\|f\|_p+\omega_r(f,\ \varphi_n)_p\Big\}$$

其中C_2是依赖于r，p的正常数。

2．3 L_p空间正算子逼近的量化定理

设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$（$p\geqslant1$）到自身内的正线性算子列，本节应用逼近转化定理及其推论研究L_n对$L_p(D)$逼近的量化估计。

首先讨论由 Bernes—DeVore得到的，关于压缩正线性算子逼近的量化定理，为此需

要如下一些引理，设$f\in L_p(D)$（$p\geqslant 1$），记

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\geqslant 0 \\ 0 & f(x)<0 \end{cases}$$

和$f_-(x)=f_+(x)-f(x)$，于是

$$L_n(f,\ x)=L_n(f_+,\ x)-L_n(f_-,\ x)$$

所以

$$L_n(f,\ x)_+\leqslant L_n(f_+,\ x) \qquad (2.15)$$

易见，当$p\geqslant 1$时有

$$\|L_n(f)_+-f_+\|_p\leqslant\|L_n(f)-f\|_p \qquad (2.16)$$

引理2.12 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$（$p\geqslant 1$）到自身内的压缩正线性算子列，则对每个$f\in L_p(D)$和$n\in N$有

$$\|L_n(f_+)-f_+\|_p\leqslant p^{\frac{1}{p}}\|L_n(f)-f\|_p^{\frac{1}{p}}\|f\|_p^{1-\frac{1}{p}}+\|L_n(f)-f\|_p \qquad (2.17)$$

证明　因为对$\alpha,\ \beta>0$时，有

$$(\alpha+\beta)^p\geqslant\alpha^p+\beta^p$$

所以对$g,\ h\geqslant 0$有

$$\|g+h\|_p^p\geqslant\|g\|_p^p+\|h\|_p^p$$

取$g=L_n(f)_+\geqslant 0$，$h=L_n(f_+)-L_n(f)_+\geqslant 0$，则有

$$\|L_n(f_+)-L_n(f)_+\|_p^p\leqslant\|L_n(f_+)\|_p^p-\|L_n(f)_+\|_p^p\leqslant\|f_+\|_p^p\|L_n\|^p-\|L_n(f)_+\|_p^p$$

$$\leqslant\|f_+\|_p^p-\|L_n(f)_+\|_p^p \qquad (2.18)$$

注意到当$p\geqslant 1$，$t\geqslant 1$时有

$$t^p-1\leqslant pt^{p-1}(t-1)$$

而

$$\|L_n(f)_+\|_p\leqslant\|L_n(f_+)\|_p\leqslant\|f_+\|_p$$

令

$$t=\frac{\|f_+\|_p}{\|L_n(f)_+\|_p}\geqslant 1$$

[illegible]

$$\|f_+\|_p^p-\|L_n(f)_+\|_p^p\leqslant p\|f_+\|_p^{p-1}(\|f_+\|_p-\|L_n(f)_+\|_p)$$

$$\leqslant p\|f_+\|_p^{p-1}\|f_+-L_n(f)_+\|_p$$

$$\leqslant p\|f_+\|_p^{p-1}\|L_n(f)-f\|_p$$

由（2.18）导出

$$\|L_n(f_+)-L_n(f)_+\|_p \leqslant p^{\frac{1}{p}}\|f_+\|_p^{1-\frac{1}{p}}\|L_n(f)-f\|_p^{\frac{1}{p}}$$

因而得到

$$\|L_n(f_+)-f_+\|_p \leqslant \|L_n(f_+)-L_n(f)_+\|_p+\|L_n(f)_+-f_+\|_p$$

$$\leqslant p^{\frac{1}{p}}\|f\|_p^{1-\frac{1}{p}}\|L_n(f)-f\|_p^{\frac{1}{p}}+\|L_n(f)-f\|_p$$

证毕。

特别地，当p=1时由（2．17)导出

$$\|L_n(f_+)-f_+\|_1 \leqslant 2\|L_n(f)-f\|_1$$

引理2．18 若 $f\in L_p^2(D)$，则有

$$\max(\|f\|_\infty,\ \|f'\|_\infty)\leqslant C_p\|f\|_{p,2} \qquad (2.19)$$

其中C_p是与f无关的正常数.

证明 因为 $f\in L_p^2(D)$，所以对$\forall x,\ t\in D$有

$$|f(x)|\leqslant|f(t)|+\left|\int_t^x f'(u)du\right|\leqslant|f(t)|+(b-a)\|f'\|$$

关于t积分并应用Hölder不等式得到，对$\forall x\in D$，有

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(t)|dt+(b-a)\|f'\|_\infty$$

$$\leqslant\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\|f\|_p+(b-a)\|f'\|_\infty$$

因此得到

$$\|f\|_\infty\leqslant(b-a)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p+(b-a)\|f'\|_\infty \qquad (2.20)$$

其次，类似于引理2．5的证明，取 $N=\min\left\{n\,|\,\frac{b-a}{n}<\varepsilon\right\}$，则有 $\frac{\varepsilon}{2}\leqslant h=\frac{b-a}{N}\leqslant\varepsilon$.

令$x_i=a+ih$，$D_i=[x_i,\ x_{i+1}]$ 则对$\forall x\in D_i$有

$$|f'(x)|\leqslant\left(\frac{36}{\varepsilon^2}\|f\|_p+\|f''\|_p\right)h^{1-\frac{1}{p}}$$

于是得到

$$\|f'\|_\infty\leqslant\left(\frac{36}{\varepsilon^2}\|f\|_p+\|f''\|_p\right)h^{1-\frac{1}{p}}$$

因此存在与f无关的正常数C_p使得

$$\max(\|f\|_\infty,\ \|f'\|_\infty)\leqslant C_p(\|f\|_p+\|f''\|_p)$$

证毕。

引理2.14 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)(p\geq 1)$到自身内的压缩正线性算子列，若对$x\in D$有

$$f(x)=\int_a^b (x-u)_+ f''(u)du$$

则有

$$\|L_n(f)-f\|_p\leq C_p\lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}}\|f''\|_p \qquad (2.21)$$

更一般地，若对$x\in D$有

$$f(x)=\int_a^b (x-u)_+ df'(u)$$

其中$f'\in BV[a,b]$，则有

$$\|L_n(f)-f\|_p\leq C_p\lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}}\bigvee_a^b(f') \qquad (2.22)$$

这里$\lambda_{n,p}^2=\max\limits_{k=0,1}\|L_n(e_k)-e_k\|_p$。

证明 因为对$t\in D$有

$$f(t)=\int_a^b (t-u)_+ f''(u)du$$

所以对$n\in N$和$x\in D$有

$$L_n(f,x)-f(x)=\int_a^b\Big(L_n\big((t-u)_+,x\big)-(x-u)_+\Big)f''(u)du$$

应用Minkowski不等式得到

$$\|L_n(f)-f\|_p\leq\int_a^b\|L_n((t-u)_+,\cdot)-(\cdot-u)_+\|_p|f''(u)|du$$

$$\leq\|f''\|_1\sup_{u\in D}\|L_n((t-u)_+,\cdot)-(\cdot-u)_+\|_p=\|f''\|_1\,\alpha_{n,p}^2$$

其中$\alpha_{n,p}^2=\sup\limits_{u\in D}\|L_n((t-u)_+,\cdot)-(\cdot-u)_+\|_p$。

由引理2.12得到，对$u\in D$有

$$\|L_n((t-u)_+,\cdot)-(\cdot-u)_+\|_p\leq$$

$$\leq p^{\frac{1}{p}}\|L_n(t-u,\cdot)-(\cdot-u)\|_p^{\frac{1}{p}}\|\cdot-u\|_p^{1-\frac{1}{p}}\|L_n((t-u)_+,\cdot)-(\cdot-u)\|_p$$

$$\leq C(\lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}}+\lambda_{n,p}^2)\leq C_1\lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}}$$

所以有

$$\|L_n(f)-f\|_p \leqslant C_1(b-a)^{1-\frac{1}{p}} \lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}} \|f''\|_p$$

取$C_p = C_1(b-a)^{1-\frac{1}{p}}$得到估计式（2．21），类似地可得到估计式（2．22）证毕．

引理2．15 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$（$p\geqslant 1$）到自身内的压缩正线性算子列，则存在依赖于p的正数C_p使得对每个$g\in L_p^2(D)$和充分大的$n\in N$有

$$\|L_n(g)-g\|_p \leqslant C_p \lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}} \|g\|_{p,2} \qquad (2.23)$$

其中$\|g\|_{p,2}=\|g\|_p+\|g''\|_p$。

证明　因为$g\in L_p^2(D)$所以对$\forall t,\ x\in D$有

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+\int_x^b (t-u)_+ g''(u)du.$$

于是对$x\in D$有

$$L_n(g,\ x)-g(x)=g(x)\big(L_n(1,\ x)-1\big)+g'(x)L_n\big((t-x),\ x\big)$$

$$+\int_x^b \Big\{L_n\big((t-u)_+,\ x\big)-(x-u)_+\Big\} g''(u)du$$

从而

$$|L_n(g,\ x)-g(x)| \leqslant \|g\|_\infty |L_n(1,\ x)-1|+\|g'\|_\infty |L_n(t-x,\ x)|$$

$$+\int_a^b \big| L_n\big((t-u)_+,\ x\big)-(x-u)_+\big| |g''(u)|du$$

因此由Minkowski不等式和引理2．13—2．14得到

$$\|L_n(g)-g\|_p \leqslant C(\|g\|_\infty+\|g'\|_\infty)\lambda_{n,p}^{\frac{1}{p}}+C_1\lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}}\|g''\|_p$$

$$\leqslant C_p\lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}}(\|g\|_p+\|g''\|_p)$$

$$= C_p\lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}}\|g\|_{p,2}$$

证毕。

由逼近转化定理的推论2．10得到如下定理

定理2．16（Bernes—DeVore） 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）到自身内压缩正线性算子列，且$\lambda_{n,p}\to 0$（$n\to+\infty$），则对每个$f\in L_p(D)$和充分大n有

$$\|L_n(f)-f\|_p \leqslant C_p\Big\{\lambda_{n,p}^{\frac{2}{p}}\|f\|_p+\omega_2(f,\ \lambda_{n,p}^{\frac{1}{p}})_p\Big\} \qquad (2.24)$$

其中C_p是与f，n无关的正常数。

特别地，若$L_n(1,x)=1$，则有

$$\|L_n(f)-f\|_p\leqslant C_p'\left\{\lambda_{n1}^{\frac{1}{p}}\omega_1(f,b-a)_p+\omega_2(f,\lambda_{n1}^{\frac{1}{p}})_p\right\}\qquad(2.25)$$

证明　估计式（2.24）是引理2.15和推论2.10的自然结果，现在我们证明估计式（2.25），由于$L_n(1,x)\equiv1$，所以

$$|L_n((t-u)_+,x)-(x-u)_+|\leqslant2(b-a)$$

于是

$$\alpha_n^{\frac{1}{p}}\leqslant2^{1-\frac{1}{p}}(b-a)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|L_n((t-u)_+,x)-(x-u)_+|dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant2(b-a)^{1-\frac{1}{p}}\|L_n(e_1)-e_1\|_1^{\frac{1}{p}}\leqslant2(b-a)^{1-\frac{1}{p}}\lambda_{n1}^{\frac{1}{p}}.$$

因此当$L_n(1,x)\equiv1$时估计（2.23）改为：对$\forall g\in L_p^1$有

$$\|L_n(g)-g\|_p\leqslant C_p^1\lambda_{n1}^{\frac{1}{p}}\|g\|_{p,1}$$

于是对每个$f\in L_p(D)$和任何实数β有

$$\|L_n(f)-f\|_p=\|L_n(f-\beta)-(f-\beta)\|_p$$

$$\leqslant C_p^1(\lambda_{n1}^{\frac{1}{p}}\|f-\beta\|_p+\omega_2(f,\lambda_{n1}^{\frac{1}{p}})_p)$$

由于

$$\inf_{\beta\in R}\|f-\beta\|_p\leqslant C'\omega_1(f,b-a)_p$$

所以得到

$$\|L_n(f)-f\|_p\leqslant C_p'\left\{\lambda_{n1}^{\frac{1}{p}}\omega_1(f,b-a)_p+\omega_2(f,\lambda_{n1}^{\frac{1}{p}})_p\right\}$$

其中C_p'是与n，f无关的正常数，证毕。

例1　设$\{P_n\}_{n\in N}$是Bernstein—Kantorovich算子列，对$f\in L_p[0,1]$（$p\geqslant1$）有

$$P_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(u)du\right)p_{nk}(x)$$

令$F(x)=\int_0^x f(u)du$，则

$$P_n(f, x) = \frac{d}{dx} B_{n+1}(F, x)$$

我们知道 $\{P_n\}_{n\in N}$ 是 $L_p[0, 1]$ 到自身的压缩正线性算子列，由于对 $\forall x\in[0, 1]$ 有

$$P_n(1, x)=1$$

$$P_n(t, x)=x+\frac{1-2x}{2(n+1)}$$

所以有

$$\lambda_{n,1}^1 = \|P_n(e_1)-e_1\|_1 = \int_0^1 |P_n(t, x)-x|dx$$

$$= \int_0^{\frac12} \frac{1-2x}{2(n+1)}dx + \int_{\frac12}^1 \frac{2x-1}{2(n+1)}dx$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{n+1}$$

因此由定理2.15中的（2.25）得到

系1 对每个 $f\in L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）有

$$\|P_n(f)-f\|_p\leqslant C_p\left\{\frac{1}{n}\omega_1(f;\ 1)_p+\omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p\right\}.$$

下面我们举例说明，当 $L_n(1, x)=1$ 时，估计式（2.32）中的阶是不可改善的，

例2 对每个 $f\in L_p[-1, 1]$（$p\geqslant1$），令

$$L_n(f, x)=\begin{cases} f(x) & |x|\leqslant 1-\frac{1}{n} \\ f(-x) & 1-\frac{1}{n}<|x|\leqslant 1 \end{cases}.$$

明显地，$\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $L_p[-1,1]$ 到自身内的压缩正线性算子，且对 $\forall x\in[-1, 1]$ 有 $L_n(1, x)=1$，由于

$$\lambda_{n,1}^1 = \int_{-1}^1 |L_n(t, x)-x|\,dx=2\int_{1-\frac{1}{n}}^1 |2x|dx$$

$$=2\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right) \sim 4\frac{1}{n} \qquad (n\to+\infty)$$

因此由（2.25）得到

系2 对每个 $f\in L_p[-1, 1]$（$p\geqslant1$）和充分大的 $n\in N$ 有

$$\|L_n(f)-f\|_p\leqslant C_p\{n^{-\frac{1}{p}}\omega_1(f, 2)_p+\omega_2(f, n^{-\frac{1}{2p}})_p\}$$

特别取 $f_0(x)=x_+^1$，则 $f_0\in L_p[-1, 1]$ 且有

$$\omega_2(f_0, n^{-\frac{1}{2p}})_p=n^{-\frac{1}{p}}$$

又

$$\|L_n(f_0)-f_0\|_p=\left(\int_{1-\frac{1}{n}}^1 |2x|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\asymp n^{-\frac{1}{p}}$$

可见定理2.15中的估计式(2.25)中的阶是不可改善的。

其次，应当指出若$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$ ($p\geqslant 1$)上的正线性算子列但非压缩的，或$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$到$L_p(D_1)$ ($D_1=[c,d]\subset D$)内的压缩正线性算子列，定理2.15作适当的修改，为此记

$$\widetilde{\alpha}_{np}^{2}=\sup_{u\in D_1}\|L_n((t-u)_+,\cdot)-(\cdot-u)_+\|_p,$$

$$\widetilde{\lambda}_{np}^{2}=\max\left(\max_{k=0,1}\|L_n(e_k)-e_k\|_{L_p(D_1)},\ \widetilde{\alpha}_{np}^{2}\right).$$

利用度量$\widetilde{\lambda}_{np}^{2}$代替$\lambda_{np}^{\frac{2}{p}}$与引理2.15同样证明得到

引理2.16 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$ ($p\geqslant 1$)到$L_p(D_1)$内一致有界正线性算子列，则存在仅依赖于p的正常数C_p使得对每个$g\in L_p^2(D)$和充分大的n有

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)}\leqslant C_p\widetilde{\lambda}_{np}^{2}\|g\|_{p,2}$$

因此由逼近转化原理有

定理2.16 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$到$L_p(D_1)$内一致有界正线性算子列，且$\widetilde{\lambda}_{np}\to 0^+$ ($n\to+\infty$)，则对每个$f\in L_p(D)$ ($p\geqslant 1$)和充分大的n有

$$\|L_n(f)-f\|_{L_p(D_1)}\leqslant C_p\{\widetilde{\lambda}_{np}^{2}\|f\|_p+\omega_2(f,\widetilde{\lambda}_{np})_p\}$$

其中C_p是依赖于p的正常数。

例3 设$\{K_n\}_{n\in N}$是Kantorovich算子例：对$f\in L_p[0,1]$和$n\in N$有

$$K_n(f,x)=(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(u)du,\qquad x\in\left[\frac{k}{n+1},\frac{k+1}{n+1}\right)$$

又因$K_n(1,x)=1$，所以

$$\lambda_{np}^{2p}=\|K_n(e_1)-e_1\|_p^p=\int_0^1|K_n(t,x)-x|^pdx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\left|\frac{k+\frac{1}{2}}{n+1}-x\right|dx$$

$$=\frac{1}{2^p}\frac{1}{p+1}\frac{1}{(n+1)^p}$$

即$\lambda_{np}^{2}\sim\frac{1}{2}(p+1)^{-\frac{1}{p}}\frac{1}{n}$ ($n\to+\infty$)，其次，当$u\in\left(\frac{k_0}{n+1},\frac{k_0+1}{n+1}\right)$时，有

$$\|K_n((t-u)_+,\cdot)+(\cdot-u)_+\|_p^p=\int_0^1|K_n((t-u)_+,x)-(x-u)_+|^pdx$$

$$= \int_u^{\frac{k_0+1}{n+1}} \left|(n+1)\int_u^{\frac{k_0+1}{n+1}}(t-u)dt-(x-u)\right|^p dx +$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{n}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\left|(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}(t-u)dt-(x-u)\right|^p dx$$

$$= \int_u^{\frac{k_0+1}{n+1}} \left|(n+1)\int_u^{\frac{k_0+1}{n+1}}(t-u)dt-(x-u)\right|^p dx +$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{n}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\left|(n+1)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}tdt-x\right|^p dx$$

可见 $\|K_n((t-u)_+,\ \cdot)-(\cdot-u)_+\|_p^p$ 是 $u\in[0,\ 1)$ 的减少函数，因此有

$$\alpha_{np}^2=\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\|K_n((t-u)_+,\ \cdot)-(\cdot-u)_+\|_p$$

$$\|K_n(e_1)-e_1\|_p=\lambda_{np}^2\sim\frac{1}{2}(p+1)^{-\frac{1}{p}}\frac{1}{n}\quad(n\to+\infty)$$

于是由定理2．16有

系3 设 $D_1\Subset[0,\ 1]$，则对每个 $f\in L_p[0,\ 1]$ 和充分大的n有

$$\|K_n(f)-f\|_{L_p(D_1)}\leqslant C_p\left\{\frac{1}{n}\omega_1(f,\ 1)_p+\omega_2\left(f,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p\right\}.$$

2．4 $X_p(D)$空间正算子逼近的Freud定理

设 $D_1\subset D$，$\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $X_p(D)$ 到 $X_p(D_1)$ 内的正线性算子列，本节应用逼近转化定理讨论正线性算子 L_n 对 $X_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）逼近度的量化估计，这个工作是由C．Freud开创的，

首先讨论C(D)空间的情况，由Korovkin定理的启发，G，Freud选取

$$\mu_n^2=\max_{k=0,1,2}\|L_n(e_k)-e_k\|_{C(D_1)}$$

为尺度建立量化估计定理，我们有

引理2.17 设 $\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到 $C(D_1)$内的正线性算子列，则对每个 $g\in C^2(D)$有

$$\|L_n(g)-g\|_{C(D_1)}\leqslant C\mu_n^2\|g\|_{\infty 2} \qquad (2.26)$$

其中$\|g\|_{\infty 2}=\|g\|_{C(D)}+\|g''\|_{C(D)}$，而$C$是与$n,g$无关的正常数。特别地，若$L_n(1,\cdot x)=1$，$L_n(t,x)=x \quad (x\in D_1)$，则有

$$\|L_n(g)-g\|_{C(D_1)}\leqslant C\mu_n^2\|g''\|_{C(D)} \qquad (2.27)$$

证明 由Taylor展开，对$\forall t\in D$，$x\in D_1$有

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+\int_x^t(t-u)g''(u)du$$

于是有

$$|L_n(g,x)-g(x)|\leqslant|g(x)||L_n(1,x)-1|+|g'(x)||L_n(t-x,x)|$$

$$+\|g''\|_{C(D)}\frac{1}{2}L_n((t-x)^2,x)$$

由引理2.5导出

$$\|L_n(g)-g\|_{C(D_1)}\leqslant C\mu_n^2(\|g\|_{C(D)}+\|g''\|_{C(D)})$$

$$=C\mu_n^2\|g\|_{\infty 2}$$

因此得到（2.26），关于估计（2.27）是明显的，证毕。

由引理2.17和推论2.10得到

定理2.17（G. Freud） 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(D)$到$C(D_1)$内一致有界正线性算子列且 $\mu_n^2\to 0$（$n\to+\infty$），则对每个$f\in C(D)$和充分大的n有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_1)}\leqslant C\{\mu_n^2\|f\|_{C(D)}+\omega_2(f,\mu_n)\}$$

特别地，若$L_n(1,x)=1$，$L_n(t,x)=x$ $(x\in D_1)$，则有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_1)}\leqslant C\omega_2(f,\mu_n).$$

例1 设$d\lambda_n(t)$是〔$-1,1$〕上非负，偶的Borel测度且

$$\int_{-1}^1 d\lambda_n(t)=1$$

对$f\in C〔-\frac{1}{2},\frac{1}{2}〕$和$n\in N$引入代数卷积算子：

$$L_n(f,x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)d\lambda_n(t-x), \quad x\in〔-\frac{1}{2},\frac{1}{2}〕,$$

记

$$\alpha_n^2=\int_{-1}^1 t^2d\lambda_n(t)$$

设$D_\delta=〔-\delta,\delta〕$（$0<\delta<\frac{1}{2}$），由于对$\forall x\in D_\delta$有

$$\mu_n^2(x)=L_n((t-x)^2, x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(t-x)^2 d\lambda_n(t-x)$$

$$\leqslant \int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x} t^2 d\lambda_n(t) \leqslant \int_{-1}^{1} t^2 d\lambda_n(t)=\alpha_n^2$$

于是 $\max\limits_{x\in D_\delta} L_n((t-x)^2, x)\leqslant \alpha_n^2$

又对 $\forall x\in D_\delta$ 有

$$L_n(1, x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\lambda_n(t-x)=\int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x} d\lambda_n(t)$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} d\lambda_n(t)=1$$

和

$$1-L_n(1, x)=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}-x} d\lambda_n(t)+\int_{\frac{1}{2}-x}^{1} d\lambda_n(t)$$

$$\leqslant \int_{-1}^{-\frac{1}{2}+\delta} d\lambda_n(t)+\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1} d\lambda_n(t)$$

$$\leqslant 2\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1} d\lambda_n(t)\leqslant \frac{1}{(\frac{1}{2}-\delta)^2}\int_{-1}^{1} t^2 d\lambda_n(t)$$

$$=\frac{\alpha_n^2}{(\frac{1}{2}-\delta)^2}$$

于是有

$$\|e_0-L_n(e_0)\|_{C(D_\delta)}\leqslant \frac{\alpha_n^2}{(\frac{1}{2}-\delta)^2}$$

此外，对 $\forall x\in D_\delta$ 有

$$|L_n(t-x, x)|=\left|\int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x} t d\lambda_n(t)\right|\leqslant \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1} t d\lambda_n(t)$$

$$\leqslant \frac{1}{(\frac{1}{2}-\delta)}\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1} t^2 d\lambda_n(t)\leqslant \frac{\alpha_n^2}{2(\frac{1}{2}-\delta)}$$

于是

$$\max_{x\in D_\delta}|L_n(t-x, x)|\leqslant \frac{\alpha_n^2}{2(\frac{1}{2}-\delta)}.$$

因此每个 $\delta\in(0, \frac{1}{2})$ 存在正常数 C_1 使得

$$\mu_n^2=\max_{k=0, 1, 2}\|L_n(e_k)-e_k\|_{C(D_\delta)}\leqslant C_\delta\alpha_n^2$$

由定理2．17

系1 设 $\delta\in(0, \frac{1}{2})$，$\alpha_n\to 0^+$（$n\to+\infty$），则存在正常数 C_δ 使得对每个 $f\in C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 和充分大的n有

$$\|L_n(f)-f\|_{C[-\delta, \delta]}\leqslant C_\delta\{\alpha_n^2\|f\|_{C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}+\omega_2(f, \alpha)\}$$

例2 设 Φ_n 是修正的Landau算子，即对 $f\in C[0, 1]$ 有

$$\Phi_n(f, x)=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}\int_{-1}^{1} f(x+tx(1-x))(1-t^2)^n dt, \qquad x\in[0, 1]$$

由于$\Phi_n(1, x)=1$，$\Phi_n(t, x)=x$和

$$\Phi_n(t^2, x)-x^2=\Phi_n((t-x)^2, x)=\frac{(x(1-x))^2}{2n+3}$$

所以

$$\mu_n^2=\max_{k=0,1,2}\|\Phi_n(e_k)-e_k\|_{C[0,1]}\leqslant\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{n}.$$

因此，由定理2.17得到

系2 设$\{\Phi_n\}_{n\in N}$是修正的Landan算子列，则对每个$f\in C[0,1]$和充分大的n有

$$\|\Phi_n(f)-f\|C[0,1]\leqslant C\omega_2(f, \frac{1}{\sqrt{n}})$$

其中C是与f，n无关的正常数。

其次讨论$L_p(D)$（$p\geqslant 1$）空间的情况，令

$$\mu_{n,p}^2=\max_{k=0,1,2}\|L_n(e_k)-e_k\|_{L_p(D_1)}$$

1978年Bernes—DeVore首先建立Freud型量化估计，为此需要证明如下引理，然后应用逼近转化定理，

引理2.18 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)(p\geqslant 1)$到$L_p(D_1)$内一致有界正线性算子列且$\mu_{n,p}^2\to 0$，

则对每个$g\in L_p^2(D)$和充分大的$n\in N$有

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)}\leqslant C_p\mu_{n,p}^{\frac{4p}{2p+1}}\|g\|_2$$

其中C_p是与f，n无关的正常数。

证明 对$g\in L_p^2(D)$加以延拓使得当$x\notin[a, b]$时，$g''(x)=0$，由Taylor展开式，对$\forall t\in D$和$x\in D_1$有

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+\int_x^t(t-u)g''(u)du$$

于是

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)}\leqslant\|g\|_\infty\|L_n(e_0)-e_0\|_{L_p(D_1)}+\|g'\|_\infty\|L_n(t-x,x)\|_{L_p(D_1)}+$$

$$+\|L_n(\int_x^t(t-u)g''(u)du, x)\|_{L_p(D_1)}$$

由引理2.13得到

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)}\leqslant C\mu_{n,p}^2\|g\|_{p2}+\|L_n(\int_x^t(t-u)g''(u)du, x)\|_{L_p(D_1)}$$

对任意固定$\delta>0$，当$|t-x|\leqslant\delta$时，有

$$\left|\int_x^t(t-u)g''(u)du\right|\leqslant\delta\int_0^\delta|g''(x+u)|du,$$

而当$|t-x|>\delta$时，由Hölder不等式得到

$$\left|\int_x^t (t-u)g''(u)du\right| \leq |t-x|^{2-\frac{1}{p}}\|g''\|_p \leq \frac{(t-x)^2}{\delta^{\frac{1}{p}}}\|g''\|_p$$

因此，对$\forall t\in D$, $x\in D_1$，有

$$\left|\int_x^t (t-u)g''(u)du\right| \leq \delta\int_0^\delta |g''(x+u)|du + \frac{(t-x)^2}{\delta^{\frac{1}{p}}}\|g''\|_p$$

于是导出

$$\left\|L_n\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du,\ x\right)\right\|_{L_p(D_1)} \leq \left\|\delta L_n(e_0,\ x)\int_0^\delta |g''(x+u)|du\right\|_{L_p(D_1)}$$

$$+\frac{\|g''\|_p}{\delta^{\frac{1}{p}}}\left\|L_n((t-x)^2,\ x)\right\|_{L_p(D_1)} \leq \delta\left\|\int_0^\delta |g''(x+u)|du\right\|_p$$

$$+\delta\left\|(L_n(e_0)-e_0)\int_0^\delta |g''(x+u)|du\right\|_{L_p(D_1)} + \frac{\|g''\|_p}{\delta^{\frac{1}{p}}}\left\|L_n((t-x)^2,x)\right\|_{L_p(D_1)}$$

$$\leq \delta\int_0^\delta \|g''(x+u)\|_p du + \|g''\|_p\delta^{2-\frac{1}{p}}\|L_n(e_0)-e_0\|_{L_p(D_1)}$$

$$+\frac{\|g''\|_p}{\delta^{\frac{1}{p}}}\left\|L_n((t-x)^2,\ x)\right\|_{L_p(D_1)}$$

$$\leq \|g''\|_p C(\delta^2+\delta^{2-\frac{1}{p}}\mu_{np}^2+\delta^{-\frac{1}{p}}\mu_{np}^2)$$

其中C是与δ, n, g无关的正常数，特别取$\delta=\mu_{np}^{\frac{2p}{2p+1}}$得到

$$\left\|L_n\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du,\ x\right)\right\|_{L_p(D_1)} \leq C\|g''\|_p\left(2\mu_{np}^{\frac{4p}{2p+1}}+\mu_{np}^{\frac{2p}{2p+1}}\right)$$

因此对充分大的$n\in N$，有

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)} \leq C\|g\|_{p2}\left(\mu_{np}^2+\mu_{np}^{\frac{4p}{2p+1}}\right) \leq C_1\|g\|_{p2}\mu_{np}^{\frac{4p}{2p+1}}$$

证毕

应用逼近转化定理和推论2.2得到

定理2.18 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$（$p\geq 1$）到$L_p(D_1)$内一致有界正线性算子列且$\mu_{np}\to 0$（$n\to+\infty$），则对每个$f\in L_p(D)$和充分大的$n\in N$有

$$\|L_n(f)-f\|_{L_p(D_1)} \leq C_p\left\{\mu_{np}^{\frac{4p}{2p+1}}\|f\|_p+\omega_2(f,\ \mu_{np}^{\frac{2p}{2p+1}})_p\right\} \qquad (2.28)$$

其中C_p是仅依赖于p的正常数。

比较定理2.17和定理2.18的估计式，人们自然要问估计式（2.28）中的$\mu_{np}^{\frac{2p}{2p+1}}$可否改为$\mu_{np}$呢？这个问题还有待研究，1983年Swetits—Wood引入尺度

$$\hat{\lambda}_{np}^{2}=\max\{\|L_n(e_0)-e_0\|_{L_p(D_1)},\ \|L_n(t-x,\ x)\|_{L_p(D_1)},$$

$$\|L_n((t-x)^2,\ x)\|_{L_p(D_1)}^{\frac{2p}{2p+1}}\}$$

建立了比估计式（2.28）更精确的估计，我们有

引理2.19 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$（$p\geq1$）到$L_p(D_1)$内一致有界正线性算子列且$\hat{\lambda}_{np}\to0^+$（$n\to+\infty$），则对每个$g\in L_p^2(D)$和充分大的$n\in N$有

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)}\leq C_p\hat{\lambda}_{np}^{2}\|g\|_{p,2}$$

其中C_p是仅依赖于p的正常数，

证明与引理2.18一样有

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)}\leq\|g\|_\infty\|L_n(e_0)-e_0\|_{L_p(D_1)}+\|g'\|_\infty\|L_n((t-x),\ x)\|_{L_p(D_1)}$$

$$+\|g''\|_p\left(\delta^2+\delta^{2-\frac{1}{p}}\|L_n(e_0)-e_0\|_{L_p(D_1)}+\frac{1}{\delta^{\frac{1}{p}}}\|L_n((t-x)^2,\ x)\|_{L_p(D_1)}\right)$$

$$\leq C'\|g\|_{p,2}\left(\hat{\lambda}_{np}^{2}+\delta^2+\delta^{2-\frac{1}{p}}\hat{\lambda}_{np}^{2}+\frac{1}{\delta^{\frac{1}{p}}}\hat{\lambda}_{np}^{\frac{2p+1}{p}}\right)$$

特别取$\delta=\hat{\lambda}_{np}$，则对充分大的$n\in N$有

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)}\leq C_p\hat{\lambda}_{np}^{2}\|g\|_{p,2}$$

证毕。

由逼近特化定理及推论2.2得到

定理2.19（Swetits—Wood） 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$（$p\geq1$）到$L_p(D_1)$内一致有界正线性算子列且$\hat{\lambda}_{np}\to0^+$（$n\to+\infty$），则对每个$f\in L_p(D)$和充分大的$n\in N$有

$$\|L_n(f)-f\|_{L_p(D_1)}\leq C_p\left\{\hat{\lambda}_{np}^{2}\|f\|_p+\omega_2(f,\ \hat{\lambda}_{np})_p\right\}\qquad(2.29)$$

作为例子，我们应用估计式（2.29）来建立Wood型卷积算子列$\{W_n\}_{n\in N}$的量化估计

例3 设$\{H_n(y)\}_{n\in N}$是$[-r,\ r]$（$r>0$）上非负，偶的连续函数列且对每个$n\in N$

$$\int_{-r}^{r}H_n(y)dy=1,$$

对$f\in L_p[0,r]$引入Wood型卷积算子W_n:

$$W_n(f,x)=\int_0^r f(t)H_n(t-x)dt \qquad x\in[0,r]$$

明显地$\{W_n\}_{n\in N}$是$L_p[0,r]$ ($p\geq 1$) 到自身压缩正线性算子列，记

$$\alpha_n^2=\int_{-r}^r y^2H_n(y)dy,$$

且设$\alpha\to 0^+$ ($n\to+\infty$)，由计算可得，对$x\in[0,r]$有

$$W_n(1,x)=\int_0^r H_n(t-x)dt\leq 1$$

$$W_n((t-x)^2,x)\leq\int_{-r}^r t^2H_n(t)dt=\alpha_n^2$$

又对任意确定的$\delta\in(0,r)$，当$x\in[\delta,r-\delta]$时，有

$$|W_n(t-x,x)|=\left|\int_0^r(t-x)H_n(t-x)dt\right|$$

$$=\left|\int_{-x}^{r-x}yH_n(y)dy\right|\leq\frac{\alpha_n^2}{\delta}.$$

从而有

$$\|W_n(t-x,x)\|_{L_p[0,r]}=\left(\int_0^r|W_n(t-x,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_0^\delta+\int_\delta^{r-\delta}+\int_{r-\delta}^r |W_n(t-x,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(2r\delta+\int_\delta^{r-\delta}|W_n(t-x,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(2r\delta+r\frac{\alpha_n^{2p}}{\delta^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

取$\delta=\alpha_n^{\frac{2p}{2p+1}}$导出

$$\|W_n(t-x,x)\|_{L_p[0,r]}\leq C_1\alpha_n^{\frac{2}{p+1}}$$

又因为

$$\|W_n(e_0)-e_0\|_{L_p[0,r]}=\left(\int_0^r(1-W_n(1,x))^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\int_0^r(1-W_n(1,x))^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_0^r\left(\int_x^r H_n(y)dy+\int_{r-x}^r H_n(y)dy\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

并注意到

$$\int_0^r\left(\int_x^r H_n(y)dy\right)dx=\int_0^{\delta}dx\int_x^r H_n(y)dy+\int_{\delta}^r dx\int_x^r H_n(y)dy$$

$$\leqslant \delta+\int_{\delta}^r H_n(y)dy\int_{\delta}^y dx\leqslant \delta+\int_{\delta}^r yH_n(y)dy$$

$$\leqslant \delta+\frac{\alpha_n^2}{\delta}$$

类似地估计有

$$\int_0^r dx\int_{r-x}^r H_n(y)dy=\int_0^{r-\delta}dx\int_{r-x}^r H_n(y)dy+\int_{r-\delta}^r dx\int_{r-x}^r H_n(y)dy$$

$$\leqslant \delta+\frac{\alpha_n^2}{\delta}$$

所以有

$$\|W_n(e_0)-e_0\|_{L_p[0,r]}\leqslant\left(2\left(\delta+\frac{\alpha_n^2}{\delta}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

取$\delta=\alpha_n$得到

$$\|W_n(e_0)-e_0\|_{L_p[0,r]}\leqslant 4^{\frac{1}{p}}\alpha_n^{\frac{1}{p}}$$

因此对充分大的$n\in N$有

$$\hat{\lambda}_{np}^2\leqslant\max\left(C_1\alpha_n^{\frac{2}{p+1}},\ 4^{\frac{1}{p}}\alpha_n^{\frac{1}{p}},\ \alpha_n^{\frac{4p}{2p+1}}\right)\leqslant C_p\alpha_n^{\frac{1}{p}}$$

于是由定理2.19得到

系8 （B、Wood）、对每个$f\in L_p[0,r]$（$p\geqslant1$)和充分大的$n\in N$有

$$\|W_n(f)-f\|_{L_p[0,r]}\leqslant C_p\left\{\alpha_n^{\frac{1}{p}}\|f\|_p+\omega_2\left(f,\alpha_n^{\frac{1}{2p}}\right)_p\right\} \qquad (2.30)$$

其中C_p是仅依赖于p的正常数。

应当指出，由于$\{W_n\}_{n\in N}$是$L_p[0,r]$（$p\geqslant1$）到自身内压缩正线性算子列和

$$\lambda_{np}^2=\max_{k=0,1,2}\|W_n(e_k)-e_k\|_{L_p[0,r]}$$

$$\leqslant\max\left(C_1\alpha_n^{\frac{2}{p+1}},\ 4^p\alpha_n^{\frac{1}{p}}\right)\leqslant C_p\alpha_n^{\frac{1}{p}}$$

所以由定理2.15的估计式（2.24)得到：对每个$f\in L_p[0,r]$和充分大的$n\in N$，有

$$\|W_n(f)-f\|_{L_p[0,r]}\leqslant C_p\left\{\alpha_n^{\frac{1}{p^2}}\|f\|_p+\omega_2\left(f,\alpha_n^{\frac{1}{2p^2}}\right)_p\right\} \qquad (2.31)$$

比较估计式（2.30）和（2.31）可见，对于$L_p(D)$到自身内的压缩正线性算子列，定理2.19中的估计式（2.29）优于定理2.15中的估计式（2.24）

最后，记

$$\mu_n^2=\|L_n((t-x)^2,x)\|_{L_\infty(D)},$$

并取

$$\tilde{\mu}_{n,p}^{2}=\max\left(\|L_n(e_2)-e_2\|_{L_p(D_1)},\ \|L_n(t-x,\ x)\|_{L(D_1)},\ \mu_n^{\frac{2}{p}}\right)$$

为尺度，对于非压缩正线性算子列得到一个新的估计式，它优于定理2.19中的估计(2.29)

为此回顾Hardy不等式：设$1<p<+\infty$，若$g(x)\in L_p[0,\ \alpha]$，且

$$G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt \qquad x\in[0,\ \alpha],$$

则有

$$\|G\|_{L_p[0,\ \alpha]}\leqslant\frac{p}{p-1}\|g\|_{L_p[0,\ \alpha]}.$$

若$g\in L_p^2(D)$，通常称

$$Q(g'',\ x)=\sup_{\substack{t\in D\\ t\neq x}}\left(\frac{1}{t-x}\int_x^t|g''(u)|du\right), \qquad x\in D,$$

为g''的Hardy—Littlewood极大函数，由Hardy不等式导出：当$1<p+\infty$时有

$$\|Q(g'')\|_{L_p(D)}\leqslant k_p\|g''\|_{L_p(D)}$$

其中$k_p=\dfrac{p}{p-1}$，因此，对$x\in D$有

$$\left|L_n\left(\int_x^t(t-u)g''(u)du,\ x\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant L_n\left(\left|\int_x^t(t-u)g''(u)du\right|,\ x\right)$$

$$\leqslant L_n\left((t-x)^2\left(\frac{1}{t-x}\int_x^t|g''(u)|du\right),\ x\right)$$

$$\leqslant Q(g'',\ x)L_n\left((t-x)^2,\ x\right)$$

从而得到

$$\left\|L_n\left(\int_x^t(t-u)g''(u)du,\ x\right)\right\|_{L_p(D_1)}$$

$$\leqslant\|L_n((t-x)^2,\ x)\|_{L_\infty(D_1)}\|Q(g'')\|_{L_p(D)}$$

$$\leqslant k_p\mu_n^2\|g''\|_{L_p(D)} \qquad (2.32)$$

现在证明如下引理。

引理2.20 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$($p\geqslant1$)到$L_p(D_1)$内一致有界的正线性算子列且$\tilde{\mu}_{n,p}\to0^+$($n\to+\infty$)，若$1<p<+\infty$或$p=1$但存在$\alpha>3$使得

$$\|L_n(|t-x|^\alpha,\ x)\|_{L_\infty(D_1)}=O(\mu_n^\alpha) \qquad (n\to+\infty)$$

则对每个$g\in L_p^2(D)$和充分大的n有

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)}\leqslant C_p\|g\|_{p,2}\tilde{\mu}_{n,p}^{2}$$

其中C_p是仅依赖于p的正数

证明　首先设$g\in L_p^2(D)$，由Taylor展开和（2.32）得到

$$\|L_n(g)-g\|_{L_p(D_1)}\leqslant\|g\|_\infty\|L_n(e_0)-e_0\|_{L_p(D_1)}$$

$$+\|g'\|_\infty\|L_n(t-x,x)\|_{L_p(D_1)}+\left\|L_n\left(\int_x^t(t-u)g''(u)du,\ x\right)\right\|_{L_p(D_1)}$$

$$\leqslant C\|g\|_{p,2}\tilde{\mu}_{n,p}^{2}+k_p\|g''\|_{L_p(D_1)}\tilde{\mu}_{n,p}^{2}$$

$$\leqslant C_p\|g\|_{p,2}\tilde{\mu}_{n,p}^{2}$$

其次，设p=1，由条件存在$\alpha>3$使得

$$\|L_n(|t-x|^\alpha,x)\|_{L_\infty(D_1)}=O(\mu_n^\alpha)\qquad(n\to+\infty)$$

若 $g\in L_1^2(D)$，则对$x\in D_1$和$\delta>0$有

$$\left|L_n\left(\int_x^t(t-u)g''(u)du,\ x\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{j=0\\ j\delta\leqslant|t-x|<(j+1)\delta}}^{\left[\frac{b-a}{\delta}\right]}L_n\left(|t-x|\int_0^{(j+1)\delta}|g''(x+u)|du,\ x\right)$$

$$\leqslant\delta\int_0^\delta|g''(x+u)|du\,L_n(e_0)$$

$$+\sum_{j=1}^{\left[\frac{b-a}{\delta}\right]}\frac{1}{(j\delta)^{\alpha-1}}\int_0^{(j+1)\delta}|g''(x+u)|du\,L_n(|t-x|^\alpha,\ x)$$

于是有

$$\left\|L_n\left(\int_x^t(t-u)g''(u)du,\ x\right)\right\|_{L_1(D_1)}$$

$$\leqslant\delta\|g''\|_1\|L_n(e_0)-e_0\|_{L_1(D_1)}+\delta^2\|g''\|_1$$

$$+\|L_n(|t-x|^\alpha,\ x)\|_{L_\infty(D_1)}\|g''\|_1\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+1)\delta}{(j\delta)^{\alpha-1}}$$

取$\delta=\mu_n$得到

$$\left\|L_n\left(\int_x^t(t-u)g''(u)du,\ x\right)\right\|_{L_1(D_1)}$$

$$\leqslant\|g''\|_1\left(\mu_n\|L_n(e_0)-e_0\|_{L_1(D_1)}+\mu_n^2+O(\mu_n^\alpha)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+1)}{j^{\alpha-1}}\mu_n^{2-\alpha}\right)$$

$$\leqslant k\|g''\|_1\tilde{\mu}_{n,1}^{2}$$

其余与p>1的情况相同，证毕。

由逼近转化定理及推论2.2得到

定理2.20 (Swetits—Wood) 设 $\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$到$L_p(D_1)$内一致有界正线性算子列且$\widetilde{\mu}_{n,p}\to 0^+$ ($n\to+\infty$)，则对每个$f\in L_p(D)$ ($1<p<+\infty$和充分大的n有

$$\|L_n(f)-f\|_{L_p(D_1)}\leqslant C_p\ \{\widetilde{\mu}_{n,p}{}^2\|f\|_p+\omega_2(f,\ \widetilde{\mu}_{n,p})_p\} \qquad (2.33)$$

此外，若存在$\alpha>3$使得

$$\|L_n(|t-x|^\alpha,\ x)\|_{L_\infty(D_1)}=O(\mu_n{}^\alpha) \qquad (n\to+\infty),$$

则对p=1估计式（2.33）也成立

为说明估计式（2.33）优于（2.29），我们讨论如下例子，

例4 设$\alpha>0$，$\beta>0$是固定的，对$f\in L_p[0,\ 1]$，令

$$L_n(f,\ x)=\begin{cases} f(x) & |x-\frac{1}{2}|\geqslant n^{-\beta} \\ \dfrac{n^\alpha}{2}\displaystyle\int_{-n^{-\alpha}}^{n^{-\alpha}} f(t+x)dt & |x-\frac{1}{2}|<n^{-\beta} \end{cases}$$

则 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $L_p[0,\ 1]$ 到自身内一致有界正线性算子列，但非压缩的，明显地对$\forall x\in[0,\ 1]$有

$$L_n(1,\ x)=1, \qquad L_n(t,\ x)=x$$

和

$$L_n\left((t-x)^2,\ x\right)=\begin{cases} 0 & |x-\frac{1}{2}|\geqslant n^{-\beta} \\ \dfrac{n^{-2\alpha}}{3} & |x-\frac{1}{2}|<n^{-\beta} \end{cases}$$

$$L_n\left((t-x)^4,\ x\right)=\begin{cases} 0 & \\ \dfrac{n^{-4\alpha}}{5} & |x-\frac{1}{2}|<n^{-\beta} \end{cases}$$

所以有

$$\mu_n^2=\frac{1}{3}n^{-2\alpha}$$

$$\sup_{x\in[0,\ 1]} L_n\left((t-x)^4 x\right)=\frac{n^{-4\alpha}}{5}=O(\mu_n{}^4)$$

而

$$\|L_n\left((t-x)^2,\ x\right)\|_{L_p[0,\ 1]}=\frac{2^{\frac{1}{p}}}{3}n^{-2\alpha-\frac{\beta}{p}}$$

因此对充分大的$n\in N$，有

$$\hat{\lambda}_{n,p}^2=\left(\frac{2^{\frac{1}{p}}}{3}\right)^{\frac{2p}{2p+1}}n^{-\left(2\alpha+\frac{\beta}{p}\right)\frac{2p}{2p+1}},$$

$$\widetilde{\mu}_{n,p}^2=\frac{1}{3}n^{-2\alpha}$$

于是由定理2.19的估计式(2.29)得到，对每个$f\in L_p[0,1]$ $(1\leqslant p<+\infty)$和充分大的n有

$$\|L_n(f)-f\|_{L_p[0,1]}\leqslant C_p\left\{\|f\|_p n^{-(2\alpha+\frac{\beta}{p})\frac{2p}{2p+1}}+\omega_2\left(f,\ n^{-(2\alpha+\frac{\beta}{p})\frac{p}{2p+1}}\right)_p\right\} \tag{2.34}$$

又由定理2.20的估计式（2.33）得到，对每个$f\in L_p[0,1]$ $(1\leqslant p<+\infty)$和充分大的n有

$$\|L_n(f)-f\|_{L_p[0,1]}\leqslant C_p\{n^{-2\alpha}\|f\|_p+\omega_2(f,\ n^{-\alpha})_p\} \tag{2.35}$$

由于当$\alpha>\beta$时，有

$$n^{-\alpha}=o\left(n^{-(2\alpha+\frac{\beta}{p})\frac{p}{2p+1}}\right)\qquad(n\to+\infty).$$

可见估计式（2.35）优于（2.34），此外还应指出当$\alpha>\beta$时，估计式（2.35)的阶是不可改善的，例如取$f_0(x)=(x-\frac{1}{2})_+$，$x\in[0,1]$，则$f_0\in L_p[0,1]$ $(p\geqslant1)$且对$h\to0^+$有$\omega_2(f_0,h)_p=O(h^{1+\frac{1}{p}})$，所以由（2.35)得到，对充分大的$n\in N$有

$$\|L_n(f_0)-f_0\|_{L_p[0,1]}\leqslant C_p n^{-\alpha(1+\frac{1}{p})}$$

另一方面由计算可知，存在正常数k_p使得对充分大的$n\in N$有

$$\|L_n(f_0)-f_0\|_{L_p[0,1]}\geqslant k_p n^{-\alpha(1+\frac{1}{p})}$$

因此对$1\leqslant p<+\infty$有

$$\|L_n(f_0)-f_0\|_{L_p[0,1]}\asymp n^{-\alpha(1+\frac{1}{p})}\qquad(n\to+\infty)$$

可见估计（2.35）的阶是不可改善的。

2.5 无穷区间上算子逼近的量化定理

设$D=(a,b)$是有限或无穷区间，不失一般性可设D表示$I=[0,1]$，$R_+=[0,\infty)$或$R=(-\infty,+\infty)$，用$C_0(D)$表示$C(D)$中有界函数组成的子空间，对$f\in C_0(D)$其范数为$\|f\|=\sup\limits_{x\in D}|f(x)|$，记$AC_0'=\{g|\,g\in C_0(D)且g'\in AC\}$，又设$\varphi\in C^1(D)$是非负权函数且适合本章§1.5列举的条件。

本节主要是应用逼近转化原理讨论无穷区间上正线性算子一致逼近的量化定理，首先讨论点态逼近度的量化估计，我们有

定理2.21 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到自身内一致有界线性算子列，若存在$\alpha_n\to0^+(n\to+\infty)$和正常数$C_1$使得对每个$g\in C^2(D)$和$x\in D$有

$$|L_n(g,x)-g(x)|\leqslant C_1\varphi^2(x)\alpha_n^2\|g''\| \tag{2.36}$$

则对每个$f\in C_0(D)$和充分大的n有

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leqslant C\omega_2(f, \alpha_n\varphi(x)) \tag{2.37}$$

其中C是与f，n无关的正常数。

证明　设$f \in C_b(D)$，$x \in D$，则对$\forall g \in C^2(D)$有

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leqslant |f(x)-g(x)|+|g(x)-L_n(g, x)|+|L_n(f-g, x)|$$

$$\leqslant (1+L)\|f-g\|+C_1\alpha_n^2\varphi^2(x)\|g''\|$$

$$\leqslant \max(C_1, 1+L)(\|f-g\|+\alpha_n^2\varphi^2(x)\|g''\|)$$

其中$L=\sup\limits_{n\in N}\{\|L_n\|\}$，于是有

$$|f(x)-L_n(f, x)| \leqslant \max(C_1, 1+L)K_2(f, \alpha_n\varphi(x))$$

由定理2.1导出（2.37）证毕。

推论2.11　设$\{L_n\}_{n\in N}$是C(D)到自身内的正线性算子列，若对$x\in D$和充分大的$n\in N$，有

$$L_n(1, x)=1, \quad L_n(t, x)=x, \quad L_n((t-x)^2, x) \leqslant k\alpha_n^2\varphi^2(x)$$

则对每个$f\in C_b(D)$和充分大的n有

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leqslant C\omega_2(f, \alpha_n\varphi(x)) \tag{2.38}$$

证明　由于$g\in C^2(D)$，所以对$t\in D$有

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+\int_x^t\int_x^s g''(u)duds$$

所以

$$|L_n(g, x)-g(x)| \leqslant L_n\left(\left|\int_x^t\int_x^s |g''(u)|duds, x\right.\right)$$

$$\leqslant \|g''\|\frac{1}{2}L_n((t-x)^2, x)$$

$$\leqslant C_1\alpha_n^2\varphi^2(x)\|g''\|$$

其中$C_1=\frac{k}{2}$，即（2.36）适合，因此由定理2.21导出所需的估计式，证毕。

例1　设$\{V_n^{(\alpha)}\}_{n\in N}$（$\alpha\geqslant 0$）是广义的Lupas—Baskakov算子列，由于对$x\in(0, \infty)$有

$$V_n^{(\alpha)}(1, x)=1, \qquad V_n^{(\alpha)}(t, x)=x$$

和

$$V_n^{(\alpha)}((t-x)^2, x)=\frac{x(1+\alpha x)}{n}$$

因此由推论2.11得到

系1　设$\alpha\geqslant 0$，对每个$f\in C_b(R_+)$和$x\in(0, \infty)$有

$$|V_n^{(\alpha)}(f,x)-f(x)|\leqslant C\omega_2\left(f,\left(\frac{x(1+\alpha x)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

其次，由于在无穷区间上权函数φ可以是无界的，因此，即使估计式（2.38）在D点点成立，也不总能导出一致逼近度的量化估计，现在记

$$U=\{g\,|\,g\in AC_{loc}\text{且}\|\varphi^2g''\|<+\infty\},$$

对$f\in C_B(D)$和$t>0$，令

$$\widetilde{K}_\varphi(f,t)=\inf_{g\in U}\{\|f-g\|+t^2(\|g\|+\|\varphi^2g''\|)\}$$

由引理2.4和定理2.10得到，对$t>0$有

$$\widetilde{K}_\varphi(f,t)\asymp\min(1,t^2)\|f\|+\omega_\varphi(f,t),$$

因而由逼近转化定理导出

推论2.12 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到自身内一致有界线性算子列，若存在$\alpha_n\to0^+$（$n\to+\infty$）使得对每个$g\in U$和充分大的$n\in N$有

$$\|L_n(g)-g\|\leqslant C_1\alpha_n^2(\|g\|+\|\varphi^2g''\|)\tag{2.39}$$

其中C_1是与n，g无关的正常数，则对每个$f\in C_B(D)$和充分大的n有

$$\|L_n(f)-f\|\leqslant C\{\alpha_n^2\|f\|+\omega_\varphi(f,\alpha_n)\}\tag{2.40}$$

特别地，对于正线性算子有如下重要的量化定理。

定理2.22（V. Totik） 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到自身内的正线性算子列，若对每个$x\in D$有

$$L_n(1,x)=1,\quad L_n(t,x)=x,\quad L_n((t-x)^2,x)\leqslant k\alpha_n^2\varphi^2(x),$$

其中$\alpha_n\to0^+$（$n\to+\infty$），则对每个$f\in C_B(D)$有

$$\|L_n(f)-f\|\leqslant k_0\omega_\varphi(f,\alpha_n)\tag{2.41}$$

其中k_0是与n无关的正常数。

证明 我们只证明$D=(0,\infty)$的情况，其余是类似的。

若存在常数C_1使得$\varphi(x)\leqslant C_1x$（$x>0$），则对每个$x\in D$取

$$I_x=(x-C\varphi(x),\ x+C\varphi(x))$$

其中$C=\frac{1}{2(C_1+1)}$，若这种C_1不存在，但存在常数C_2使得$\varphi(x)\leqslant C_2x$（$x\geqslant1$），则对每个$x\in D$取

$$I_x=\begin{cases}(x-C\varphi(x),\ x+C\varphi(x)) & \text{当}x-C\varphi(x)\geqslant\frac{x}{2}\\(0,\ x+C\varphi(x)) & \text{当}x-C\varphi(x)<\frac{x}{2}\end{cases}$$

其中$C=\frac{1}{2(C_2+1)}$这里取实的区间I_x在下文证明中是固定的

为方便我们将定理的证明分为如下四个命题：

命题1　设$x>0$和

$$h_x(t)=\begin{cases}\int_x^t\int_x^v\frac{dudv}{\varphi^2(u)} & t\in I_x\\ 0 & t\notin I_x\end{cases}$$

则有

$$h_x(t)\leqslant k_1\frac{(t-x)^2}{\varphi^2(x)}\qquad(t>0)\qquad(2.42)$$

其中k_1是与x，t无关的正常数。

证明　若$x-C\varphi(x)$，$t\in I_x=(x-C\varphi(x),\ \ x+C\varphi(x))$此时总有$x<u\leqslant 2x$，根据权函数$\varphi$适合的条件1°）有

$$\frac{1}{C_1^2}\varphi^2(x)\leqslant\varphi^2(u)\leqslant C_1^2\varphi^2(x)$$

所以对$t\in I_x$有

$$h_x(t)\leqslant C_1^2\frac{1}{\varphi^2(x)}\int_x^t\int_x^v dudv=\frac{1}{2}C_1^2\frac{(t-x)^2}{\varphi^2(x)},$$

若$x-C\varphi(x)<\frac{x}{2}$，$t\in I_x$但$t>\frac{x}{2}$，则有

$$x-C\varphi(x)<\frac{x}{2}<t<x+C\varphi(x)$$

因此关于$h_x(t)$的上面估计仍然成立。

剩下只要讨论$x-C\varphi(x)<\frac{x}{2}$，$t\in I_x$且$t<\frac{x}{2}$的情况，由于常数C的选取，

$x-C\varphi(x)<\frac{x}{2}$　只能在$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\varphi(x)}{x}=+\infty$时成立，这时由$\varphi$适合条件的条件2°），存在$r\in(0,1)$使得$\frac{\varphi(x)}{x^r}$在$x=0$的右邻域是弱下降的，因此存在常数k使得对$0<x_1<x\leqslant1$有

$$\frac{\varphi(x)}{x^r}\leqslant k\frac{\varphi(x_1)}{x_1^r}$$

因此对$t<\frac{x}{2}$有

$$h_x(t)\leqslant k^2\left(\frac{x^r}{\varphi(x)}\right)^2\int_x^t\int_x^v\frac{dudv}{u^{2r}}\leqslant k^2\left(\frac{x^r}{\varphi(x)}\right)^2\int_x^0\int_x^v\frac{dudv}{u^{2r}}$$

$$=\frac{k^2}{2(1-r)}\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)^2\leqslant 2k^2\frac{1}{1-r}\frac{(t-x)^2}{\varphi^2(x)}$$

所以估计式（2.42）得证。

命题2　设$x>0$，$h\in C_0(0,\infty)$，令

$$h^*(t)=\begin{cases} h(t) & t\in I_x \\ 0 & t\in(0,\infty)\setminus I_x \end{cases}$$

则有

$$|L_n(h-h^*,\ x)|\leqslant k\frac{|h|}{C^2}\alpha_n^2 \qquad (2.43)$$

证明　由于对$t\in I_x$有$h(t)-h^*(t)=0$，又若$t\notin I_x$则有$|t-x|\geqslant C\varphi(x)$，所以对$t\in(0,\infty)$有

$$|h(t)-h^*(t)|\leqslant |h|\leqslant \frac{|h|}{C^2\varphi^2(x)}(t-x)^2,$$

因此对$x>0$有

$$|L_n(h-h^*,\ x)|\leqslant \frac{|h|}{C^2\varphi^2(x)}L_n\big((t-x)^2,\ x\big)$$

$$\leqslant k\frac{|h|}{C^2}\alpha_n^2$$

估计式（2.43）证得。

命题3　设$x>0$，$g\in C(I_x)\cap C(D\setminus I_x)$且在$I_x$是下凸的，则有

$$L_n(g,\ x)\geqslant g(x)-k_1|g|\alpha_n^2 \qquad (2.44)$$

其中k_1是与g，x及n无关的正数。

证明　由于g在I_x是下凸的，所以存在实数α使得对$\forall t\in I_x$有

$$g(t)\geqslant g(x)+\alpha(t-x) \qquad (2.45)$$

令

$$g^*(t)=\begin{cases} g(t) & t\in I_x \\ 0 & t\notin I_x \end{cases}$$

则由（2.43）得到

$$|L_n(g-g^*,\ x)|\leqslant k\frac{|g|}{C^2}\alpha_n^2 \qquad (2.46)$$

令$g_x(t)=g(x)$（$t\in D$），再次由（2.43）得到

$$|L_n(g_x^*-g(x),\ x)|\leqslant k\frac{|g|}{C^2}\alpha_n^2 \qquad (2.47)$$

由（2.45）导出

$$g^*(t)\geqslant g_x^*(t)+\big(\alpha(t-x)\big)^*$$

所以

$$L_n(g^*,\ x)\geqslant L_n(g_x^*,\ x)+L_n\big((\alpha(t-x))^*,\ x\big)$$

因此由（2.46）和（2.47）得到

$$L_n(g,\ x)+k\frac{|g|}{C^2}\alpha_n^2\geqslant L_n(g^*,\ x)$$

$$\geqslant g(x)-\frac{k|g|}{C^2}\alpha_n^2+L_n\big((\alpha(t-x))^*,\ x\big)$$

或

$$L_n(g, x) \geq g(x) - 2\frac{k\|g\|}{C^2}\alpha_n^2 + L_n\left((\alpha(t-x))^*, x\right)$$

现在估计 $L_n\left((\alpha(t-x))^*, x\right)$，由于 $L_n(\alpha(t-x), x)=0$，所以

$$\left|L_n\left((\alpha(t-x))^*, x\right)\right| = \left|L_n\left(\alpha(t-x)-(\alpha(t-x))^*, x\right)\right|$$

$$\leq |\alpha| L_n(|t-x|-|t-x|^*, x).$$

若 $x - C\varphi(x) \geq \frac{x}{2}$，则 $I_x = \left(x - C\varphi(x),\ x + C\varphi(x)\right)$，由（2.45）导出

$$-2\|g\| \leq g(x) - g\left(x - C\varphi(x)\right) \leq \alpha C\varphi(x)$$

$$\leq g\left(x + C\varphi(x)\right) - g(x) \leq 2\|g\|$$

所以有

$$|\alpha| \leq \frac{2\|g\|}{C\varphi(x)} \qquad (x>0)$$

又因为 $t\in I_x$ 时 $|t-x|-|t-x|^*=0$，而 $t\notin I_x$ 时，有 $|t-x|\geq C\varphi(x)$，所以有

$$|t-x|-|t-x|^* \leq \frac{(t-x)^2}{C\varphi(x)} \qquad (t\in D)$$

因此得到

$$\left|L_n\left((\alpha(t-x))^*, x\right)\right| \leq k\frac{2\|g\|}{C^2}\alpha_n^2 \qquad (2.48)$$

若 $x - C\varphi(x) < \frac{x}{2}$，则 $I_x = \left(0,\ x + C\varphi(x)\right)$，$\alpha\geq 0$ 时同样讨论有 $\alpha \leq \frac{2\|g\|}{C\varphi(x)}$ 且(2.48)

仍然成立，当 $\alpha<0$ 时，则有 $\alpha(t-x)-\left(\alpha(t-x)\right)^*<0$，所以

$$L_n\left((\alpha(t-x))^*, x\right) \geq L_n(\alpha(t-x), x) = 0 \qquad (2.49)$$

由（2.48）和（2.49）得到

$$L_n(g, x) \geq g(x) - k_3\|g\|\alpha_n^2$$

其中 $k_3 = 4\frac{k}{C^2}$，证毕。

命题4 若 $g\in U$，则

$$\|L_n(g)-g\| \leq k_4\alpha_n^2(\|g\| + \|\varphi^2 g''\|)$$

其中 k_4 是与 g，n 无关的正常数。

证明 记 $M = \|\varphi^2 g''\| < +\infty$，令

$$g_1(t) = \begin{cases} Mh_x(t) \pm g(t) & t\in I_x \\ \pm g(t) & t\notin I_x \end{cases}$$

我们有

$$|g_\pm| \le |g| + M|h_x| \le |g| + 4k_1C^2M \triangleq k_6$$

由于当$t\in I_x$时，有

$$g_\pm''(t) = \frac{M}{\varphi^2(t)} \pm g''(t) \ge \frac{M}{\varphi^2(t)} - \frac{M}{\varphi^2(t)} = 0$$

所以$g_+(t)$和$g_-(t)$在I_x中是下凸的，由命题3得到

$$L_n(g_+,\ x) \ge g(x) - k_5k_6\alpha_n^2,$$

$$L_n(g_-,\ x) \ge -g(x) - k_5k_6\alpha_n^2$$

又因为

$$L_n(g_\pm,\ x) = L_n\left(\left(Mh_x(t) \pm g(t)\right)\chi_{I_x}(t),\ x\right) + L_n\left(\pm g(t)\left(1-\chi_{I_x}(t)\right),\ x\right)$$

$$= L_n\left(Mh(t)\chi_{I_x}(t),\ x\right) + L_n(g,\ x)$$

其中$\chi_{I_x}(t)$是I_x上的特征函数，所以有

$$\pm L_n(g,\ x) = L_n\left(Mh_x(t)\chi_{I_x}(t),\ x\right) - L_n(g\pm,\ x)$$

$$\le ML_n\left(h_x(t),\ x\right) \pm g(x) + k_5k_6\alpha_n^2$$

因此

$$\mp\left(L_n(g,\ x) - g(x)\right) \le ML_n\left(h_x(t),\ x\right) + k_5k_6\alpha_n^2$$

$$\le \frac{Mk_1}{\varphi^2(x)} L_n\left((t-x)^2,\ x\right) + k_5k_6\alpha_n^2$$

$$\le k_7\left(|g| + |\varphi^2 g''|\right)\alpha_n^2$$

从而得到

$$|L_n(g) - g| \le k_8\alpha_n^2\left(|g| + |\varphi^2 g''|\right)$$

证毕。

由命题4和推论2.12得到：对每个$f\in C_B(D)$和充分大的$n\in N$有

$$|L_n(f) - f| \le C\left\{\alpha_n^2\|f\| + \omega_\varphi(f,\ \alpha_n)\right\}.$$

最后注意到L_n是保持线性的，所以不妨设f是非线性，因此对充分大的n有

$$\alpha_n^2 \le C_f\,\omega_\varphi(f,\ \alpha_n)$$

从而导出(2.41)，定理2.22证毕。

例2 设$\{V_n^{(\alpha)}\}_{n\in N}$ ($\alpha\ge0$)是广义Lupas—Baskakov算子列，由于对$x\in(0,\infty)$有

$$V_n^{(\alpha)}(1,\ x)=1,\quad V_n^{(\alpha)}(t,\ x)=x,\quad V_n^{(\alpha)}\left((t-x)^2,\ x\right)=\frac{x(1+\alpha x)}{n}$$

所以由定理2.22得到（取$\varphi(x)=\sqrt{x(1+\alpha x)}$，$\alpha\ge0$）

系2 对每个$f\in C_b(0,\infty)$和充分大的n有

$$|V_n^{(*)}(f)-f|\leqslant k_b\omega_{\sqrt{x(1+ax)}}\left(f,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

例3 设 $\{\Phi_n\}_{n\in N}$是修正的Landau算子列，由于对$x\in(0,1)$有

$$\Phi_n(1,x)=1,\quad \Phi_n(t,x)=x,\quad \Phi_n((t-x)^2,\ x)=\frac{(x(1-x))^2}{2n+3}.$$

所以取$\varphi(x)=x(1-x)$得到

系3 对每个$f\in C_b(0,1)$和充分大的$n\in N$，有

$$|\Phi_n(f)-f|\leqslant k_b\omega_{x(1-x)}\left(f,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

应当指出，若定理2.22中的正线性算子仅满足

$$L_n(1,x)-1=O(\alpha_n^2),\ L_n(t,x)-x=O(\alpha_n^2)$$

则定理中的估计式(2.41)应改为

$$|L_n(f)-f|\leqslant k_b\left(\alpha_n^2+\omega_\varphi(f,\ \alpha_n)\right).$$

§3 逼近度估计的直接方法

3.1 Mamedov—Shisha量化方法

设$D=[a,b]$，$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到自身内的正线性算子列，应用逼近转化原理可以将$\{L_n\}_{n\in N}$对试验集$\{1,x,x^2\}$的逼近度估计转化为对$C(D)$中每个元素的逼近度估计，由于这样的估计产生一个没有明确数值的正常数，因而在某种意义上估计式并不理想，Mamedov—Shisha给出如下直接估计法。

记$\mu_n^2(x)=L_n\left((t-x)^2,\ x\right)(x\in D)$，首先由Mamedov随后由Shisha和Mond加以发展得到

定理2.23（Mamedov—Shisha）设$D_1=[c,d]\subseteq D$，$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到$C(D_1)$内的正线性算子列，若对$x\in D_1$有$\mu_n(x)>0$，则对每个$f\in(D)$和$\lambda>0$有

$$|f(x)-L_n(f,x)|\leqslant|f(x)||L_n(1,x)-1|+$$
$$+\left(L_n(1,x)+\lambda^{-2}\right)\omega(f,\ \lambda\mu_n(x))\qquad(3.1)$$

证明 设$f\in C(D)$，则对$\forall t,\ x\in D$有

$$|f(t)-f(x)|\leqslant\omega(f,\ |t-x|).$$

因此对每个$\delta>0$有

$$\omega(f,\ |t-x|)\leqslant\begin{cases}\omega(f,\ \delta) & |t-x|<\delta\\ \omega\left(f,\ \frac{(t-x)^2}{\delta}\right) & |t-x|\geqslant\delta\end{cases}$$

于是对$\forall t$，$x\in D$及$\delta>0$有

$$|f(t)-f(x)|\leqslant\left(1+\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right)\omega(f,\ \delta)$$

从而得到

$$|f(x)-L_n(f,\ x)|\leqslant|f(x)||L_n(1,\ x)-1|+L_n\left(|f(t)-f(x)|,\ x\right)$$

$$\leqslant|f(x)||L_n(1,\ x)-1|+\omega(f,\ \delta)\left(L_n(1,\ x)+\frac{L_n((t-x)^2,\ x)}{\delta^2}\right)$$

$$=|f(x)||L_n(1,\ x)-1|+\omega(f,\ \delta)\left(L_n(1,\ x)+\frac{\mu_n^2(x)}{\delta^2}\right)$$

若$x\in D_1$有$\mu_n(x)>0$，对$\lambda>0$取$\delta=\lambda\mu_n(x)$得到

$$|f(x)-L_n(f,\ x)|\leqslant|f(x)||L_n(1,\ x)-1|+\left(L_n(1,x)+\lambda^{-2}\right)\omega\left(f,\ \lambda\mu_n(x)\right)$$

证毕。

特别地，有

推论2.13 若$L_n(1,\ x)=1$，则对每个$f\in C(D)$和$\lambda>0$有

$$|f(x)-L_n(f,x)|\leqslant(1+\lambda^{-2})\ \omega\left(f,\ \lambda\mu_n(x)\right).$$

现在记

$$\mu_n^2=\max_{x\in D_1}|L_n\left((t-x)^2,\ x\right)|$$

由（3.1）导出Shisha—Mond得到的如下结果

推论2．14 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到$C(D_1)$内的正线性算子列，则对每个$f\in(D)$和$\lambda>0$有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_1)}\leqslant\|f\|\|L_n(1)-1\|_{C(D_1)}+(\|L_n\|+\lambda^{-2})\omega(f,\ \lambda\mu_n) \qquad (3.2)$$

特别当$L_n(1,\ x)=1$ （$x\in D_1$），则有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_1)}\leqslant(1+\lambda^{-2})\omega(f,\ \lambda\mu_n)$$

关于可微函数的逼近度有如下估计。

定理2．24 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到$C(D_1)$内的正线性算子列，若对$x\in D_1$有$\mu_n(x)>0$，则对每个$f\in C(D)$和$\lambda>0$有

$$|L_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant|f(x)||L_n(1,\ x)-1|+|f'(x)||L_n(t-x,\ x)|$$
$$+\left(\lambda^{-1}+\sqrt{L_n(1,\ x)}\right)\mu_n(x)\omega(f',\ \lambda\mu_n(x)) \qquad (3.3)$$

证明 设$f\in C^1(D)$，则对$\forall t$，$x\in D$有

$$f(t)-f(x)-f'(x)(t-x)=\int_x^t\left(f'(u)-f'(x)\right)du$$

于是$\delta>0$有

$$|f(t)-f(x)-f'(x)(t-x)|\leqslant\left|\int_x^t|f'(u)-f'(t)|du\right|$$

$$\leqslant \omega(f', |t-x|)|t-x| \leqslant \omega(f', \delta)\left(|t-x| + \frac{(t-x)^2}{\delta}\right)$$

因此有

$$|L_n(f(t)-f(x)-f'(x)(t-x), x)|$$

$$\leqslant \omega(f', \delta)\left(L_n(|t-x|, x) + \frac{L_n((t-x)^2, x)}{\delta}\right)$$

$$\leqslant \omega(f', \delta)\left(\sqrt{L_n(1, x)} + \frac{\mu_n(x)}{\delta}\right)\mu_n(x)$$

这里利用了Schwarz不等式：

$$L_n(|t-x|, x) \leqslant \mu_n(x)\sqrt{L_n(1, x)}\ .$$

若$x \in D_1$有$\mu_n(x)>0$，对$\lambda>0$取$\delta=\lambda\mu_n(x)$得到

$$|L_n(f(t)-f(x)-f'(x)(t-x), x)|$$

$$\leqslant \left(\lambda^{-1} + \sqrt{L_n(1, x)}\right)\mu_n(x)\omega(f', \lambda\mu_n(x))$$

从而得到估计式（3，3）证毕。

特别地有

推论2．15 若$L_n(1, x)=1$，$L_n(t, x)=x$，则对每个$f \in C^1(D)$和$\lambda>0$有

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leqslant (1+\lambda^{-1})\mu_n(x)\omega(f', \lambda\mu_n(x))$$

由（3，3）导出由Mond—Vasndevan得到的如下估计式．

推论2．16 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到$C(D_1)$内正线性算子列，则对每个$f \in C^1(D)$和$\lambda>0$有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_1)} \leqslant \|f\|\|L_n(1)-1\|_{C(D_1)} + \|f'\|\max_{x\in D_1}|L_n(t-x, x)|$$

$$+ (\lambda^{-1}+\|L_n\|^{\frac{1}{2}})\mu_n\omega(f', \lambda\mu_n) \qquad (3, 4)$$

特别地，若$L_n(1, x)=1$，$L_n(t, x)=x$（$x \in D_1$），则有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_1)} \leqslant (1+\lambda^{-1})\mu_n\omega(f', \lambda\mu_n)$$

作为例子考查如下一些熟知的正线性算子

系1 设$\{B_n\}_{n\in N}$是Bernstein算子列，则对每个$f \in C[0, 1]$和$x \in [0, 1]$有

$$|f(x)-B_n(f, x)| \leqslant \left(1+x(1-x)\right)\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

或

$$\|f-B(f)\|_{C[0, 1]} \leqslant \frac{5}{4}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (3, 5)$$

而对每个$f \in C^1[0, 1]$和$x \in [0, 1]$有

$$|f(x)-B_n(f, x)| \leqslant \left(1+\sqrt{x(1-x)}\right)\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}\omega\left(f', \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

或

$$\|f-B(f)\|_{C[0,1]}\leqslant\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega\left(f',\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\qquad(3.6)$$

证明 由于对 $x\in[0,1]$ 有

$$B_n(1,x)=1,\quad B_n(t,x)=x,\quad B_n((t-x)^2,x)=\frac{x(1-x)}{n}.$$

因此对每个 $f\in C[0,1]$ 和 $x\in(0,1)$，取 $\lambda=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ 由（3.1）导出

$$|f(x)-B_n(f,x)|\leqslant\left(1+x(1-x)\right)\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

又注意到 $\max\limits_{x\in[0,1]}x(1-x)=\frac{1}{4}$ 由上式导出（3.5）。

对 $f\in C^1[0,1]$ 和 $x\in(0,1)$，取 $\lambda=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ 由（3.3）导出

$$|f(x)-B_n(f,x)|\leqslant\left(1+\sqrt{x(1-x)}\right)\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\,\omega\left(f',\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

从而导出（3.6）证毕。

应当指出（3.5）和（3.6）中的常数 $\frac{5}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 不是最佳的，其最佳常数已由F. Schurer确定。

系1 设 $\{H_n\}_{n\in N}$ 是 Hermite——Fejér 算子列，则对每个 $f\in C[-1,1]$ 和 $x\in[-1,1]$ 有

$$|H_n(f,x)-f(x)|\leqslant 2\omega\left(f,\frac{|T_n(x)|}{\sqrt{n}}\right).$$

而对每个 $f\in C^1[-1,1]$ 和 $x\in[-1,1]$ 有

$$|H_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{2|T_n(x)|}{n}|f'(x)|+\frac{2|T_n(x)|}{\sqrt{n}}\omega\left(f',\frac{|T_n(x)|}{\sqrt{n}}\right)$$

其中 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$。

证明 由于对 $x\in[-1,1]$ 有

$$H_n(1,x)=1,\quad \mu_n^2(x)=H_n\left((t-x)^2,x\right)=\frac{T_n^2(x)}{n}.$$

和

$$H_n\left((t-x),x\right)=-\left(\frac{1-x^2}{n^2}T_n'(x)+\frac{x}{n}T_n(x)\right)T_n(x).$$

所以有

$$|H_n(t-x,x)|\leqslant\frac{2}{n}|T_n(x)|.$$

又因为当 $x\neq x_{nk}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\,(k=1,2,\cdots\cdots n)$ 时，有 $\mu_n(x)>0$，而当 $x=x_{nk}$ 时

有$H_n(f, x_{nk})=f(x_{nk})$，所以由（3.1）和（3.3）导出所求的估计，证毕。

系3 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是代数卷积算子列（见§2.4例1），又设 $D_\delta=[-\delta, \delta]$ $(0<\delta<\frac{1}{2})$，则对每个$f\in C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_\delta)}\leqslant\frac{\alpha_n^2}{(\frac{1}{2}-\delta)^2}\|f\|+2\omega(f, \alpha_n).$$

若$f\in C^1[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$，则有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(D_\delta)}\leqslant\frac{\alpha_n^2}{(\frac{1}{2}-\delta)^2}\|f\|+\frac{\alpha_n^2}{2(\frac{1}{2}-\delta)}\|f'\|+2\alpha_n\omega(f', \alpha_n).$$

证明 由§2.4例1可知，对$x\in D_\delta$有

$$\mu_n^2(x)=L_n((t-x)^2, x)\leqslant\int_{-1}^{1}t^2 d\lambda_n(t)=\alpha_n^2$$

$$\|1-L_n(1)\|_{C(D_\delta)}\leqslant\frac{\alpha_n^2}{(\frac{1}{2}-\delta)^2}$$

和

$$\max_{x\in D_\delta}|L_n(t-x, x)|\leqslant\frac{\alpha_n^2}{2(\frac{1}{2}-\delta)}$$

因此由（3.1）和（3.3）导出所需的估计式，证毕。

类似地，对于周期情况可以建立 Mamedov—Shisha 定理，由于这时试验集为$\{1, \cos x, \sin x\}$所以取

$$\rho_n^2(x)=L_n(\sin^2\frac{t-x}{2}, x)$$

代替$\mu_n^2(x)$，并利用不等式$\sin\frac{t}{2}\geqslant\frac{t}{\pi}$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$得到

定理2.25 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$到自身内的正线性算子列，则对每个$f\in C_{2\pi}$，$x\in[-\pi, \pi]$和$\lambda>0$有

$$|L_n(f, x)-f(x)|\leqslant|f(x)||L_n(1, x)-1|$$
$$+\left(L_n(1, x)+\frac{\pi}{\lambda}\sqrt{L_n(1, x)}\right)\omega(f, \lambda\beta_n(x)) \qquad (3.7)$$

若$f\in C^1_{2\pi}$，则对$x\in[-\pi, \pi]$和$\lambda>0$有

$$|L_n(f, x)-f(x)|\leqslant|f(x)||L_n(1, x)-1|+|f'(x)|\Big(\pi\beta_n^2(x)$$
$$+|L_n(\sin(t-x), x)|\Big)+\pi\left(\frac{\pi}{\lambda}+\sqrt{L_n(1, x)}\,\beta_n(x)\right)\omega(f', \lambda\beta_n(x)) \qquad (3.8)$$

特别地有

推论2.17 若$L_n(1, x)=1$，则对每个$f\in C_{2\pi}$和$\lambda>0$有

$$|L_n(f, x)-f(x)|\leqslant\left(1+\frac{\pi}{\lambda}\right)\omega(f, \lambda\beta_n(x)).$$

若还有 $L_n(\sin(t-x),\ x)=0$，则对每个 $f\in C^1_{2\pi}$ 和 $\lambda>0$ 有

$$|L_n(f,\ x)-f(x)|\leq \pi|f'(x)|\beta_n^2(x)+\pi\left(1+\frac{\pi}{\lambda}\right)\beta_n(x)\omega\left(f',\ \lambda\beta_n(x)\right)$$

作为例子讨论正卷积算子的逼近度估计。

系4 设 $\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是对应于正，偶Borel测度核 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 的正卷积算子族，则对每个 $f\in C_{2\pi}$ 和 $x\in[-\pi,\ \pi]$ 有

$$|I_\rho(f,\ x)-f(x)|\leq\left(1+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\omega\left(f,\ (1-\alpha_{1\rho})^{\frac{1}{2}}\right)$$

若 $f\in C^1_{2\pi}$，则有

$$|I_\rho(f,\ x)-f(x)|\leq\frac{\pi}{2}\|f'\|(1-\alpha_{1\rho})$$

$$+\pi\left(1+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\frac{(1-\alpha_{1\rho})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\omega\left(f',\ (1-\alpha_{1\rho})^{\frac{1}{2}}\right).$$

证明 由于对 $x\in[-\pi,\ \pi]$ 有

$$I_\rho(1,\ x)=1\ ,\ I_\rho(\sin(t-x),\ x)=0$$

和

$$\beta_\rho^2(x)=I_\rho\left(\sin^2\frac{t-x}{2},\ x\right)=\frac{1-\alpha_{1\rho}}{2}$$

所以取 $\lambda=\sqrt{2}$，由推论（2．17）导出所求的估计，证毕。

3.2 DeVore—Freud 量化方法

首先证明De Vore—Minkova的如下估计

引理2．21 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(D)$ 到 $C(D_1)$ 内正线性算子列，若 $g\in C^1(D)$，$x\in D_1$，则

$$L_n(|g(t)-g(x)|,\ x)\leq\|g'\|L_n(|t-x|,\ x)\qquad(3.11)$$

若 $g\in C^2(D)$，$x\in D_1$，则

$$|L_n(g(t)-g(x),\ x)|\leq|g'|\,|L_n(t-x,\ x)|+\frac{\|g''\|}{2}\mu_n^2(x)\qquad(3.12)$$

证明 若 $g\in C^1(D)$，则对 $\forall t\in D$，$x\in D_1$ 有

$$g(t)-g(x)=\int_x^t g'(u)du$$

因此

$$|g(t)-g(x)|\leq\|g'\|\,|t-x|$$

于是导出估计式（3．11）。

若 $g\in C^2(D)$，则对 $\forall t\in D$，$x\in D_1$ 有

$$g(t)-g(x)=g'(x)(t-x)+\int_x^t\int_x^s g''(u)duds$$

因此有

$$|L_n(g(t)-g(x),\ x)| \leqslant |g'(x)|\,|L_n(t-x,\ x)| + \frac{\|g''\|}{2} L_n((t-x)^2,\ x)$$

$$\leqslant \|g'\|\,|L_n(t-x,\ x)| + \frac{\|g''\|}{2}\mu_n^2(x)$$

证毕。

在引理2.8中，对$f \in C^1[a,\ b]$，$0<h\leqslant b-a$引入 Steklov平均$(f')_h(x)$，并令$f_0'(x)=(f')_h(x)$，则有$f_0 \in C^2(D)$且

$$\|f_0'\| \leqslant \|f'\|,\ \|f'-f_0'\| \leqslant \omega(f',\ h)$$

$$\|f_0''\| \leqslant \frac{1}{h}\left(1-\frac{h}{a-b}\right)\omega(f',\ h) \leqslant \frac{1}{h}\omega(f',\ h)$$

利用引理2.20及上述估计得到

定理2.26（Gonska） 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到$C(D_1)$内正线性算子列，则对每个$f \in C^1(D)$和$x \in D_1$有

$$|L_n(f,\ x)-f(x)| \leqslant |f(x)|\,|L_n(1,\ x)-1| + \|f'\|\,|L_n(t-x,\ x)|$$

$$+\left(L_n(|t-x|,\ x)+\frac{1}{2h}\left(1-\frac{h}{b-a}\right)\mu_n^2(x)\right)\omega(f',\ h) \qquad (3.13)$$

其中$0<h<b-a$

证明 由于对$x \in D_1$有

$$|L_n(f,\ x)-f(x)| \leqslant |f(x)|\,|L_n(1,\ x)-1| + |L_n(f(t)-f(x),\ x)|,$$

另一方面由（3.11）和（3.12）及$f_0 \in C^2(D)$导出

$$|L_n(f(t)-f(x),\ x)| \leqslant |L_n(f(t)-f_0(t)-f(x)+f_0(x),\ x)|$$

$$+|L_n(f_0(t)-f_0(x),\ x)|$$

$$\leqslant \|f'-f_0'\|L_n(|t-x|,\ x)+\|f_0'\|\,|L_n(t-x,\ x)| + \frac{\|f_0''\|}{2}\mu_n^2(x)$$

$$\leqslant \|f'\|\,|L_n(t-x,\ x)| + \left(L_n(|t-x|),\ x)+\frac{1}{2h}\left(1-\frac{h}{b-a}\right)\mu_n^2(x)\right)\omega(f',\ h)$$

其中$0<h<b-a$，因此得到（3.13），证毕。

特别地，有

推论2.18 若$L_n(1,\ x)=1$，$L_n(t,\ x)=x$，则对每个$f \in C^1(D)$和$x \in D_1$有

$$|L_n(f,\ x)-f(x)| \leqslant (L_n(|t-x|),\ x)+\frac{1}{2h}\left(1-\frac{h}{b-a}\right)\mu_n^2(x))\omega(f',\ h)$$

其中$0<h<b-a$。

由Schwarz不等式导出

$$|L_n(f,\ x)-f(x)| \leqslant \left(1+\frac{1}{2h}\left(1-\frac{h}{b-a}\right)\mu_n(x)\right)\mu_n(x)\omega(f',\ h)$$

系1 设 $\{B_n\}_{n\in N}$是 Bernstein算子列，则对每个$f\in C^1[0,1]$和$n\geq1$有

$$\|B_n(f)-f\|\leq\frac{5}{8}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega(f',\frac{1}{\sqrt{n}}),$$

证明 由于对$x\in[0,1]$有

$$B_n(1,x)=1,\qquad B_n(t,x)=x$$

和

$$\mu_2^2(x)=B_n\left((t-x)^2,x\right)=\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n}.$$

因此由推论2.18、并取$h=\frac{1}{\sqrt{n}}$得到，对$x\in[0,1]$有

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leq\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4})\frac{1}{\sqrt{n}}\omega\left(f',\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\frac{5}{8}\frac{1}{\sqrt{n}}\omega\left(f',\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

证毕.

现在应用引理2.11对 $f\in C[a,b]$，$0<h<b-a$引进二阶 Steklov 平均 f_{2h}，则$f_{2h}\in C^2[0,1]$且有

$$\|f-f_{2h}\|\leq\frac{3}{2}\omega_2(f,h),$$

$$\|f_{2h}'\|\leq\frac{2}{h}\omega(f,h),$$

$$\|f_{2h}''\|\leq\frac{2}{h^2}\omega_2(f,h),$$

因此由(3.12)得到

定理2.27(DeVore—Freud) 设 $\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到$C(D_1)$内一致有界的正线性算子列，则对每个$f\in C(D)$，$x\in D_1$有

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leq|f(x)||L_n(1,x)-1|+\frac{2}{h}|L_n(t-x,x)|\omega(f,h)$$

$$+\left(3L+\frac{\mu_n^2(x)}{h^2}\right)\omega_2(f,h)\qquad(3.14)$$

其中$0<h<b-a$，$L=\sup_{n\in N}\{\|L_n\|\}$.

证明 由于对$x\in D_1$有

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leq|f(x)||L_n(1,x)-1|+|L_n\left(f(t)-f(x),x\right)|$$

又由(3.12)导出

$$|L_n\left(f(t)-f(x),\ x\right)|\leq|L_n\left(f(t)-f_{2h}(t)-f(x)+f_{2h}(x),x\right)|$$

$$+|L_n\left(f_{2h}(t)-f_{2h}(x),x\right)\leq2\|L_n\|\|f-f_{2h}\|+$$

$$+\|f'_{2,h}\|\,|L_n(t-x,\ x)|+\frac{\|f''_{2,h}\|}{2}\mu_n^2(x)$$

$$\leqslant\frac{1}{h}|L_n(t-x,x)|\omega(f,\ h)+\left(3L+\frac{\mu_n^2(x)}{h^2}\right)\omega_2(f,\ h)$$

所以得到估计式（3．14）证毕。

特别地有

推论2．19 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是$C(D)$到自身内正线性算子列且$L_n(1,\ x)=1$，$L_n(t,\ x)=x$，若$\mu_n(x)\to 0^+$（$n\to+\infty$），则对每个$f\in C(D)$，$\lambda>0$和充分大的$n\in N$有

$$|L_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant(3+\lambda^{-2})\omega_2(f,\ \lambda\mu_n(x)) \qquad (3.15)$$

现在对Bernstein算子B_n应用估计式（3．15）得到

系2 对每个$f\in C[0,\ 1]$和$x\in[0,\ 1]$，$\lambda>0$有

$$|B_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant(3+\lambda^{-2})\omega_2\left(f,\ \lambda\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$

特别取 $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 导出H、Bernes－G、G、Lorentz的估计：

$$|B_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant 5\omega_2\left(f,\ \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$

取$\lambda=1$导出L．I．Strukov—A．F．Timan的估计：

$$|B_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant 4\omega_2\left(f,\ \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$

又取$\lambda=2$导出Y．A．Brudnyi估计

$$|B_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant 3\frac{1}{4}\ \omega_2\left(f,\ \sqrt{\frac{4x(1-x)}{n}}\right).$$

其中$x\in[0,\ 1]$，因此导出对每个$f\in C[0,\ 1]$有

$$\|B_n(f)-f\|\leqslant 3\frac{1}{4}\ \omega_2\left(f,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

上式常数 $3\frac{1}{4}$ 并非是最佳的，此最佳值目前尚不知道。

最后讨论无穷区间上的DeVore—Freud量化方法，设$T=R_+$或R_0，若$f\in C(T)$，令

$$\|f\|_{C(T)}=\sup_{x\in T}|f(x)|$$

记

$$C_0(T)=\{f\,|\,f\in C(T)\text{且}\|f\|_{C(T)}<+\infty\}$$

$$C_0^2(T)=\{f\,|\,f\in C^2(T)\text{且}\|f''\|_{C(T)}<+\infty\},$$

首先对$f\in C[0,\ \infty)$和$h>0$，令

$$\tilde{f}_h(x)=\begin{cases}f(x+h)-f(h)+f(0) & x\in[-h,\ 0)\\ f(x) & x\in[0,\ \infty)\end{cases}$$

则有

引理2.22 对$x\in[0,\infty)$和$\delta\in(0,h]$有

$$|\Delta_\delta^2(\widetilde{f_h},x)|\leqslant\begin{cases}\omega_2(f,h)+2\omega_2\left(f,\frac{h}{2}\right) & 0<\delta<h,\\ \omega_2(f,h)+\omega_2\left(f,\frac{h}{2}\right) & \delta=h\end{cases}$$

证明 与引理2.10的证明类似，分两种情况讨论。

i)若$x-\delta, x, x+\delta\in[0,\infty)$则

$$|\Delta_\delta^2(\widetilde{f_h},x)|=|\Delta_\delta^2(f,x)|\leqslant\omega_2(f,h)$$

ii)若$x-\delta<0$，x，$x+\delta\in[0,+\infty)$，则当$0<\delta<h$时，有

$$|\Delta_\delta^2(\widetilde{f_h},x)|=|f(-\delta+h)-f(h)+f(0)-2f(x)+f(x+\delta)|$$

$$=|f(0)-2f(x)+f(2x)-f(2x)+2f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(h)+f(x-\delta+h)$$

$$-2f\left(x+\frac{h}{2}\right)+f(x+\delta)|\leqslant\omega_2(f,x)+\omega_2\left(f,\left|x-\frac{h}{2}\right|\right)$$

$$+\omega_2\left(f,\left|-\delta+\frac{h}{2}\right|\right)\leqslant\omega_2(f,h)+2\omega_2\left(f,\frac{h}{2}\right)$$

若$\delta=h$时，类似地讨论有

$$|\Delta_\delta^2(\widetilde{f_h},x)|\leqslant\omega_2(f,h)+\omega_2\left(f,\frac{h}{2}\right).$$

证毕。

类似于引理2.11我们有

引理2.23 设$f\in C_0[0,\infty)$引入二阶Steklov平均

$$f_{2h}(x)=\frac{1}{h^2}\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\widetilde{f_h}(x+s+t)dsdt \qquad x\in[0,\infty)$$

则$f_{2h}\in C_0^2[0,\infty)$且

$$\|f-f_{2h}\|\leqslant\frac{3}{2}\omega_2(f,h)$$

$$\|f_{2h}'\|\leqslant\frac{2}{h}\omega_1(f,h) \qquad (3.16)$$

$$\|f_{2h}''\|\leqslant\frac{2}{h^2}\omega_2(f,h)$$

引理2.24 设$f\in C_0(-\infty,+\infty)$，引入二阶Steklov平均

$$f_{2h}(x)=\frac{1}{h^2}\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}f(x+s+t)dsdt \qquad x\in(-\infty,+\infty),$$

则$f_{2h}\in C_0^2(-\infty, +\infty)$且

$$|f-f_{2h}|\leqslant \frac{3}{4}\omega_2(f, h)$$

$$|f'_{2h}|\leqslant \frac{1}{h}\omega_1(f, h) \qquad (3.17)$$

$$|f''_{2h}|\leqslant \frac{1}{h^2}\omega_2(f, h)$$

利用(3.16)和(3.17)可将定理2.27推广到无穷区间得到如下定理

定理2.28 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(R^+)$到自身内一致有界的正线性算子列，则对每个$f\in C_0(R_+)$和$x\in(0, \infty)$有

$$|L_n(f, x)-f(x)|\leqslant|f(x)||L_n(1, x)-1|+\frac{2}{h}|L_n(t-x, x)|\omega(f, h)$$
$$+\left(3L+\frac{\mu_n^2(x)}{h^2}\right)\omega_2(f, h) \qquad (3.18)$$

其中$h>0$，$L=\sup\limits_{n\in N}\{\|L_n\|\}$。

定理2.29 设$\{L_n\}$是$C(R)$到自身内一致有界的正线性算子列，则对每个$f\in C_0(R)$和$x\in(-\infty, +\infty)$有

$$|L_n(f, x)-f(x)|\leqslant|f(x)||L_n(1, x)-1|+\frac{1}{h}|L_n(t-x, x)|\omega(f, h)$$
$$+\left(L+\frac{\mu_n^2(x)}{2h^2}\right)\omega_2(f, h) \qquad (3.19)$$

其中$h>0$，$L=\sup\limits_{n\in N}\{\|L_n\|\}$

特别地有

推论2.20 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(R_+)$到自身内的正线性算子列，且$L_n(1, x)=1$，$L_n(t, x)=x$，若$\mu_n(x)>0$，则对每个$f\in C_0[0, \infty)$和$\lambda>0$有

$$|L_n(f, x)-f(x)\leqslant(3+\lambda^{-2})\omega_2(f, \lambda\mu_n(x))$$

推论2.21 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(R)$到自身内的正线性算子列，且$L_n(1, x)=1$，$L_n(t, x)=x$，若$\mu_n(x)>0$，则对每个$f\in C_0(-\infty, +\infty)$和$\lambda>0$有

$$|L_n(f, x)-f(x)|\leqslant\left(1+\frac{1}{2\lambda^2}\right)\omega_2(f, \lambda\mu_n(x))$$

对Gauss—Weierstrass算子G_n，由于对$x\in R$有$G_n((t-x)^2, x)=\frac{1}{n}$，所以从推论2.21得到

系8 对每个$f\in C_0(-\infty, +\infty)$和$x\in(-\infty, +\infty)$有

$$|G_n(f, x)-f(x)|\leqslant\left(1+\frac{1}{2\lambda^2}\right)\omega_2\left(f, \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)$$

特别取$\lambda=1$得到

$$|G_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{3}{2}\omega_2\left(f,\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$$

对广义的Lupas—Baskakov算子$V_n^{(\alpha)}(\alpha\geqslant0)$，由于$V_n^{(\alpha)}((t-x)^2,x)=\frac{x(1-\alpha x)}{n}$，所以由推论2．19得到

系4 对每个$f\in C_B[0,\infty)$，$x\in[0,\infty)$和$\lambda>0$有

$$|V_n^{(\alpha)}(f,x)-f(x)|\leqslant(3+\lambda^{-2})\omega_2\left(f,\lambda\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}}\right)$$

特别取$\lambda=1$得到

$$|V_n^{(\alpha)}(f,x)-f(x)|\leqslant4\omega_2\left(f,\sqrt{\frac{x(1+\alpha x)}{n}}\right).$$

3．3精化的Mamedov—Shisha量化估计

现在应用定理2．5和定理2．6关于三参数 K—泛函 $K_1^*(f,t,t_1,t_2)$的估计来精化Mamedov—Shisha的估计，我们有

定理2．30 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$到自身内一致有界的线性算子列且适合如下条件：

i）存在$\varphi_n(x)\geqslant0$使得对$\forall g\in C^1[a,b]$有

$$|L_n(g,x)-g(x)|\leqslant\varphi_n(x)\|g'\|.$$

ii）存在$r_{kn}(x)\geqslant0$（$k=1,2$）使得对$\forall g_0\in C^2[a,b]$有

$$|L_n(g_0,x)-g_0(x)|\leqslant r_{1n}(x)|g_0'(x)|+r_{2n}(x)\|g_0''\|$$

此外，设$\frac{r_{kn}(x)}{\varphi_n(x)}$是有限的，则对每个$f\in C[a,b]$和每个$x\in[a,b]$有

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leqslant(L+1)K_1^*\left(f,\frac{\varphi_n(x)}{L+1},\frac{r_{1n}(x)}{\varphi_n(x)},\frac{r_{2n}(x)}{\varphi_n(x)}\right)$$

其中$L=\sup_{n\in N}\{\|L_n\|\}$　　　　（3．20）

证明　对$\forall g\in C^1[a,b]$，$g_0'\in C^2[a,b]$，由条件i），ii）导出

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leqslant|L_n(f-g,x)-(f-g)(x)|+|L_n(g-g_0,x)-(g-g_0)(x)|$$

$$+|L_n(g_0,x)-g_0(x)|\leqslant(L+1)\|f-g\|+\varphi_n(x)\|g'-g_0'\|+r_{1n}(x)|g_0'|+r_{2n}(x)\|g_0''\|$$

$$=(L+1)\|f-g\|+\varphi_n(x)\left(\|g_0'-g'\|+\frac{r_{1n}(x)}{\varphi_n(x)}|g_0'|+\frac{r_{2n}(x)}{\varphi_n(x)}\|g_0''\|\right)$$

先对$g_0\in C^2[a,b]$取下确界，再对$g\in C^1[a,b]$取下确界得到

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leqslant(L+1)\inf_{g\in C^1[a,b]}\left\{\|f-g\|+\frac{\varphi_n(x)}{L+1}\inf_{g_0\in C^2(a,b)}\left(\|g'-g_0'\|+\frac{r_{1n}(x)}{\varphi_n(x)}|g_0'|+\frac{r_{2n}(x)}{\varphi_n(x)}\|g_0''\|\right)\right\}$$

$$=(L+1)K_1^*\left(f,\frac{\varphi_n(x)}{L+1},\frac{r_{1n}(x)}{\varphi_n(x)},\frac{r_{2n}(x)}{\varphi_n(x)}\right).$$

证毕。

特别地对正线性算子列有

推论2.22 设 $\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a, b]$到自身内正线性算子列，且$L_n(1, x)=1$，记$\mu_n^2(x)=L_n((t-x)^2, x)$,则对每个$f\in C[a, b]$和$x\in[a, b]$有

$$|L_n(f,x)-f(x)|\leqslant 2K_1^*\left(f;\ \frac{L_n(|t-x|, x)}{2},\ \frac{|L_n(t-x, x)|}{L_n(|t-x|, x)}, \frac{\mu_n^2(x)}{2L_n(|t-x|, x)}\right) \tag{3.21}$$

证明 由引理2.21中的估计（3.11）和（3.12），取$\varphi_n(x)=L_n(|t-x|, x)$，$r_{1n}(x)=|L_n((t-x), x)|$和$r_{2n}(x)=\frac{\mu_n^2(x)}{2}$，并注意到$L=1$，由估计（3.20）导出（3.21)证毕。

应用推论2.5由（3.21）导出

推论2.23 对每个$f\in C^1[a, b]$，$x\in[a, b]$和$h>0$有

$$|L_n(f, x)-f(x)|\leqslant \frac{1}{2}\max\left(L_n(|t-x|, x),\ \frac{\mu_n^2(x)}{h}\right)\tilde\omega(f', h).$$

若对$L_n(|t-x|, x)$应用Schwarz不等式，并取$h=\lambda\mu_n(x)$（$\lambda>0$）得到

$$|L_n(f, x)-f(x)|\leqslant \frac{\mu_n(x)}{2}\max\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)\tilde\omega(f', \lambda\mu_n(x)) \tag{3.22}$$

若$\lambda=1$得到

$$|L_n(f, x)-f(x)|\leqslant \frac{\mu_n(x)}{2}\tilde\omega(f', \mu_n(x))\leqslant \mu_n(x)\omega(f', \mu_n(x))$$

在$C^1[a,b]$上这个估计是不可改进的,因为取$f_x(t)=(t-x)^2$则$\omega(f_x', \mu_n(x))=\mu_n(x)$,从而使上式变成等式。

特别地，对Bernstein算子B_n应用估计式（3.22）得到

系1 对$f\in C^1[0, 1]$，$x\in[0, 1]$，$n\geqslant 1$和$h>0$有

$$|B_n(f, x)-f(x)|\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\max\left(1, \frac{1}{h}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\tilde\omega(f', h)$$

特别取 $h=\lambda\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$（$\lambda>0$)得到

$$|B_n(f, x)-f(x)|\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\max\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)\tilde\omega\left(f', \lambda\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right). \tag{3.23}$$

若$\lambda=1$由（3.23）导出

$$|B_n(f, x)-f(x)|\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\tilde\omega\left(f', \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\omega\left(f', \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \tag{3.24}$$

估计（3.24）是不可改进的。

又若取 $\lambda=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$，由（3.23）导出

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\max\left(1,\ \sqrt{x(1-x)}\right)\tilde{\omega}\left(f',\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\tilde{\omega}\left(f',\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

因此对 $f\in C'[0,1]$ 有

$$\|B_n(f)-f\|\leqslant\frac{1}{4}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ \tilde{\omega}\left(f',\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\tag{3.25}$$

估计式（3.25）中的常数 $\frac{1}{4}$ 是不可改进的，即不可易以更小的正数，因为当 $\omega(f',t)$ 是上凸连续模时，$\tilde{\omega}(f',t)=\omega(f',t)$，而Schurer—Steutel对连续模 $\omega(f',t)$ 已证明 $\frac{1}{4}$ 是最佳的，但另一方面若 $\omega(f',t)$ 是上凸连续模，由（3.24）导出

$$\|B_n(f)-f\|\leqslant\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ \omega\left(f',\ \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\tag{3.26}$$

比较（3.25）和（3.26）这是有趣的。

最后应用定理2.6，从（3.21）导出

推论2.24 对每个 $f\in C[a,b]$，$x\in[a,b]$ 和 $h>0$ 有

$$|L_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant\max\left(1,\ \frac{L_n(|t-x|,\ x)}{h}\right)\tilde{\omega}(f,\ h)$$

$$\leqslant\max\left(1,\ \frac{\mu_n(x)}{h}\right)\tilde{\omega}(f,\ h)\tag{3.27}$$

特别取 $h=\lambda\mu_n(x)$（$\lambda>0$）导出

$$|L_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant\max\left(1,\ \frac{1}{\lambda}\right)\tilde{\omega}(f,\ \lambda\mu_n(x))\tag{3.28}$$

若 $\lambda=1$ 得到

$$|L_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant\tilde{\omega}(f,\ \mu_n(x))$$

特别地，对Bernstein算子 B_n 应用估计（3.28）得到

系2 对每个 $f\in C[0,1]$，$n\geqslant1$，和 $h>0$ 有

$$|B_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant\max\left(1,\ \frac{1}{h}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\tilde{\omega}(f,\ h)).$$

特别取 $h=\lambda\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ 导出

$$|B_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant\max\left(1,\ \frac{1}{\lambda}\right)\tilde{\omega}\left(f,\ \lambda\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$

若 $\lambda=1$ 得到

$$\|B_n(f)-f\|\leqslant\tilde{\omega}\left(f,\ \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)\leqslant\omega\left(f,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

其中常数1是最佳的。

3.4对BV函数逼近度量化的Bojanic方法

用B〔a, b〕表示〔a, b〕上有界函数的全体，L_n是B〔a, b〕到自身内的线性算子，且$L_n(1, x)=1$，R. Bojanic首先研究L_n对BV函数的点态近度逼估计，设f∈BV〔a, b〕，x∈(a, b)令

$$g_x(t)=\begin{cases} f(t)-f(x_+) & x<t\leqslant b \\ 0 & t=x \\ f(t)-f(x_-) & a\leqslant t<x \end{cases}$$

则有

$$f(t)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}+g_x(t)+\frac{f(x_+)-f(x_-)}{2}\operatorname{sgn}(t-x)+$$

$$+\delta_x(t)\left(f(t)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right)$$

其中$\delta_x(t)=\begin{cases}0 & t\neq x\\ 1 & t=x.\end{cases}$

因此有

$$\left|L_n(f, x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right|\leqslant\left|L_n(g_x, x)\right|+\frac{|f(x_+)-f(x_-)|}{2}\left|L_n(\operatorname{sgn}(t-x), x)\right|$$

$$+\left|f(x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right|\left|L_n(\delta_x, x)\right| \qquad (3.29)$$

由此可见，我们只需分别研究 $|L_n(g_x, x)|$、$|L_n(\operatorname{sgn}(t-x), x)|$ 以及$L_n(\delta_x, x)$的量化估计。

首先讨论如下形式的正线性算子，f∈BV〔a, b〕有

$$L_n(f, x)=\int_a^b f(t)d_tk_n(x, t) \qquad (3.30)$$

其中x∈〔a, b〕，而$d_tk_n(x, t)$关于t是非负测度且

$$\int_a^b d_tk_n(x, t)=1.$$

算子L_n概括一类广泛的正线性算子，例如Bernstein算子可表示为

$$B_n(f, x)=\int_0^1 f(t)d_tk_n(x, t) \qquad x\in〔0, 1〕$$

其中

$$k_n(x, t)=\begin{cases}0 & t=0\\ \sum\limits_{k\leqslant nt} p_{nk}(x) & t\in(0, 1〕\end{cases}$$

又如Bernstein—Kantrovich算子P_n可表示为

$$P_n(f, x)=\int_0^1 (n+1)\int_{\frac{nt}{n+1}}^{\frac{nt+1}{n+1}} f(u)du)d_tk_n(x, t)$$

若L_n是形如(3. 30)的正线性算子，且存在$\beta>0$和$v\geqslant 1$使得对$x\in(a, b)$有

$$|L_n(|t-x|^\beta, x)|=\int_a^b |t-x|^\beta d_tk_n(x, t)\leqslant C(x)n^{-v} \quad (3.31)$$

则说L_n是(β, v)矩量条件，例如，由于

$$B_n\left((t-x)^2, x\right)=\frac{x(1-x)}{n},$$

$$P_n\left((t-x)^2, x\right)\leqslant\frac{1}{4n},$$

所以B_n和P_n都适合(2, 1)矩量条件。

现在讨论$|L_n(g_x, x)|$的量化估计，为此建立如下引理。

引理2. 25 若L_n适合(β, v)矩量条件，则

i)对$a\leqslant y<x$，有

$$\int_a^y d_tk_n(x, t)\leqslant\frac{C(x)}{n^v(x-y)^\beta} \quad (3. 32)$$

ii)对$x<z\leqslant b$，有

$$\int_z^b d_tk_n(x, t)\leqslant\frac{C(x)}{n^v(x-y)^\beta} \quad (3. 33)$$

证明 i)由$a\leqslant y<x$，所以对$\forall t\in[a, y]$有 $\frac{x-t}{x-y}\geqslant 1$ 因而

$$\int_a^y d_tk_n(x, t)\leqslant\int_a^y\left(\frac{x-t}{x-y}\right)^\beta d_tk_n(x, t)$$

$$=\frac{1}{(x-y)^\beta}\int_a^y (x-t)^\beta d_tk_n(x, t)$$

$$\leqslant\frac{1}{(x-y)^\beta}\int_a^b |x-t|^\beta d_tk_n(x, t)\leqslant\frac{C(x)}{n^v(x-y)^\beta}$$

其中最后不等式是由(3. 30)导出。

类似地，可以证明(3. 33)，证毕。

引理2. 26 若L_n适合(β, v)矩量条件，则对$\forall f\in BV[a, b]$，$x\in(a, b)$有

$$|L_n(g_x, x)|\leqslant\frac{C_1(x)}{n^v}\sum_{k=1}^{n-1}\bigvee_{x-\frac{x-a}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{x+\frac{b-x}{k^{\frac{1}{\beta}}}}(g_x)+\bigvee_{x-\frac{x-a}{n^{\frac{1}{\beta}}}}^{x+\frac{b-x}{n^{\frac{1}{\beta}}}}(g_x)$$

(3. 34)

其中 $\overset{v}{\underset{u}{V}}(g_x)$表示$g_x(t)$在〔u，v〕上的全变差，而

$$C_1(x)=2C(x)\max\left\{\frac{1}{(x-a)^{\beta}},\ \frac{1}{(b-x)^{\beta}}\right\}.$$

证明　将区间〔a，b〕分为三部分：$I_1=\left[a,\ x-\frac{x-a}{n^{\frac{1}{\beta}}}\right]$

$I_2=\left[x-\frac{x-a}{n^{\frac{1}{\beta}}},\ x+\frac{b-x}{n^{\frac{1}{\beta}}}\right]$，$I_3=\left[x+\frac{b-x}{n^{\frac{1}{\beta}}},\ b\right]$ 于是

$$|L_n(g_x,\ x)|=|\int_a^b g_x(t)d_tk_n(x,\ t)|$$

$$\leqslant\left(\int_{I_1}+\int_{I_2}+\int_{I_3}\right)|g_x(t)|d_tk_n(x,\ t)$$

$$\triangleq\triangle_{1n}(f,\ x)+\triangle_{2n}(f,\ x)+\triangle_{3n}(f,\ x)$$

当$t\in I_2$时，注意到$g_x(x)=0$得到

$$|\triangle_{2n}(f,\ x)|=\int_{I_2}|g_x(t)-g_x(x)|d_tk_n(x,\ t)$$

$$\leqslant\overset{x+\frac{b-x}{n^{\frac{1}{\beta}}}}{\underset{x-\frac{x-a}{n^{\frac{1}{\beta}}}}{V}}(g_x)\qquad(3.35')$$

记$\lambda_n(x,\ t)=\int_a^t d_\tau k_n(x,\ \tau)$（$a\leqslant t<x$），　$y=x-\frac{x-a}{n^{\frac{1}{\beta}}}$，则有

$$\triangle_{1n}(f,\ x)=\int_a^y g_x(t)d_tk_n(x,\ t)=\int_a^y g_x(t)d\lambda_n(x,\ t)$$

由分部积分得到

$$|\triangle_{1n}(f,\ x)|\leqslant|g_x(y)\lambda_n(x,\ y)|+\int_a^y\lambda_n(x,\ t)d\left(-\overset{x}{\underset{t}{V}}(g_x)\right)$$

利用$|g_x(y)|\leqslant\overset{x}{\underset{y}{V}}(g_x)$和（3.32）得到

$$|\triangle_{1n}(f,\ x)|\leqslant\overset{x}{\underset{y}{V}}(g_x)\cdot\frac{C(x)}{n^{\gamma}(x-y)^{\beta}}+\int_a^y\frac{C(x)}{n^{\gamma}(x-t)^{\beta}}\left(d\overset{x}{\underset{y}{V}}(g_x)\right)$$

由于

$$\int_a^y \frac{1}{(x-t)^\beta} d\left(-\bigvee_t^x(g_x)\right) = -\frac{1}{(x-t)^\beta}\bigvee_t^x(g_x)\Big|_a^y + \int_a^y \bigvee_t^x(g_x)\frac{\beta}{(x-t)^{\beta+1}}dt$$

所以

$$|\Delta_{1,n}(f,x)| \leqslant \frac{C(x)}{n^r(x-a)^\beta}\bigvee_a^x(g_x) + \frac{C(x)\beta}{n^r}\int_a^{x-\frac{x-a}{n^{\frac{1}{\beta}}}}\bigvee_t^x(g_x)\frac{dt}{(x-t)^{\beta+1}}$$

上式积分中以 $x-\frac{x-a}{t^{\frac{1}{\beta}}}$ 代替 t 得到

$$\beta\int_a^{x-\frac{x-a}{n^{\frac{1}{\beta}}}}\bigvee_t^x(g_x)\frac{dt}{(x-t)^{\beta+1}} = \frac{1}{(x-a)^\beta}\int_1^n \bigvee_{x-\frac{x-a}{t^{\frac{1}{\beta}}}}^x(g_x)dt$$

$$\leqslant \frac{1}{(x-a)^\beta}\sum_{k=1}^{n-1}\bigvee_{x-\frac{x-a}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^x(g_x)$$

于是得到

$$|\Delta_{1,n}(f,x)| \leqslant \frac{2C(x)}{n^r(x-a)^\beta}\sum_{k=1}^{n-1}\bigvee_{x-\frac{x-a}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^x(g_x) \tag{3.36}$$

类似地计算并应用估计式（3.33）得到

$$|\Delta_{2,n}(f,x)| \leqslant \frac{2C(x)}{n^r(b-x)^\beta}\sum_{k=1}^{n-1}\bigvee_x^{x+\frac{b-x}{k^{\frac{1}{\beta}}}}(g_x) \tag{3.37}$$

记 $C_1(x)=2C(x)\max\left(\frac{1}{(x-a)^\beta}, \frac{1}{(b-x)^\beta}\right)$。由(3.35)—(3.37)导出估计式（3.34）证毕。

特别地有

推论2.25 若L_n适合（2，1）矩量条件，则对$\forall f\in BV[a,b]$，$x\in(a,b)$有

$$|L_n(g_x, x)| \leqslant \frac{C_1(x)}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{x-\frac{x-a}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{b-x}{\sqrt{k}}}(g_x) \qquad (3.38)$$

证明 由于L_n适合（2，1）矩量条件，根据引理2.25得到，对 $\forall f \in BV[a, b]$，$x \in (a, b)$有

$$|L_n(g_x, x)| \leqslant \frac{C_1(x)}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\bigvee_{x-\frac{x-a}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{b-x}{\sqrt{n}}}(g_x) + \bigvee_{x-\frac{x-a}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{b-x}{\sqrt{n}}}(g_x)$$

因为对$1 \leqslant k \leqslant n$有

$$\bigvee_{x-\frac{x-a}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{b-x}{\sqrt{n}}}(g_x) \leqslant \bigvee_{x-\frac{x-a}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{b-x}{\sqrt{k}}}(g_x)$$

故得

$$\bigvee_{x-\frac{x-a}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{b-x}{\sqrt{n}}}(g_x) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{x-\frac{x-a}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{b-x}{\sqrt{k}}}(g_x)$$

因此估计（3.38）得证。

由（3.29）和（3.37）得到

定理2.31 若Ln适合（β，v）矩量条件，则对$\forall f \in BV[a, b]$，$x \in (a, b)$有

$$|L_n(f, x) - \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}| \leqslant \frac{C_1(x)}{n^v}\sum_{k=1}^{n-1}\bigvee_{x-\frac{x-a}{k^{\frac{1}{\beta}}}}^{x+\frac{b-x}{k^{\frac{1}{\beta}}}}(g_x) + \bigvee_{x-\frac{x-a}{n^{\frac{1}{\beta}}}}^{x+\frac{b-x}{n^{\frac{1}{\beta}}}}(g_x)$$

$$+\left|\frac{f(x_+)-f(x_-)}{2}L_n(\mathrm{sgn}(t-x), x) + \left(f(x) - \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right)L_n(\delta_x, x)\right| \qquad (3.39)$$

关于（3.39)中最后一项的估计，没有普遍的方法可循，下面讨论一些具体的例子。

系1 设 B_n 是 Bernstein 算子，则对 $\forall f \in BV[0, 1]$ 和 $x \in (0, 1)$，当 $n > \frac{1}{4(1-x)}$有

$$\left|\frac{f(x_+)-f(x_-)}{2}\ B_n(\operatorname{sgn}\ (t-x),\ x)-\left(\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right)B_n(\delta_x,\ x)\right|$$

$$\leqslant\left(2\,|f(x_+)-f(x_-)|+\frac{3}{2}\varepsilon_n(x)|f(x)-f(x_-)|\right)\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}} \qquad (3.40')$$

其中

$$\varepsilon_n(x)=\begin{cases}0 & nx\notin N\\ 1 & nx\in N\end{cases} \qquad (3.41)$$

证明　我们应用概率论方法推导（3.40）和（3.41）首先指出与概率论中心极限定理有关的如下估计：设$\{\xi_k\}_{k\in N}$是与ξ_0同分布的独立随机变量序列，其中$0<D\xi_0<+\infty$，$\beta_3=E|\xi_0-E\xi_0|^3<+\infty$，则有

$$\max_{y\in R}\left|P\left(\frac{1}{b_1\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)\leqslant y\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right|$$

$$<\frac{C}{\sqrt{n}}\ \frac{\beta_3}{b_1^3} \qquad (3.42)$$

其中$a=E\xi_0$（数学期望），$b_1^2=D\xi_0$（方差），$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\leqslant C<0.82$。

其次证明，对$\forall x\in(0,1)$，当$n\geqslant\frac{1}{4}(1-x)^{-1}$时有

$$\left|\sum_{nx<k\leqslant n}p_{nk}(x)-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{nx(1-x)}}\ . \qquad (3.43)$$

为此设ξ_0是具有二项分布的随机变量，即

$$P(\xi_0=j)=x^j(1-x)^{1-j} \qquad (j=0,\ 1),$$

其中$x\in(0,1)$，因此$a=E\xi_0=x$，$b_1=(D\xi_0)^{\frac{1}{2}}=(x(1-x))^{\frac{1}{2}}$，而$\beta_3=E|\xi_0-E\xi_0|^3$

$=x(1-x)(x^2+(1-x)^2)\leqslant x(1-x)$.

若$\{\xi_k\}_{k\in N}$是与ξ_0同分布的随机变量列．记$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$　则有

$$P(\eta_n=k)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=p_{nk}(x) \qquad (0\leqslant k\leqslant n)$$

于是

$$\sum_{nx<k\leqslant n}p_{nk}(x)=P(nx<\eta_n\leqslant n)=P\left(0<\frac{\eta_n-nx}{\sqrt{nx(1-x)}}\leqslant\sqrt{\frac{n(1-x)}{x}}\right)$$

由（3.43）得到

$$\left|P\left(0<\frac{\eta_n-nx}{\sqrt{nx(1-x)}}\leqslant\sqrt{\frac{n(1-x)}{x}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{n(1-x)}{x}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right|$$

$$<\frac{C}{\sqrt{n}}\ \frac{\beta_3}{b_1^3}<\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}\ . \qquad (3.44)$$

通过简单计算，易知

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{M_n}^{+\infty} e^{-v^2}dv \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{1+M_n^2} < \frac{1}{4M_n^2}$$

所以由(3.44)导出，当 $n > \frac{1}{4(1-x)}$ 时，有

$$\left|\sum_{nx<k\leqslant n} p_{nk}(x) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{\frac{n(1-x)}{x}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{nx(1-x)}}.$$

此外还要证明，对 $\forall x\in(0,1)$，$0\leqslant k'\leqslant n$ 有

$$p_{nk'}(x) \leqslant \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}} \qquad (3.45)$$

事实上，由于

$$p_{nk'}(x) = \sum_{k'-1<k\leqslant k'} p_{nk}(x)$$

$$= P\left(\frac{k'-1-nx}{\sqrt{nx(1-x)}} < \eta_n \leqslant \frac{k'-nx}{\sqrt{nx(1-x)}}\right)$$

所以由(3.44)导出

$$\left|p_{nk'}(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{k'-1-nx}{\sqrt{nx(1-x)}}}^{\frac{k'-nx}{\sqrt{nx(1-x)}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right| < \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$$

从而有

$$p_{nk'}(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{k'-1-nx}{\sqrt{nx(1-x)}}}^{\frac{k'-nx}{\sqrt{nx(1-x)}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{nx(1-x)}} \leqslant \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$$

现在证明估计式(3.40)，由于

$$B_n(\delta_x, x) = \int_0^1 \delta_x(t)d_t k_n(x,t) = \begin{cases} 0 & nx\notin N \\ p_{nk'}(x) & nx=k'\in N \end{cases}$$

所以对 $x\in(0,1)$ 有

$$B_n(\delta_x, x) = \varepsilon_n(x)p_{nk'}(x). \qquad (3.46)$$

最后由于

$$B_n(\operatorname{sgn}(t-x), x) = \left(\sum_{x<\frac{k}{n}\leqslant 1} - \sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant x}\right)p_{nk}(x) \xlongequal{(记)} A_n(x) - B_n(x)$$

又因$B_n(1, x)=1$，若 $x\neq\frac{k}{n}(0<k<n)$，则有

$$B_n(1, x)=A_n(x)+B_n(x)=1$$

若$nx=k'\in N$，则有

$$B_n(1, x)=A_n(x)+p_{nk'}(x)+B_n(x)=1$$

所以对$x\in(0, 1)$有

$$B_n\left(\operatorname{sgn}(t-x), x\right)=2A_n(x)-1+\varepsilon_n(x)p_{nk'}(x) \tag{3.47}$$

因此由（3.43）和（3.45），以及（3.46）——（3.47）得到，对$\forall f\in BV[0,1]$，$x\in(0, 1)$，当$n>\frac{1}{4(1-x)}$ 有

$$\left|\frac{f(x_+)-f(x_-)}{2}B_n(\operatorname{Sgn}(t-x), x)+\left(f(x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right)B_n(\delta_x, x)\right|$$

$$=\left|\frac{f(x_+)-f(x_-)}{2}(2A_n(x)-1)+\left(f(x)-f(x_-)\right)\varepsilon_n(x)p_{nk'}(x)\right|$$

$$\leqslant\left(2|f(x_+)-f(x_-)|+\frac{3}{2}\varepsilon_n(x)|f(x)-f(x_-)|\right)\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$$

故（3.40）得证。

利用定理2.31，推论2.25以及（3.40）得到

推论2.26 对$\forall f\in BV[0, 1]$，$x\in(0, 1)$，当$n\geqslant\frac{1}{4(1-x)}$时，有

$$\left|B_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right|\leqslant\frac{3\left(x(1-x)\right)^{-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{1-x}{\sqrt{k}}}(g_x)$$

$$+\left(2|f(x_+)-f(x_-)|+\frac{3}{2}\varepsilon_n(x)|f(x)-f(x_+)|\right)\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}} \tag{3.48}$$

特别地，若理解 $f(x)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$ 得到

$$\left|B_n(f, x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right|\leqslant\frac{\left(3x(1-x)\right)^{-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{1-x}{\sqrt{k}}}(g_x)$$

$$+\frac{11}{4}|f(x_+)-f(x_-)|\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}.$$

应当指出估计（3.48）的逼近阶$n^{-\frac{1}{2}}$是不可改善的，为此取 $f_x(t)=|x-t|$ $\left(x\in(0, 1)\right)$，由于对任何 $\delta>0$有

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{nk}(x)\leqslant\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta}\right)\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{nk}(x)$$

$$\leqslant\delta+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2p_{nk}(x)\leqslant\delta+\frac{x(1-x)}{n\delta} \qquad (3.49)$$

和

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{nk}(x)\geqslant\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta}\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{nk}(x)$$

$$\geqslant\frac{1}{\delta}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2p_{nk}(x)$$

$$\geqslant\frac{x(1-x)}{n\delta}-\frac{1}{\delta}\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2p_{nk}(x)$$

因为

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2p_{nk}(x)\leqslant\frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^4p_{nk}(x)$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{3x^2(1-x)^2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\left(x(1-x)-6x^2(1-x)^2\right)\right)$$

$$\leqslant\frac{x^2(1-x)^2}{n^2\delta^2}\left(3+\frac{1}{nx(1-x)}\right)$$

所以导出

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{nk}(x)\geqslant\frac{x(1-x)}{n\delta}-\frac{7}{2}\frac{x^2(1-x)^2}{n^2\delta^3} \qquad (3.50)$$

当$n>\frac{2}{x(1-x)}$时，选取$\delta=2\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$，由(3.49)得到

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{nk}(x)\leqslant\frac{5}{2}\frac{\left(x(1-x)\right)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

而由(3.50)导出

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|p_{nk}(x)\geqslant\frac{1}{2}\frac{\left(x(1-x)\right)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}-\frac{7}{8}\frac{x^2(1-x)^2}{n^2\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\leqslant \frac{1}{16} \frac{(x(1-x))^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

因此，当 $n > \frac{2}{x(1-x)}$ 时，有

$$\frac{1}{16} \frac{(x(1-x))^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \leqslant B_n(|t-x|, x) \leqslant \frac{5}{2} \frac{(x(1-x))^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \tag{3.51}$$

更准确地可以证明：对 $x \in (0, 1)$，$r = [nx]$，有

$$B_n(|t-x|, x) = \frac{2(n-r)}{n} \binom{n}{r} x^{r+1}(1-x)^{n-r}.$$

另一方面，由于 $\bigvee_{x-u}^{x+v}(f_x) = v-u$，所以由（3.48）得到

$$|B_n(f_x, x) - f_x(x)| \leqslant \frac{(3x(1-x))^{-1}}{n} \sum_{k=1}^{n} \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{1-x}{\sqrt{k}}} (g_x)$$

$$= \frac{3(x(1-x))^{-1}}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \frac{3(x(1-x))^{-1}}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

由（3.51）可见，上述估计式的阶 $n^{-\frac{1}{2}}$ 是不可改进的。

类似地有

系2 设 P_n 是Bernstein—Kantorovich算子，则对 $\forall x \in (0, 1)$，当 $n > \frac{1}{4(1-x)}$ 时有

$$|P_n(\operatorname{sgn}(t-x), x)| \leqslant \frac{17+3\varepsilon_n(x)}{2} \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}} \tag{3.52}$$

证明 首先指出对 $x \in (0, 1)$，当 $n > \frac{1}{4(1-x)}$ 时有

$$\left| \sum_{x < \frac{k}{n+1} \leqslant \frac{n}{n+1}} p_{nk}(x) - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{7}{2} \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}. \tag{3.53}$$

事实上，由于

$$\sum_{x < \frac{k}{n+1} \leqslant \frac{n}{n+1}} p_{nk}(x) = \sum_{x < \frac{k}{n} \leqslant 1} p_{nk}(x) - \sum_{x - \frac{k}{n} < \frac{n+1}{n} x} p_{nk}(x)|$$

因为右端第二个和式至多只含一项，因此由（3.43）和（3.45）得到

$$\left| \sum_{x < \frac{k}{n+1} \leqslant \frac{n}{n+1}} p_{nk}(x) - \frac{1}{2} \right| \leqslant \left| \sum_{x < \frac{k}{n} \leqslant 1} p_{nk}(x) - \frac{1}{2} \right| + \left| \sum_{x < \frac{k}{n} < \frac{n+1}{n} x} p_{nk}(x) \right|$$

$$\leqslant \frac{7}{2} \frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}.$$

其次，若$x\in(0,1)$，记$k'=[(n+1)x]$，则有

$$P_n(\operatorname{sgn}(t-x),x)=\sum_{x<\frac{k+1}{n+1}\leqslant\frac{n}{n+1}} p_{nk}(x)-\sum_{0<\frac{k+1}{n+1}\leqslant x} p_{nk}(x)+$$

$$+(n+1)\left[\int_x^{\frac{k'+1}{n+1}} dt-\int_{\frac{k'}{n+1}}^x dt\right]p_{nk'}(x) \xlongequal{(记)} A_n(x)-B_n(x)+C_n(x)$$

又因为

$$P_n(1,x)=\sum_{k>(n+1)x} p_{nk}(x)+\sum_{k<(n+1)x} p_{nk}(x)+\varepsilon_n(x)p_{nk'}(x)$$
$$=A_n(x)+B_n(x)+\varepsilon_n(x)p_{nk'}(x)=1$$

其中 $\varepsilon_n(x)=\begin{cases}0 & (n+1)x\notin N\\ 1 & (n+1)x=k'\in N\end{cases}$ 所以有

$$P_n(\operatorname{sgn}(t-x),x)=2A_n(x)-1+\varepsilon_n(x)p_{nk'}(x)+C_n(x) \qquad (3.54)$$

由(3.53)，当$n\geqslant\frac{1}{4(1-x)}$时，有

$$|A_n(x)-\tfrac{1}{2}|\leqslant\frac{7}{2}\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$$

又因为$|C_n(x)|\leqslant p_{nk'}(x)$，所以由(3.45)导出

$$|C_n(x)|\leqslant p_{nk'}(x)\leqslant\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$$

因此由(3.54)导出，对$x\in(0,1)$当$n\geqslant\frac{1}{4(1-x)}$时，有

$$|P_n(\operatorname{sgn}(t-x),x)|\leqslant\frac{17+3\varepsilon_n(x)}{2}\frac{1}{\sqrt{nx(1-x)}}$$

证毕。

现在注意到$P_n(\partial_x,x)=0$，所以由定理2.31，推论2.25以及(3.52)得到

推论2.27 对$\forall f\in BV[0,1]$ $x\in(0,1)$，当$n\geqslant\frac{1}{4(1-x)}$时有

$$\left|P_n(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right|\leqslant\frac{3\left((x(1-x)\right)^{-2}}{4n}\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{1-x}{\sqrt{k}}}(g_x)$$

$$+\frac{17+3\varepsilon_n(x)}{4\sqrt{n}}|f(x_+)-f(x)| \qquad (3.55)$$

估计式(3.55)中的逼近阶是不可改进的，为此取 $f_x(t)=|x-t|$ $(x\in(0,1))$，由于

$$|P_n(|t-x|,x)-B_n(|t-x|,x)|$$

$$\leqslant(n+1)\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\left||t-x|-\left|\frac{k}{n}-x\right|\right|dt$$

$$\leqslant(n+1)\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}\left|t-\frac{k}{n}\right|dt$$

$$\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{nk}(x)<\frac{1}{n}.$$

因此利用(3.51)得到，当 $n\geqslant\frac{1024}{x(1-x)}$ 时，有

$$P_n(|t-x|,x)\geqslant B_n(|t-x|,x)-\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{32}\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

另一方面，由(3.55)可得

$$P_n(|t-x|,x)\leqslant\frac{3\left(x(1-x)\right)^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{n}}+\frac{5}{\sqrt{n}}\left(x(1-x)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

可见(3.55)中的阶是不可改进的。

现在讨论无穷区间的情况，考虑如下Lupas—Baskakov算子：

$$V_n^{(a)}(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)b_{nk}^{(a)}(x), \qquad x\in[0,\infty)$$

其中 $a>0$ 和

$$b_{nk}^{(a)}(x)=\begin{cases}e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} & (a=0)\\ \frac{n(n+a)\cdots\left(n+(k-1)a\right)}{k!}\frac{x^k}{(1+ax)^{\frac{n}{a}+k}} & (a>0)\end{cases}$$

用 $BV[0,\infty)$ 表示在 $[0,\infty)$ 内任何有限区间是有界变差的函数全体，由于 $V_n^{(a)}(1,x)=1$ 所以对每个 $f\in BV[0,\infty)$ 有

$$\left|V_n^{(a)}(f,x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right|\leqslant|V_n^{(a)}(g_x,x)|$$

$$+\left|\frac{f(x_+)-f(x_-)}{2}V_n^{(a)}(\operatorname{sgn}(t-x),x)+\left(f(x)-\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right)V_n^{(a)}(\delta_x,x)\right|,$$

(3.56).

若 ξ_0 是具有格子分布 $\left\{ b_k^{(\alpha)}(x) \right\}$ 的随机变量，则有 $E\xi_0=x$，$b_1^2=D(\xi_0)=x(1+\alpha x)$，且

$$\beta_3=\sum_{k=0}^{\infty} |k-x|^3 b_k^{(\alpha)}(x)\leqslant(1+\alpha x)\left(x(1+2(1+\alpha)x\right)$$

设 $\{\xi_k\}_{k\in N}$ 是与 ξ_0 同分布的独立随机变量列，令 $\eta_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ 则有

$$P(\eta_n=k)=b_{nk}^{(\alpha)}(x)$$

因此由（3，42）导出

$$\left|\sum_{k>nx} b_{nk}^{(\alpha)}(x)-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1+2(1+\alpha)x}{\sqrt{nx(1+\alpha x)}} \tag{3，57}$$

且对 $k'\in N$ 有

$$b_{nk}^{(\alpha)}(x)<\frac{3+4(1+\alpha)x}{2\sqrt{nx(1+\alpha x}} \tag{3，58}$$

记

$$k_n^{(\alpha)}(x,t)=\begin{cases}0 & t=0\\ \sum\limits_{k\leqslant nt} b_{nk}^{(\alpha)}(x) & 0<t<+\infty\end{cases}$$

则有

$$V_n^{(\alpha)}(f,x)=\int_0^{+\infty} f(t)\,d_t k_n^{(\alpha)}(x,t) \tag{3，59}$$

因为 $V_n^{(\alpha)}((t-x)^2,x)=\frac{x(1+\alpha x)}{n}$，所以 $V_n^{(\alpha)}$（$\alpha\geqslant0$）是适合（2，1）矩量条件，因此得到

系3　若 $f\in BV(0,\infty)$ 且 $f(t)=O(t^p)$（$p>0$，$t\to+\infty$），则有

$$|V_n^{(\alpha)}(g_x,x)|\leqslant\frac{2x(1+\alpha x)}{nx^2}\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{x}{\sqrt{k}}}(g_x)+$$

$$+O(1)\frac{2(1+\alpha x)\left(3+4(1+\alpha)x\right)}{\sqrt{nx(1+\alpha x)}}(4x)^p \tag{3，60}$$

证明　由于

$$V_n^{(\alpha)}(g_x,x)=\int_0^{+\infty} g_x(t)k_n^{(\alpha)}(x,t)dt$$

$$=\int_0^{2x} g_x(t)k_n^{(\alpha)}(x,t)dt+\int_{2x}^{+\infty} g_x(t)k_n^{(\alpha)}(x,t)dt$$

根据（3.38）得到

$$\left|\int_0^{2x} g_x(t)k_n^{(\alpha)}(x,t)dt\right|\leqslant\frac{2x(1+\alpha x)}{nx^2}\sum_{k=1}^{n}\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{x}{\sqrt{k}}}(g_x) \qquad (3.61)$$

其次，因为$f(t)=O(t^r)$ $(t\to+\infty)$，所以有

$$\int_{2x}^{+\infty} g_x(t)\,k_n^{(\alpha)}(x,t)dt=O(1)\int_{2x}^{+\infty} t^r k_n^{(\alpha)}(x,t)dt$$

$$=O(1)\sum_{k>2nx}\left(\frac{k}{n}\right)^r b_{nk}^{(\alpha)}(x)$$

注意到当$k>2nx$时有

$$\frac{b_{n,k+1}^{(\alpha)}(x)}{b_{nk}^{(\alpha)}(x)}=\frac{(n+k\alpha)}{k+1}\cdot\frac{x}{1+\alpha x}$$

$$\leqslant\frac{x\left(\frac{k}{2x}+k\alpha\right)}{k+1}\cdot\frac{1}{1+\alpha x}=\frac{k(1+2\alpha x)}{2(k+1)(1+\alpha x)}$$

$$=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1+2\alpha x}{2(1+\alpha x)}\leqslant\frac{1+2\alpha x}{2(1+\alpha x)}\overset{(记)}{=\!=}\varphi(x)<1.$$

令 $\beta_k(x)=\left(\frac{k}{n}\right)^r b_{nk}^{(\alpha)}(x)$，则有

$$\frac{\beta_{k+1}(x)}{\beta_k(x)}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^r\frac{b_{n,k+1}^{(\alpha)}(x)}{b_{nk}^{(\alpha)}(x)}\leqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^r\varphi(x)$$

因此对$x>0$存在k_x使得当$k>k_x$有

$$\left|\frac{\beta_{k+1}(x)}{\beta_k(x)}-\varphi(x)\right|<\frac{1-\varphi(x)}{2}$$

从而有

$$\frac{\beta_{k+1}(x)}{\beta_k(x)}\leqslant\varphi(x)+\frac{1-\varphi(x)}{2}=\frac{1+\varphi(x)}{2}\overset{(记)}{=\!=}\psi(x)<1$$

于是当$k>2nx$时有

$$\beta_{k+1}(x)\leqslant\psi(x)\beta_k(x)$$

因此得到

$$\sum_{k>2nx}\left(\frac{k}{n}\right)^r b_{nk}^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=[2nx]+1}^{\infty}\beta_k(x)$$

$$\leqslant\sum_{k=[2nx]+1}^{\infty}\beta_{[2nx]+1}(x)\psi(x)^{k-[2nx]-1}$$

$$\leqslant \frac{\beta_{[2nx]+1}(x)}{1-\varphi(x)} = \frac{2}{1-\varphi(x)}\beta_{[2nx]+1}(x)$$

$$= \frac{2}{1-\varphi(x)}\left(\frac{[2nx]+1}{n}\right)^p b_{n,[2nx]+1}^{(\alpha)}(x)$$

由(3.58)得到

$$\sum_{k>2nx}\left(\frac{k}{n}\right)^p b_{nk}^{(\alpha)}(x) \leqslant \frac{2(1+\alpha x)\left(3+4(1+\alpha)x\right)}{\sqrt{nx(1+\alpha x)}}(4x)^p \qquad (3.62)$$

由(3.61)和(3.62)导出(3.60)证毕。

现在估计(3.56)中的第二项，由于

$$V_n^{(\alpha)}(\delta_x,\ x) = \int_0^{+\infty} \delta_x(t)\,d_t k_n^{(\alpha)}(x,\ t) = \varepsilon_n(x) b_{nk'}^{(\alpha)}(x)$$

其中

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} 0 & nx \neq N \\ 1 & nx = k' \in N \end{cases}$$

其次，由于

$$V_n^{(\alpha)}\left(\operatorname{sgn}(t-x),\ x\right) = \left(\sum_{x<\frac{k}{n}<+\infty} - \sum_{0\leqslant\frac{k}{n}<x}\right) b_{nk}^{(\alpha)}(x)$$

$$\underline{\underline{(记)}}\ A_n(x) - B_n(x)$$

又

$$V_n^{(\alpha)}(1,\ x) = A_n(x) + B_n(x) + \varepsilon_n(x)\, b_{nk'}^{(\alpha)}(x) = 1.$$

所以对$\forall f\in BV(0,\ \infty)$，$x\in(0,\ \infty)$并利用(3.57)和(3.58)得到

$$\left|\frac{f(x_+)-f(x_-)}{2} V_n^{(\alpha)}\left(\operatorname{sgn}(t-x),\ x\right) + \left(f(x) - \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right) V_n^{(\alpha)}(\delta_x,\ x)\right|$$

$$= \left|\frac{f(x_+)-f(x_-)}{2}\left(2A_n(x)-1\right) + \left(f(x)-f(x_-)\right)\varepsilon_n(x) b_{nk'}^{(\alpha)}(x)\right|$$

$$\leqslant \left(|f(x_+)-f(x_-)|\left(1+2(1+\alpha)x\right) + \frac{\varepsilon_n(x)}{2}\left(3+4(1+\alpha)x\right)|f(x)-f(x_-)|\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{nx(1+\alpha x)}}$$

因而得到

推论2.28 对$\forall f\in BV(0,\ \infty)$，$x\in(0,\ \infty)$且$f(t)=O(t^p)$ ($p>0$, $t\to+\infty$)，则对足够大的n有

$$\left|V_n^{(\alpha)}(f,\ x) - \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\right| \leqslant \frac{2x(1+\alpha x)}{nx^2}\sum_{k=1}^{n} \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{k}}}^{x+\frac{x}{\sqrt{k}}}(g_x)$$

$$+O(1)\frac{2(1+\alpha x)(3+4(1+\alpha)x)}{\sqrt{nx(1+\alpha x)}}(4x)^{p}+\Big(|f(x_+)-f(x_-)|\cdot(1+2(1+\alpha)x)$$

$$+\frac{e_n(x)}{2}(3+4(1+\alpha)x)|f(x)-f(x_-)|\Big)\frac{1}{\sqrt{nx(1+\alpha x)}} \tag{3.63}$$

估计式（3．63）的阶是不可改进的。

§4逼近度估计的矩量方法

4.1周期卷积算子的Butzer—Freud量化定理

设Ω是实数集，$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核，其相应的周期卷积算子为

$$I_\rho(f,x)=(f*d\mu_\rho)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)d\mu_\rho(t)$$

记

$$\beta_\rho^2=I_\rho\left(2\sin^2\frac{t}{2},0\right)=1-\alpha_{1\rho}$$

现在讨论卷积算子I_ρ逼近$X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）的量化估计，建立Butzer—Freud量化定理，为此需要如下矩量不等式。

引理2．27 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核，则对$\rho\in\Omega$有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^k d\mu_\rho(t)\leqslant\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-\alpha_{1\rho})^{\frac{1}{2}} & (k=1)\\[2mm] \dfrac{\pi^2}{4}(1-\alpha_{1\rho}) & (k=2)\\[2mm] \dfrac{\pi^3}{4\sqrt{2}}(1-\alpha_{1\rho})\sqrt{4-\dfrac{1-\alpha_{2\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}} & (k=3)\\[2mm] \dfrac{\pi}{8}(1-\alpha_{1\rho})\left(4-\dfrac{1-\alpha_{2\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}\right) & (k=4)\end{cases} \tag{4.1}$$

证明 首先设$k=2$，由不等式

$$t^2\leqslant\pi^2\sin^2\frac{t}{2}\qquad(0\leqslant t\leqslant\pi),$$

导出

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2 d\mu_\rho(t)\leqslant\pi\int_0^\pi\sin^2\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\left(2\sin^2\frac{t}{2},0\right)=\frac{\pi^2}{4}(1-\alpha_{1\rho}).$$

其次，设k=1由Hölder不等式得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t d\mu_\rho(t) \leqslant \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2 d\mu_\rho(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\mu_\rho(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-\alpha_{1\rho})^{\frac{1}{2}}$$

所以（4．1）中i），ii）已得证。

现设k=4，则有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^4 d\mu_\rho(t) \leqslant \pi^3\int_0^\pi \sin^4\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)$$

$$=\pi^3\left(\int_0^\pi\left[(1-\cos t)-\frac{1}{4}(1-\cos 2t)\right]d\mu_\rho(t)\right)$$

$$=\frac{\pi^4}{2}\left((1-\alpha_{1\rho})-\frac{1}{4}(1-\alpha_{2\rho})\right)$$

$$=\frac{\pi^4}{8}(1-\alpha_{1\rho})\left(4-\frac{1-\alpha_{2\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}\right)$$

最后设k=3，再次应用Hölder不等式得到

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^3 d\mu_\rho(t) \leqslant \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^4 d\mu_\rho(t)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2 d\mu_\rho(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{\pi^3}{4\sqrt{2}}(1-\alpha_{1\rho})\sqrt{4-\frac{1-\alpha_{2\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}}$$

所以（4．1）中的iii），iV)得证。

利用矩量不等式（4．1）中的i），ii）得到

定理2．32 设$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是相应于正、偶Borel测度核$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的卷积算子族，则对$\forall f\in X^p_{2\pi}(1\leqslant p\leqslant+\infty)$有

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant \left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2\omega_2(f,\sqrt{1-\alpha_{1\rho}}), \tag{4.2}$$

证明．因为$d\mu_\rho(t)$（$\rho\in\Omega$）是偶的，所以

$$I_\rho(f,x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\big(f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\big)d\mu_\rho(t)$$

应用积分的Minkowski不等式得到

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\|\Delta_t^2(f)\|_{X^p_{2\pi}}d\mu_\rho(t)$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\omega_2(f,t)_p d\mu_\rho(t)$$

对任意的$\delta>0$，并应用矩量不等式，有

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant \omega_2(f,\delta)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(1+\frac{t}{\delta}\right)^2 d\mu_\rho(t)$$

$$\leqslant \left(1+\frac{\pi}{2\delta}\sqrt{1-\alpha_{1\rho}}\right)^2\omega_2(f,\delta),$$

特别取$\delta=(1-\alpha_{1\rho})^{\frac{1}{2}}$得到

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant \left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2 \omega_2\left(f,\ (1-\alpha_{1\rho})^{\frac{1}{2}}\right)_p$$

证毕。

例如，由于Fejér算子σ_n的核$\{F_n\}_{n\in N}$有

$$\beta^2=1-\alpha_{1n}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

所以由（4．2）得到

系1 对$\forall f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\|\sigma_n(f)-f\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\omega_2\left(f,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p \qquad (4.3)$$

又对于Jackson算子J_n的核$\{K_n\}_{n\in N}$有

$$\beta_n^2=1-\alpha_{1n}=\frac{3}{2(n+1)^2+1}<\frac{3}{2n^2}$$

所以由（4．2）得到

系2 对$\forall f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），则有

$$\|J_n(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}\leqslant\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2\omega_2\left(f,\ \frac{1}{n}\right)_p.$$

记

$$^*W_{p,\alpha}(k)=\{f\mid f\in X^p_{2\pi}\text{且}\omega_2(f,\ t)_p\leqslant 2kt^\alpha\}$$

$$^*W_{p\alpha}=\bigcup_{k>0}{}^*W_{p\alpha}(k)$$

其中$0<\alpha\leqslant2$，$1\leqslant p\leqslant+\infty$，由（4．2）导出

推论2．29 若$f\in{}^*W_{p\alpha}$，则有

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}=O\left((1-\alpha_{1\rho})^{\frac{\alpha}{2}}\right) \qquad (4.4)$$

特别地，若$f\in{}^*W_{p\alpha}(k)$，则有

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}\leqslant 2k\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2(1-\alpha_{1\rho})^{\frac{\alpha}{2}}$$

对Fejér算子σ_n应用（4．4）式得到：若$f\in{}^*W_{p\alpha}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$，$0<\alpha\leqslant2$），则有

$$\|\sigma_n(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}=O\left(n^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

应当指出，当$0<\alpha<1$时，上式的阶$n^{-\frac{\alpha}{2}}$是可以改进的，为此引入α阶矩量的概念：设$d\mu_\rho(t)$是正性Borel测度，令

$$m_{\alpha\rho}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}|t|^\alpha d\mu_\rho(t)$$

并称它为$d\mu_\rho$的α阶矩量，我们有

定理2．33 设$\{I_\rho\}_{\rho\in\rho}$是相应于正、偶Borel测度核$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\rho}$的卷积算子族，则

对$\forall f\in {}^{*}W_{p\alpha}(k)$（$0<\alpha\leqslant 2,\ 1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}\leqslant km_{\alpha\rho}$$

证明 因为$d\mu_\rho$是偶的，所以

$$I_\rho(f,x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\big(f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\big)d\mu_\rho(t)$$

因此由Minkowski积分不等式导出，若$f\in {}^{*}W_{p\alpha}(k)$，则

$$\|I_\rho(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\omega_2(f,t)_p d\mu_\rho(t)$$

$$\leqslant 2k\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^\alpha d\mu_\rho(t)=km_{\alpha\rho}$$

证毕。

现在对Fej'er算子σ_n应用（4.5）式得到

系3 对每个$f\in {}^{*}W_{p\alpha}$（$0<\alpha\leqslant 2,\ 1\leqslant p<+\infty$）有

$$\|\sigma_n(f)-f\|_{X^p_{2\pi}}\begin{cases}O(n^{-\alpha}) & 0<\alpha<1\\ O\left(\frac{\ln n}{n}\right) & \alpha=1\\ O(n^{-1}) & 1<\alpha\leqslant 2\end{cases}\qquad (4.6)$$

证明 由计算对Fejer核$F_n(t)$有

$$t^\alpha F_n(t)\leqslant\begin{cases}2^{\alpha-3}\dfrac{\pi^2}{(n+1)^{\alpha-1}} & \left(t\in\left(0,\frac{1}{n}\right),\ 0<\alpha\leqslant 1\right),\\ \dfrac{\pi^2 t^{\alpha-2}}{n+1} & (t\in(0,\pi),\ 0<\alpha\leqslant 2),\end{cases}$$

因此导出，对$0<\alpha\leqslant 1$有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}t^\alpha F_n(t)dt\leqslant 2n^{-\alpha}$$

和

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^\pi t^\alpha F_n(t)dt\leqslant\begin{cases}\dfrac{\pi}{1-\alpha} & (0<\alpha<1)\\ \pi\dfrac{\ln n\pi}{n+1} & (\alpha=1)\end{cases}$$

以及

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^{1+\alpha}F_n(t)dt\leqslant\frac{\pi^2}{\alpha}n^{-1}$$

由此可见，对$0<\alpha\leqslant 2$有

$$m_{\alpha n}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^\alpha F_n(t)dt=\begin{cases}O(n^{-\alpha}) & (0<\alpha<1)\\ O\left(\frac{\ln n}{n}\right) & (\alpha=1)\\ O(n^{-1}) & (1<\alpha\leqslant 2)\end{cases}$$

因而由（4．5）导出（4．6）证毕。

4．2算子逼近的Ditzian量化定理

设J是区间 $I=[0,1]$，R_+或R，对$f\in C(J)$和$h>0$，令

$$\triangle_h(f,x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)$$

$$\triangle_h^r(f,x)=\triangle_h\left(\triangle_h^{r-1}(f),x\right)$$

和

$$\omega_{2m}(f,h)=\sup_{\eta\leqslant h}\left\{\sup_{(x-m\eta,x+m\eta)\subset J}|\triangle_\eta^{2m}(f,x)|\right\}.$$

其中r，m∈N

现在引入f的2m阶Steklov平均：

$$f_{2m,h}(x)=\left(\frac{2m}{h}\right)^{2m}\int_0^{\frac{h}{2m}}\cdots\int_0^{\frac{h}{2m}}\left\{\sum_{k=1}^{2m}\binom{2m}{k}(-1)^{k+1}\cdot\right.$$

$$\left.f\left(x+k(u_1+u_2+\cdots+u_{2m}\right)\right\}du_1\cdots du_{2m}\qquad(4.7)$$

其中x使得$[x,x+2mh]\subset J$，容易证实

$$|f(x)-f_{2m,h}(x)|\leqslant\omega_{2m}(f,h)\qquad(4.8)$$

和$f_{2m,h}(x)\in C^{2m}(J)$（对$j<2m$有$f_{2m,h}^{(j)}(x)\in AC(J)$）且

$$|f_{2m,h}^{(2m)}(x)|\leqslant\left(\frac{2m}{h}\right)^{2m}\sum_{k=1}^{2m}\binom{2m}{k}\omega_{2m}\left(f,\frac{k}{2m}h\right)$$

$$\leqslant\left(\frac{4m}{h}\right)^{2m}\omega_{2m}(f,h).$$

现在考查如下一般形式的线性算子L_n：对$f\in C(J)$，$x\in J$，令

$$L_n(f,x)=\int_J f(t)d\alpha_{n,x}(t)\qquad(4.10)$$

其中测度$d\alpha_{n,x}(t)$适合如下条件：对每个$x\in J$有

$$\int_J d\alpha_{n,x}(t)=1$$

和

$$V_{n,x}(t)\overset{(记)}{=}\int_{u\leqslant t}|d\alpha_{n,x}(t)|\leqslant M<+\infty.$$

本节讨论L_n对C(J)逼近度的量化估计，首先建立如下引理

引理2．23 设线性算子L_n由（4．10）定义，若适合矩量条件

$$\int_J t^i d\alpha_{n,x}(t)=x^i\qquad(i=0,1,2,\cdots 2m-1)$$

且

$$\int_J (t-x)^{2m} dV_{n,x}(t) \leqslant D_n(x)$$

则对$\forall g \in C^{2m}(J)$有

$$|L_n(g, x)-g(x)| \leqslant \frac{D_n(x)}{(2m)!}\|g^{(2m)}\| \qquad (4.11)$$

证明 由Taylor展开和矩量条件，我们有

$$|L_n(g, x)-g(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{2m-1} \frac{1}{i!}|g^{(i)}(x)||L_n((x-t)^i, x)|$$

$$+\frac{1}{(2m)!}|g^{(2m)}(\xi)|\int_J (x-t)^{2m} dV_{n,x}(t)$$

$$\leqslant \frac{D_n(x)}{(2m)!}\|g^{(2m)}\|$$

证毕。

定理2.84（**Z. Ditzian**） 设L_n是（4.10）定义，线性算子的若适合矩量条件

$$\int_J t^i d\alpha_{n,x}(t) = x^i \qquad (i=0, 1, 2, \cdots 2m-1),$$

且

$$\int_J (t-x)^{2m} dV_{n,x}(t) \leqslant D_n(x),$$

则对每个$f \in C(J)$，当$J=R_+$或R时有

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leqslant \left(M+1+\frac{(4m)^{2m}}{(2m)!}\omega_{2m}(f, D_n^{\frac{1}{2m}}(x)\right) \qquad (4.12)$$

当$J=I$时有

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leqslant \left(M+1\frac{(4m)^{2m}}{(2m)!}+LD_n^{\frac{1}{2m}}(x)\right)\omega_{2m}(f, D_n^{\frac{1}{2m}}(x)) \qquad (4.14)$$

其中L是仅依赖于m的正常数。

证明 首先设$J=R_+$或R，由（4.8）、（4.9）以及（4.11），并注意到$\|L_n\| \leqslant M < +\infty$，我们有

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leqslant |L_n(f-f_{2m,h}(x)|+|f(x)-f_{2m,h}(x)|+|L_n(f_{2m,h}, x) - f_{2m,h}(x)|$$

$$\leqslant (M+1)\omega_{2m}(f, h)+\frac{D_n(x)}{h^{2m}}\frac{(4m)^{2m}}{(2m)!}\omega_{2m}(f, h)$$

$$=\left(M+1+\frac{D_n(x)}{h^{2m}}\frac{(4m)^{2m}}{(2m)!}\right)\omega_{2m}(f, h)$$

特别取$h=(D_n(x))^{\frac{1}{2m}}$得到

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leqslant \left(M+1+\frac{(4m)^{2m}}{(2m)!}\right)\omega_{2m}\left(f, D_n^{\frac{1}{2m}}(x)\right).$$

因而（4.12）得证。

其次，设$I=I$选取$\Psi\in C_{\infty}(I)$使得在〔0，$\frac{1}{3}$〕上$\Psi(x)=1$，在〔$\frac{2}{3}$，1〕上$\Psi(x)=0$且$\Psi(x)$在〔0，1〕上是下降的，令

$$F_h(x)=f_{2m,h}(x)\Psi(x)+f_{2m,h}(x)\big(1-\Psi(x)\big) \qquad (4.14)$$

则有

$$|F_h(x)-f(x)|\leqslant\omega_{2m}(f,h).$$

且

$$F_{h}^{(2m)}(x)=\begin{cases} f_{2m,h}^{(2m)}(x) & x\in〔0,\tfrac{1}{3}〕\\ f_{2m,-h}^{(2m)}(x) & x\in〔\tfrac{2}{3},1〕\end{cases} \qquad (4.15)$$

而对$x\in$〔$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$〕有

$$F_h^{(2m)}(x)=f_{2m,h}^{(2m)}(x)-\Big(\big(f_{2m,h}(x)-f_{2m,-h}(x)\big)\big(1-\Psi(x)\big)\Big)^{(2m)}$$

$$=f_{2m}^{(2m)}(x)-\big(f_{2m,h}^{(2m)}(x)-f_{2m,-h}^{(2m)}(x)\big)\big(1-\Psi(x)\big)+\sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m}{k}$$

$$\cdot\big(f_{2m,h}(x)-f_{2m,-h}(x)\big)^{(k)}\Psi^{(2m-k)}(x)\overset{\text{记}}{=}I_1+I_2$$

由（4.9）得到

$$|I_1|=\big|f_{2m,h}^{(2m)}(x)-\big(f_{2m,h}^{(2m)}(x)-f_{2m,-h}^{(2m)}\big)\big(1-\Psi(x)\big)\big|$$

$$\leqslant\big|f_{2m}^{(2m)}(x)\Psi(x)+f_{2m,-h}^{(2m)}(x)\big(1-\Psi(x)\big)\big|$$

$$\leqslant|f_{2m}^{(2m)}(x)|\Psi(x)+|f_{2m,-h}^{(2m)}(x)|\big(1-\Psi(x)\big)$$

$$\leqslant\Big(\frac{4m}{h}\Big)^{2m}\omega_{2m}(f,h)$$

又记 $K=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant 2m}\|\Psi^{(i)}\|$，则有

$$|I_2|=\Big|\sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m}{k}\big(f_{2m,h}(x)-f_{2m,-h}(x)\big)^{(k)}\Psi^{(2m-k)}(x)\Big|$$

$$\leqslant K\sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m}{k}\Big|\big(f_{2m,h}(x)-f_{2m,-h}(x)\big)^{(k)}\Big|$$

由于对$k=2m$有

$$\Big|\big(f_{2m,h}(x)-f_{2m,-h}(x)\big)^{(k)}(x)\Big|=\Big|\Big(\frac{2m}{h}\Big)^{2m}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{k}\int_0^{\frac{h}{2m}}\cdots\int_0^{\frac{h}{2m}}$$

$$\overline{\Delta}^{2m}_{u_1+u_2+\cdots+u_{2m}}(f,x)du_1du_2\cdots du_{2m}-\Big(\frac{2m}{h}\Big)^{2m}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^{k}$$

$$\int_0^{\frac{h}{2m}}\cdots\int_0^{\frac{h}{2m}}\overline{\triangle}^{2m}_{-u_1-u_2-\cdots-u_{2m}}(f,\ x)du_1\cdots du_{2m}\Big|$$

其中$\overline{\triangle}_\eta(f,\ x)=f(x+\eta)-f(x)$，$\overline{\triangle}_\eta^{\,l}(f,\ x)=\overline{\triangle}_\eta(\triangle^{l-1}(f),\ x)$。

记

$$J_k^+=\Big|\Big(\frac{2m}{h}\Big)^{2m}\frac{d}{dx^k}\int_0^{\frac{h}{2m}}\cdots\int_0^{\frac{h}{2m}}\overline{\triangle}^{2m}_{u_1+\cdots+u_{2m}}(f,\ x)du_1\cdots du_{2m}\Big|$$

$$=\Big|\Big(\frac{2m}{h}\Big)^{2m}\int_0^{\frac{h}{2m}}\cdots\int_0^{\frac{h}{2m}}\overline{\triangle}^{2m}_{u_{k+1}+\cdots+u_{2m}}(f,\ x)du_{k+1}\cdots du_{2m}\Big|$$

$$\leqslant\Big(\frac{2m}{h}\Big)^k 2^k\omega_{2m}\Big(f,\ \frac{2m-k}{2m}h\Big)。$$

类似地有

$$J_k^-=\Big|\Big(\frac{2m}{h}\Big)^{2m}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^k\int_0^{\frac{h}{2m}}\cdots\int_0^{\frac{h}{2m}}\overline{\triangle}^{2m}_{-u_1-u_2-\cdots-u_{2m}}(f,\ x)du_1\cdots du_{2m}\Big|$$

$$\leqslant\Big(\frac{2m}{h}\Big)^k 2^k\omega_{2m}\Big(f,\ \frac{2m-k}{2m}h\Big)$$

因此得到

$$|I_2|\leqslant 2h^{-2m+1}K\sum_{k=0}^{2m-1}\binom{2m}{k}(4m)^k\omega_{2m}(f,\ h)$$

$$\leqslant h^{-2m+1}\,2K(4m+1)^{2m}\omega_{2m}(f,\ h)。$$

于是对$x\in[\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}]$有

$$|F_1^{(2m)}(x)|\leqslant\Big(\Big(\frac{4m}{h}\Big)^{2m}+\frac{2K}{h^{2m-1}}(4m+1)^{2m}\Big)\omega_{2m}(f,\ h)$$

故由（4．9）和（4．15）得到，对$x\in I$有

$$|F_2^{(2m)}(x)|\leqslant\Big(\Big(\frac{4m}{h}\Big)^{2m}+\frac{2K}{h^{2m-1}}(4m+1)^{2m}\Big)\omega_{2m}(f,\ h)$$

因而由（4．11）导出，对$x\in I$有

$$|L_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant|L_n(f-F_h,\ x)|+|f(x)-F_h(x)|+|L_n(F_h,\ x)-F_h(x)|$$

$$\leqslant\Big(M+1+\big((4m)^{2m}+2Kh(4m+1)^{2m}\big)\frac{D_n(x)}{(2m)!\,h^{2m}}\Big)\omega_{2m}(f,\ h)$$

取 $h=(D_n(x))^{\frac{1}{2m}}$ 得到

$$|L_n(f,\ x)-f(x)|\leqslant\Big(M+1+\frac{(4m)^{2m}}{(2m)!}+LD_n^{\frac{1}{2m}}(x)\Big)\omega_{2m}\Big(f,\ D_n^{\frac{1}{2m}}(x)\Big)$$

其中 $L=\dfrac{2K(4m+1)^{2m}}{(2m)!}$，所以（4．13）证得

注记1 从定理的证明可见，矩量条件

$$\int_J t^i d\alpha_{n,x}(t) = x^i \qquad (i=0, 1, 2, \cdots 2m-1)$$

可用如下条件代替：

$$\int_J d\alpha_{n,x}(t)=1 \text{和} \int_J (t-x)^i d\alpha_{n,x}(t)=0 \qquad (i=1, 2, \cdots 2m-1)。$$

注记2 当m=1时，利用引理2．11和引理2．23定义的Steklov平均$f_{t,1}(x)$代替定理证明中引入的Steklov平均，类似地讨论得到，对$x\in J$有

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leq \frac{3M+5}{2} \omega_2\left(f, D_n^{\frac{1}{2}}(x)\right)$$

这也可从推论2．20导出。

现在讨论L_n不适合矩量条件，即 $\int_J t^i d\alpha_{n,x}(t) \neq x^i$ （$i=1, 2, \cdots 2m-1$）的情况，我们有

定理2．35 设L_n是由（4．11）定义的线性算子，若$\int_J d\alpha_{n,x}(t)=1$和

$$\int_J (t-x)^i d\alpha_{n,x}(t) = R_{n,i}(x) \quad (i=1, 2, \cdots 2m-1)，$$

其中$R_{n,i}(x)=o(1)$（$n\to+\infty$）且

$$\int_J (t-x)^{2m} dV_{n,x}(t) \leq D_n(x)$$

则对每个$f\in C(J)$有

$$|L_n(f, x)-f(x)| \leq C\sum_{i=1}^{2m-1} \omega_i\left(f, |R_{n,i}(x)|^{\frac{1}{i}}\right) + C\omega_{2m}\left(f, R_n(x)^{\frac{1}{2m}}\right) \tag{4. 16}$$

其中$R_n(x)=D_n(x)+K\sum_{i=1}^{2m-1}|R_{n,i}(x)|^{\frac{2m}{i}}$，而C，K为仅依赖于m的正常数。

证明　为了利用定理2．34，需要构造一个形如（4．10）的新线性算子A_n：

$$A_n(f, x) = \int_J f(t) d\beta_{n,x}(t)$$

使得$\int_J d\beta_{n,x}(t)=1$和

$$A_n\left((t-x)^j, x\right)=0 \qquad (1\leq j\leq 2m-1)$$

且

$$\int_J (t-x)^{2m} dV_{n,x}(t) \leq R_n(x)$$

其中$V_{n,x}(t)=\int_{u\leq t}|d\beta_{n,x}(t)|$，为此，当$J=R_+$，R对$x>0$或当$J=I$，对$x\in(0, \frac{1}{2})$，令

$$L_{n,i}(f, x) = \frac{-1}{i!} \operatorname{sgn}R_{n,i}(x) \overline{\Delta}^i_{|R_{n,i}(x)|^{\frac{1}{i}}}(f, x)$$

而当$J=I$，对$x\in(\frac{1}{2},1)$，令

$$L_{n,i}(f,x)=\frac{(-1)^{i+1}}{i!}\ \mathrm{sgn}R_{n,i}(x)\overline{\triangle}^{i}_{-|R_{n,i}(x)|^{\frac{1}{i}}}(f,x)$$

由计算得到

$$L_{n,i}((t-x),^{i}x)=-R_{ni}(x)$$

而对$i<j\leqslant 2m-1$有

$$L_{n,i}((t-x)^{j},x)=C_{ij}|R_{n,i}|^{\frac{j}{i}}(x)\mathrm{sgn}R_{ni}(x)$$

其中C_{ij}是依赖于i，j与n，x无关的正常数。

为消去对$j=j_1$的影响，我们加上算子

$$L_{n,i,j_1}(f,x)=\frac{-C_{i,j_1}}{j_1!}\mathrm{sgn}R_{n,i}(x)\ \overline{\triangle}^{j_1}_{|R_{n,i}(x)|^{\frac{1}{i}}}(f,x)$$

(对$J=[0,1]$当$x\in(\frac{1}{2},1)$可类似处理)当然对$j_1<j_2\leqslant 2m-1$仍有

$$L_{n,i,j_1}((t-x)^{j_2}\quad x)=C_{i,j_1,j_2}|R_{ni}(x)|^{\frac{j_2}{i}}\mathrm{sgn}R_{ni}(x)$$

类似地，为消去对$j=j_2$的影响，我们将加上算子$L_{n,i,j_1,j_2}(f,x)$，由归纳法可一般地定义算子$L_{n,i,j_1,j_2\cdots j_k}(f,x)$，因为有

$$L_{n,i,j_1\cdots j_{k-1}}((t-x)^{j_k},x)=C_{i,j_1,\cdots j_k}\mathrm{sgn}R_{ni(x)}|R_{ni}(x)|^{\frac{j_k}{i}}$$

定义

$$L_{n,i,j_1,\cdots j_k}(f,x)=\frac{-C_{i,j_1,\cdots j_k}}{j_k!}\mathrm{sgn}R_{n,i}(x)\overline{\triangle}^{j_k}_{|R_{n,i}(x)|^{\frac{1}{i}}}(f,x)$$

(对$J=[0,1]$，$x\in(\frac{1}{2},1)$可类似处理)，这样可定义

$$A_n(f,x)=L_0(f,x)+\sum_{i=1}^{2m-1}\Big(L_{n,i}(f,x)+\sum_{1\leqslant i<j_1<\cdots<j_k\leqslant 2m-1}L_{n,i,j_1,\cdots j_k}(f,x)\Big)$$

其中第二个和式是关于所有有限序列j_1，$j_2\cdots j_k$且$1<j_1<j_2\cdots<j_k\leqslant 2m-1$取和的

由于算子A_n的范数

$$\|A_n\|\leqslant M+\sum_{i=1}^{2m-1}\Big(\frac{2^i}{i!}+\sum_{1\leqslant i<j_1<\cdots<j_k\leqslant 2m-1}|C_{i,j_1,\cdots j_k}|\frac{2^{j_k}}{j_k!}\Big)$$

所以对应于A_n的测度$d\beta_{n,x}(t)$具有有限的变差$V_{n,x}(t)$即

$$V_{n,x}(t)=\int_{u\leqslant t}|d\beta_{n,x}(t)|<+\infty$$

且有

$$\int_J (t-x)^{2m} dV_{n,x}(t) \leqslant D_n(t) + \sum_{i=1}^{2m-1} \Big\{ |R_{ni}(x)|^{\frac{2m}{i}} r_i +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i < j_1 < \cdots < j_k \leqslant 2m-1} |C_i, j_1 \cdots j_k| \, |R_{ni}(x)|^{\frac{2m}{i}} r_{i, j_1, \ldots, j_k} \Big\}$$

其中r_i和$r_{i, j_1, \ldots, j_k}$仅依赖于m的正数，所以有

$$\int_J (t-x)^{2m} dV_{n,x}(t) \leqslant D_n(x) + k \sum_{i=1}^{2m-1} |R_{ni}(x)|^{\frac{2m}{i}} \underset{\text{(记)}}{=} R_n(x)$$

因此由定理2．34导出，对每个$f \in C(J)$有

$$|A_n(f, x) - f(x)| \leqslant C\omega_{2m}\left(f, R_n(x)^{\frac{1}{2m}}\right) \qquad (4.17)$$

由于

$$|L_{n,i}(f, x)| \leqslant \frac{1}{i!} \omega_i \left(f, |R_{n,i}(x)|^{\frac{1}{i}}\right)$$

而

$$|L_{n,i,j_1,j_2,\cdots j_k}(f, x)| \leqslant \frac{|C_i, j_1, \cdots j_k|}{j_k!} \omega_{j_k}\left(f, |R_{ni}(x)|^{\frac{1}{i}}\right)$$

$$\leqslant \frac{|C_i, j_1, j_2 \cdots j_k|}{j_k!} 2^{j_k - i} \left(f, |R_{ni}(x)|^{\frac{1}{i}}\right),$$

所以（4．17）导出（4．16），证毕。

例1　设P_n为Bernstein—Kantorovich算子，由于$P_n(1, x) = 1, P_n(t-x, x) = \frac{1-2x}{2(n+1)}$

和

$$P_n((t-x)^2, x) = \frac{x(1-x)}{n} + O(n^{-2})$$

所以$R_{n1}(x) = \frac{1-2x}{2(n+1)}$，因此有

$$A_n(f, x) = P_n(f, x) - \text{sgn} R_{n1}(x) \, \overline{\Delta}_{|R_{n1}(x)|}(f, x)$$

$$= P_n(f, x) - \text{Sgn} R_{n1}(x) \left(f\left(x + |R_{n1}(x)|\right) - f(x) \right).$$

由计算得到$A_n(1, x) = 0$,　　$A_n(t-x, x) = 0$和

$$A_n((t-x)^2, x) = P_n((t-x)^2, x) - \text{sgn} R_n(x) |R_{n1}(x)|^2$$

$$= \frac{x(1-x)}{n} - \text{sgn} R_{n1}(x) \left(\frac{1-2x}{2(n+1)}\right)^2 + O(n^{-2})$$

$$\leqslant \frac{x(1-x)}{n} + \frac{1}{4}\left(\frac{1-2x}{n}\right)^2 + O(n^{-2})$$

记

$$R_2(x)=\frac{x(1-x)}{n}+\frac{1}{4}\left(\frac{1-2x}{n}\right)^2+O(n^{-2})$$
$$\leqslant\frac{x(1-x)}{n}+\frac{L}{n^2}$$

其中L≤1，因而由定理2．35得到

系1 对每个$f\in[0,1]$，有

$$|P_n(f,x)-f(x)|\leqslant M\omega_2\left(f,\left(\frac{x(1-x)}{n}+\frac{L}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\omega_1\left(f,\frac{|1-2x|}{n}\right)\right)$$

例2 设S_n^*为Szasz—Kantorovich算子，即对$f\in C[0,\infty)$

$$S^*(f,x)=\frac{d}{dx}S_n(F,x),\quad F(u)=\int_0^u f(t)dt$$

其中S_n是Szasz—Mirakajan算子，由于$S_n^*(1,x)=1$，$S_n^*(t-x,x)=\frac{1}{2n}$和

$$S_n^*((t-x)^2,x)=\frac{x}{n}+\frac{1}{3n^2}$$

所以有$R_1(x)=\frac{1}{2n}$，$R_2(x)=\frac{x}{n}+\frac{7}{12}\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{x}{n}+\frac{1}{n^2}$，因此由定理2．35得到

系2 对每个$f\in C[0,\infty)$，$x\in(0,\infty)$有

$$|S_n^*(f,x)-f(x)|\leqslant M\omega_2\left(f,\sqrt{\frac{x}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)+\omega_1\left(f,\frac{1}{2n}\right)$$

例3 设V_n^*为Baskakov—Kantorovich算子，即对$f\in C(0,\infty)$有

$$V_n^*(f,x)=\frac{d}{dx}V_{n-1}(f,x),\quad F(u)=\int_0^u f(t)dt$$

其中V_n是Baskakov算子，由于$V_n^*(1,x)=1$，$V_n^*(t-x,x)=\frac{1+2x}{2n}=\frac{x}{n}+\frac{1}{2n}$和

$$V_n^*((t-x)^2,x)=\frac{x(1+x)}{n}+\frac{1}{3n^2}$$

所以$R_{n1}(x)=\frac{x}{n}+\frac{1}{2n}$，$R_n(x)\leqslant\frac{x(1+x)}{n}+\frac{1}{3n^2}+R_{n1}^2(x)\leqslant\frac{2x(1+x)}{n}+\frac{1}{n^2}$，因此由定理2．35得到

系3 对每个$f\in C[0,\infty)$，$x\in(0,\infty)$有

$$|V_n^*(f,x)-f(x)|\leqslant M\omega_2\left(f,2\sqrt{\frac{x(1+x)}{n}+\frac{1}{n}}\right)+\omega_1\left(f,\left(\frac{x}{n}+\frac{1}{2n}\right)\right)$$

最后指出Z、Ditzian量化定理也适合于非正线性算子逼近的情况。

第三章 逼近精度与逆定理

§1 算子逼近的精度分析

1.1逼近度估计的精确性概念

设X，Y是两个赋范线性空间，其范数分别为$\|\cdot\|_X$，$\|\cdot\|_Y$。U是X中的稠密线性集且有半范$|\cdot|_U$，若$\{R_n\}_{n\in N}$是X到Y内一致有界的次线性算子列，且存在$\varphi_n\to 0$使得对每个$g\in U$有

$$\|R_ng\|_Y\leqslant C_1\varphi_n|g|_U \tag{1.1}$$

则对每个$f\in X$有

$$\|R_nf\|_Y\leqslant C_2K_U(f,\varphi_n)_X \tag{1.2}$$

人们自然关心，用怎样的标准来衡量逼近度估计（1.2）精确与否呢？明显地，若存在$f_0\in X$使得（1.2）等号成立，那末估计（1.2）当然是精确的(或不能改进的)，但是，这种f_0一般并不存在，因此需要引入其它的精确性概念。

设 $\omega(t)$是连续模函数，即$\omega(0)=0$ 且对$0<t_1<t_2$有

$$0\leqslant\omega(t_2)-\omega(t_1)\leqslant\omega(t_2-t_1),$$

记

$$X_\omega=\{f\,|\,f\in X\text{且 }K_U(f,t)_X=O(\omega(t))\}.$$

由（1.2）对每个$f\in X_\omega$有

$$\|R_nf\|_Y=O(\omega(\varphi_n)) \tag{1.3}$$

若存在$f_\omega\in X_\omega$使得

$$\|R_nf_\omega\|_Y\neq o(\omega(\varphi_n)) \tag{1.4}$$

或

$$\|R_nf_\omega\|_Y\asymp C\omega(\varphi_n)$$

则说逼近度估计（1.3）是精确的。

应当指出，若$\omega(t)/t\to+\infty$（$t\to0^+$）或 $\sup\limits_{t>0}\dfrac{\omega(t)}{t}=+\infty$，则对每个$g\in U$有

$$\|R_ng\|_Y=o(\omega(\varphi_n)).$$

事实上，由于$\varphi_n\to0^+$，所以可设$0<\varphi_n<t$，因此由连续模函数的性质导出

$$\omega(t)/t\leqslant2\omega(\varphi_n)/\varphi_n \tag{1.5}$$

若$g\in U$，则由（1·1）有

$$\|R_ng\|_Y\leqslant C_1\|g\|_U\varphi_n$$

因此由（1.5）得到

$$\frac{\|R_ng\|_Y}{\omega(\varphi_n)}\leqslant C_1\|g\|_U\frac{\varphi_n}{\omega(\varphi_n)}\leqslant2C_1\|g\|_U\;\frac{t}{\omega(t)}$$

从而当$t\to0^+$时（因而$\varphi_n\to0^+$）有

$$\|R_ng\|_Y=O(\omega(\varphi_n))$$

可见$f_\omega\in X\backslash U$

当然关于逼近度估计的精确性，还有一些其它的衡量标准，例如建立逆定理以及逼近等价定理，我们将在下面几节分别予以讨论。

1.2 逼近度估计精确性的充分条件

为了判断逼近度估计的精确性，关键是研究怎样的条件下，确保f_ω的存在。Dickmeis—Nessel 应用滑峰法（The gliding hump method）给出f_ω存在的充分条件。即

定理2.1（Dickmeis—Nessel） 设X是Banach空间，Y是赋范线性空间。U是X内的稠密子集，$\omega(t)$是连续模函数且

$$\sup_{t>0}\frac{\omega(t)}{t}=+\infty \tag{1.6}$$

若$\{R_n\}_{n\in N}$是X到Y内一致有界的次线性算子列，且存在$\{h_n\}_{n\in N}\subset U$使得对足够大的n有

$$\begin{aligned}&\text{i)}\ \|h_n\|_X\leqslant C_1\\&\text{ii)}\ \|h_n\|_U\leqslant C_2\varphi_n^{-1}\\&\text{iii)}\ 0<C_3\leqslant\|R_nh_n\|_Y\end{aligned} \tag{1.7}$$

其中$\varphi_n\to0^+$（$n\to+\infty$），则存在$f_\omega\in X$，使得

$$\|R_nf_\omega\|_Y\neq O(\omega(\varphi_n))$$

证明 采用反证法。设对$\forall f\in X$，有

$$\|R_nf\|_Y=o(\omega(\varphi_n))$$

其中$\varphi_n\to0^+$（$n\to-\infty$），从$n_1\in N$出发选取自然数子列$\{n_k\}\subset N$使得

$$\begin{aligned}&\text{i}')\ \omega(\varphi_{n_k})\leqslant\frac{1}{2}\omega(\varphi_{n_{k-1}})\\&\text{ii}')\ \frac{\omega(\varphi_{n_k})}{\varphi_{n_k}}>\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\omega(\varphi_{n_j})}{\varphi_{n_j}}\\&\text{iii}')\ \|R_{n_{k-1}}\|_{(X,Y)}\leqslant\frac{C_3}{6C_1}\;\frac{\omega(\varphi_{n_{k-1}})}{\omega(\varphi_{n_k})}\end{aligned} \tag{1.8}$$

iv′）记$g_{k-1}=\sum_{j=1}^{k-1}\omega(\varphi_{n_j})h_{n_j}\in U$，有

$$\|R_{n_k}g_{k-1}\|_Y\leqslant\frac{C_2}{3}\omega(\varphi_{n_k})$$

明显地，适合i′）—iv′）的$\{n_k\}_{k\in N}$是存在的，例如i′）是$\omega(\varphi_n)\to0(n\to\infty)$保证

ii）是由$\frac{\omega(\varphi_n)}{\varphi_n}\to+\infty$（$n\to+\infty$）保证的，iii）也是$\omega(\varphi_n)\to0$（$n\to+\infty$）保证的，

iv′）是由$\frac{\omega(t)}{t}\to+\infty$和反证法假设保证的。此外还可假设$\varphi_{n_k}\downarrow0$（$k\to+\infty$）。

现在取

$$f_0=\sum_{j=1}^{\infty}\omega(\varphi_{n_j})h_{n_j}$$

由（1.7）i）和（1.8）i′）得到

$$\|f_0\|_X\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\omega(\varphi_{n_j})\|h_{n_j}\|_X$$

$$\leqslant C_1\omega(\varphi_{n_1})\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j+1}<+\infty$$

因为X是完备的，所以$f_0\in X$。

最后证明$f_0\in X_\omega$且

$$\|R_n(f_0)\|_Y\neq o(\omega(\varphi_n))$$

事实上，对$t\in(0,\varphi_{n_1})$存在$k=k_t\in N$使得

$$\varphi_{n_{k+1}}\leqslant t<\varphi_{n_k}$$

因此有

$$\frac{\omega(\varphi_{n_k})}{\varphi_{n_k}}\leqslant2\frac{\omega(t)}{t}$$

所以由（1.7）和（1.8）得到

$$K_U(f_0,t)_X\leqslant\|f_0-g_k\|_X+t\|g_k\|_U$$

$$\leqslant\|\sum_{j=k+1}^{\infty}\omega(\varphi_{n_j})h_{n_j}\|_X+t\|\sum_{j=1}^{k}\omega(\varphi_{n_j})h_{n_j}\|_U$$

$$\leqslant C_1\sum_{j=k+1}^{\infty}\omega(\varphi_{n_{k+1}})+C_2t\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\omega(\varphi_{n_j})}{\varphi_{n_j}}+\frac{\omega(\varphi_{n_k})}{\varphi_{n_k}}\right)$$

$$\leqslant C_1\omega(\varphi_{n_{k+1}})+2C_2+\frac{\omega(\varphi_{n_k})}{\varphi_{n_k}}$$

$$\leqslant2C_1\omega(t)+2C_2\omega(t)=2(C_1+C_2)\omega(t)$$

即得$f_0\in X_\omega$，又

$$f_0=\omega(\varphi_{n_k})h_{n_k}+g_{k-1}+(f_0-g_k)$$

所以由（1.8）导出

$$\|R_{n_k}f_0\|_Y \geq \|R_{n_k}(\omega(\varphi_{n_k})h_{n_k})\| - \|R_{n_k}g_{k-1}\|_Y$$

$$-\|R_{n_k}\|_{(X,Y)}\|f_0-g_k\|_X \geq \omega(\varphi_{n_k})\|R_{n_k}h_{n_k}\|_Y$$

$$-\frac{C_3}{3}\omega(\varphi_{n_k}) - \|R_{n_k}\|_{(X,Y)}\|f_0-g_k\|_X$$

$$\geq C_3\omega(\varphi_{n_k}) - \frac{C_3}{3}\omega(\varphi_{n_k}) - \frac{C_3}{C_1}\frac{\omega(\varphi_{n_k})}{\omega(\varphi_{n_{k+1}})} - 2C_1\omega(\varphi_{n_{k+1}})$$

$$\geq C_3\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\omega(\varphi_{n_k})$$

因此得到

$$\|R_nf_0\|_Y \neq o(\omega(\varphi_n)), \quad (n\to\infty)$$

证毕。

注记 1）为证明$f_0\in X_\omega$，条件（1.7）ii）是必要的，若注意到条件（1.7）i），则条件（1.7）ii）可用如下较弱的Bernstein型不等式代替：

$$\|h_n\|_U \leq C\varphi_n^{-1}\|h_n\|_X \tag{1.9}$$

2）从条件（1.7）i）和ii）断定，范数$\|R_n\|$有非零下界，即

$$\|R_n\|_{(X,Y)} \geq \frac{\|R_nh_n\|_Y}{\|h_n\|_X} \geq \frac{C_3}{C_1}$$

3）从条件（1.7）ii）和iii）断定：

$$\|R_nh_n\|_Y \geq \left(\frac{C_3}{C_2}\right)\varphi_n\|h_n\|_U$$

由此可见，要得到精确的估计式（1.2），Jackson型不等式（1.1）是能减弱的。

若对$f\in X_\omega$，我们引入半范

$$|f|_\omega = \sup_{t>0}\frac{K_U(f,t)_X}{\omega(t)},$$

我们有

推论3.1 设$\{R_n\}_{n\in N}$是X到Y内一致有界的次线性算子列，且适合条件（1.1）和（1.7），则存在正常c_0，C_0使得

$$c_0 \leq \sup_{0<|f|_\omega<+\infty}\left(\frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\|R_nf\|_Y}{\omega(\varphi_n)}}{|f|_\omega}\right) \leq C_0 < +\infty.$$

证明 由（1.2）对$\forall f\in X_\omega$有

$$\|R_nf\|_Y \leq C_2K_U(f,\varphi_n)_X \leq C\omega(\varphi_n)$$

所以 $$\frac{\|R_nf\|_Y}{\omega(\varphi_n)} \leq C_2\frac{K_U(f,\varphi_n)_X}{\omega(\varphi_n)} \leq C_2|f|_\omega$$

从而得到

$$\sup_{0<|f|_\omega<+\infty}\left(\frac{\overline{\lim}\frac{\|R_nf\|_Y}{\omega(\varphi_n)}}{\omega(\varphi_n)}\right) \leq C_0 < +\infty$$

其次，由定理3.1存在$f_\omega\in X_\omega$使得对$t>0$有$K_U(f_\omega, t)_X \leq C\omega(t)$，且

$$\|R_n f_\omega\|_Y \neq o(\omega(\varphi_n))$$

所以必有 $0<\|f_\omega\|_\omega \leqslant C<+\infty$，又因为

$$\|R_{n_k} f_\omega\|_Y \geqslant \frac{C_3}{3}\omega(\varphi_{n_k})$$

故得 $$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\|R_n f_\omega\|_Y}{\omega(\varphi_n)}}{\|f_\omega\|_\omega} \geqslant \frac{C_3}{3C} \;(\underline{\text{记}})\; C_4$$

证毕。

泛函分析中的共鸣定理推出：若对Banach空间X中每个f有$\|R_n f\|_Y=O(1)$，则有$\|R_n\|_{(X,Y)}=O(1)$，人们自然要问，若对每个$f\in X$有$\|R_n f\|_Y=o(1)$，关于$\|R_n\|_{(X,Y)}$有什么结论呢？我们有

定理3.2 设$\{R_n\}_{n\in N}$是X到Y内一致有界的次线性算子列，且存在$\{h_n\}_{n\in N}\subset U$和$\varphi_n\to 0^+(n\to\infty)$使得对所有$n\in N$有

i) $\|h_n\|_X\leqslant C_1$，

ii) $\|h_n\|_U\leqslant C_2\varphi_n^{-1}$， (1.10)

iii) $\|R_n h_n\|_Y\geqslant C_3\|R_n\|_{(X,Y)}$。

若对每个$f\in X_\omega$有

$$\|R_n f\|_Y=o(1) \tag{1.11}$$

则有

$$\omega(\varphi_n)\|R_n\|_{(X,Y)}=o(1) \tag{1.12}$$

其中连续模函数$\omega(t)$适合条件(1.6)。

证明 采用反证法，设

$$\omega(\varphi_n)\|R_n\|_{(X,Y)}\neq o(1) \quad (n\to+\infty).$$

记$\widetilde{R}_n=\omega(\varphi_n)R_n$，则有

$$\|\widetilde{R}_n\|_{(X,Y)}\neq o(1)$$

因此存在子列$\{n_k\}$使得

$$\|\widetilde{R}_{n_k}\|_{(X,Y)}\geqslant C>0$$

所以由(1.10) iii)导出

$$\|\widetilde{R}_{n_k}h_{n_k}\|_Y=\omega(\varphi_{n_k})\|R_{n_k}h_{n_k}\|_Y$$

$$\geqslant C_3\|\widetilde{R}_{n_k}\|_{(X,Y)}\geqslant C_3C>0$$

可见对子列$\{\widetilde{R}_{n_k}\}$和$\{h_{n_k}\}$适合条件(1.7)中i)—iii)，因此由定理3.1断定存在$f_\omega\in X_\omega$使得

$$\|\widetilde{R}_{n_k} f\|_Y \neq o(\omega(\varphi_{n_k}))$$

从而有

$$\|R_n f_\omega\| \neq o(1)$$

与假设矛盾，定理证毕。

注记 对$\omega(t)=\text{Const}$，有$X_\omega = X$，虽然$\omega(t)=\text{Const}$并非连续模函数，但这时正好是经典的共鸣定理，所以$\omega(t)=\text{Const}$可视为定理3.2的极端情况。

1.3 应用举例

为了论证需要，首先建立Bernstein不等式。

引理3.1 若T_n是n次三角多项式，则有

$$\|T_n'\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant 2n\|T_n\|_{X^p_{2\pi}} \tag{1.13}$$

其中$1\leqslant p\leqslant +\infty$

证明 由计算得到

$$T_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(t)\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)dt$$

微分导出

$$T_n'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)\left(2\sum_{k=1}^{n} k\sin kt\right)dt$$

利用正交性得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)\left(2\sum_{k=1}^{n-1} k\sin(2n-k)t\right)dt=0$$

所以有

$$T'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)\left(2\sum_{k=1}^{n} k\sin kt+2\sum_{k=1}^{n-1} k\sin(2n-k)t\right)dt.$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x+t)2n\sin nt F_{n-1}(t)dt$$

其中$F_n(t)$是Fejér核，因此由Minkowski不等式得出

$$\|T_n'\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant 2n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|T_n(\cdot+t)\|_{X^p_{2\pi}} F_{n-1}(t)dt$$

$$=2n\|T_n\|_{X^p_{2\pi}}$$

证毕。

由于T_n'仍然是n次三角多项式，所以由归纳法和引理3.1导出。

推论3.2 若T_n是n次三角多项式，则对每个$r\in N$有

$$\|T_n^{(r)}\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant (2n)^r \|T_n\|_{X^p_{2\pi}} \tag{1.14}$$

应当指出，采用更细致（但仍然是初等的）论证可得到：若T_n是n次三角多项式，则

$$\|T_n'\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant n\|T_n\|_{X^p_{2\pi}}$$

等号为$T_n(x)=\sin nx$达到。

设$\omega(t)$是连续模函数且

$$\sup_{t>0}\frac{\omega(t)}{t}=+\infty,$$

若取 $X=X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），则由定理2.1可知

$$X^p_{\omega r}=\left\{f \mid f\in X^p_{2\pi}\text{且}K_r(f,t)_p=O(\omega(t^r))\right\}$$

$$=\left\{f \mid f\in X^p_{2\pi}\text{且}\omega_r(f,t)_p=O(\omega(t^r))\right\}$$

应用定理3.1得到

系1 设S_n是Fourier算子，则对每个$f\in X^p_{\omega r}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\|S_nf-f\|_{X^p_{2\pi}}=O(\omega(n^{-r})\ln n) \tag{1.15}$$

且对$p=1$，∞存在$f_0\in X^p_{\omega r}$使得

$$\|S_nf_0-f_0\|_{X^p_{2\pi}}\neq o(\omega(n^{-r})\ln n)$$

可见估计式（1.15）对$p=1$，∞是精确的。

证明　设$f\in X^p_{\omega r}$，$T_n(X)$是f的n次最佳逼近三角多项式，由§2.1中例1得到

$$E_n^*(f)_p=\|T_n-f\|_{X^p_{2\pi}}=O\left(\omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_p\right)=O(\omega(n^{-r}))$$

由于$\|D_n\|_1\sim\frac{4}{\pi^2}\ln n$，其中$D_n$是Dirichlet核函数，我们有

$$\|S_nf-f\|_{X^p_{2\pi}}\leqslant\|S_n(f-T_n)\|_{X^p_{2\pi}}+\|T_n-f\|_{X^p_{2\pi}}$$

$$\leqslant(\|D_n\|_1+1)\|T_n-f\|_{X^p_{2\pi}}$$

$$\leqslant(\ln n+1)\ E_n^*(f)_p$$

从而导出估计式（1.15）

现在证明当$p=1$，∞时，估计式（1.15）是精确的，这里只讨论$p=\infty$的情况，而$p=1$的情况是类似的。为此在定理3.1中取$X=Y=C_{2\pi}$，$U=C^r_{2\pi}$和

$$R_n=\frac{S_n-I}{\ln n}$$

其中I是恒等算子，由于$\|S_n\|=\|D_n\|_1\sim\frac{4}{\pi^2}\ln n$，所以对$C'\in(0,\frac{4}{\pi^2})$，存在$f_n\in C_{2\pi}$且

$\|f_n\|_{C_{2\pi}}=1$ 使得

$$\|S_nf_n\|_{C_{2\pi}}\geqslant C'\ln n,$$

设V_n是Vallée—Poussion算子，记$h_n=V_n(f_n)$，则h_n是次数$\leqslant 2n$的三角多项式，下面证明$\{h_n\}$适合定理3.1中的条件（1.7）。实际上，有

i)由于$\|V_n\|\leqslant 3$　所以

$$\|h_n\|_{C_{2\pi}}=\|V_nf_n\|_{C_{2\pi}}\leqslant\|V_n\|\,\|f_n\|\leqslant 3.$$

ii)由引理3.1（Bernstein不等式）有

$$|h_n|_U=\|h^{(r)}\|_{C_\pi}\leqslant n^r\|h_n\|_{C_{2\pi}}\leqslant 3n^r$$

所以取$\varphi_n=n^{-r}$

iii)由于$S_nh_n=S_nV_nf_n=S_nf_n$，所以

$$\|R_nh_n\|_{C_{2\pi}}=\frac{1}{\ln n}\|S_nh_n-h_n\|_{C_{2\pi}}$$

$$\geqslant\frac{1}{\ln n}(\|S_nh_n\|-\|h_n\|)$$

$$\geqslant\frac{1}{\ln n}(C'\ln n-3)\geqslant C_1>0$$

因此由定理3.1 存在$f_\omega\in X^p_{\omega,r}$（$p=\infty$）使得

$$\|S_nf_\omega-f_\omega\|_{C_{2\pi}}\neq o(\omega(n^{-r})\ln n)$$

证毕。

从§2.1例1得到如下 Jackson定理：对每个$f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$E^*_n(f)_p=O(\omega_r(f,n^{-1})_p)\tag{1.16}$$

应用定理3.1 可以证明估计（1.16）是精确的，

我们有：

系2　对每个$f\in X^p_{\omega,r}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），有

$$E^*_n(f)_p=O(\omega(n^{-r}))$$

且存在$f_\omega\in X^p_{\omega,r}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）使得

$$E^*_n(f_\omega)_p\neq o(\omega(n^{-r}))$$

证明　在定理3.1中取$X=X^p_{2\pi}$，$Y=R$，$U=W^r_p$和次线性算子$R_n=E^*_n(\cdot)$，以及$h_n(x)=\cos nx$，可以证明对$\{R_n\}$和$\{h_n\}$适合定理3.1中条件（1.7）事实上，有

i) $\|h_n\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant 1$,

ii) 由Bernstein 不等式，有

$$\|h_n\|_U = \|h_n^{(r)}\|_{X^p_{2\pi}} \leqslant n^r.$$

iii) 由于

$$\|R_n h_n\|_Y = |R_n h_n| = E_n^*(h_n)_p \geqslant \frac{1}{2}$$

因此由定理3.1断定存在$f_\omega \in X^p_{2\pi}$使得

$$E_n^*(f_\omega)_p \neq o(\omega(n^{-r}))$$

证毕。

§2. 周期卷积算子逼近的逆定理

设$I_\rho(f, x) = (f * d\mu_\rho)(x)$是$X^p_{2\pi}$（$1 \leqslant p \leqslant +\infty$）上周期卷积算子族，若$d\mu_\rho$（$\rho \in \Omega$）是正，偶Borel测度核，由Butzer—Freud 量化定理断定：对每个$f \in X^p_{2\pi}$（$1 \leqslant p \leqslant +\infty$）有

$$\|I_\rho(f) - f\|_{X^p_{2\pi}} = O\left(\omega_2\left(f, (1-\alpha_{1,\rho})^{\frac{1}{2}}\right)_p\right),$$

特别地，当$f \in {}^*W_{p,\alpha}$（$0 < \alpha \leqslant 2$）时有

$$\|I_\rho(f) - f\|_p = O\left((1-\alpha_{1,\rho})^{\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{2.1}$$

自然要问上述逆命题是否成立，准确地说，若$f \in X^p_{2\pi}$（$1 \leqslant p \leqslant +\infty$）且适合估计式（2.1），可否断定$f \in {}^*W_{p,\alpha}$呢？本节建立周期卷积算子逼近的逆定理，给出两种不同类型的条件和论证方法。

2.1经典的Bernstein方法

设$\{I_\rho\}_{\rho \in \Omega}$是$X^p_{2\pi}$($1 \leqslant p \leqslant +\infty$)上卷积算子族，若对$\forall \rho_k, \rho_m \in \Omega$和$\forall f \in X^p_{2\pi}$有

$$I_{\rho_k}(I_{\rho_m})(f) = I_{\rho_m}(I_{\rho_k})(f)$$

则说$\{I_\rho\}_{\rho \in \Omega}$是可交换的，又设$\varphi(\rho) \uparrow +\infty (\rho \to \rho_0)$且存在$\rho_k \uparrow$（或$\downarrow$）$\rho_0$（$k \to +\infty$）使得

$$\sup_{k \geqslant 1} \frac{\varphi(\rho_{k+1})}{\varphi(\rho_k)} = K < +\infty \tag{2.2}$$

我们有如下逼近逆定理。

定理3.3 设$\{I_\rho\}_{\rho \in \Omega}$是$X^p_{2\pi}$（$1 \leqslant p \leqslant +\infty$）上可交换的卷积算子族且存在适合条

件（2.2）的$\varphi(\rho)$使得对每个$g\in X_{2\pi}^{2}$有 Bernstein 型条件

$$\|I_\rho''(g)\|_p\leqslant C\varphi^2(\rho)\|g\|_p \qquad (2.3)$$

其中C为正常数。若$f\in X_{2\pi}^{p}$且对$0<\alpha\leqslant 2$有

$$\|I_\rho(f)-f\|_p=O(\varphi(\rho)^{-\alpha}) \qquad (2.4)$$

则对$t\in(0,1)$有

$$\omega_2(f,t)_p=\begin{cases}O(t^\alpha) & 0<\alpha<2\\ O(t^2\ln\frac{1}{t}) & \alpha=2\end{cases}$$

特别地，对$0<\alpha<2$有$f\in{}^{*}W_{p\alpha}$。

证明　设$\rho_k\uparrow\rho_0$（$k\to\infty$），记

$$U_2(x)=I_{\rho_2}(f,x)$$

$$U_k(x)=I_{\rho_k}(f,x)-I_{\rho_{k-1}}(f,x)\text{；}(k\geqslant 3)$$

因此有

$$\|\sum_{k=2}^{n}U_k-f\|_p\to 0 \qquad (n\to+\infty)$$

所以

$$f(x)=\sum_{k=2}^{\infty}U_k(x) \qquad (a.e)$$

因而对$h>0$有

$$\|\triangle_h^2(f)\|_p\leqslant\sum_{k=2}^{m}\|\triangle_h^2(U_k)\|_p+\sum_{k=m+1}^{\infty}\|\triangle_h^2(U_k)\|_p$$

其中m是待定的。

由（2.4）和条件（2.2）导出，当$k\geqslant 3$时，有

$$\begin{aligned}\|U_k\|_p&\leqslant\|I_{\rho_k}(f)-f\|_p+\|I_{\rho_{k-1}}(f)-f\|_p\\&\leqslant B_p(\varphi^{-\alpha}(\rho_k)+\varphi^{-\alpha}(\rho_{k-1}))\\&\leqslant B_p(1+K^\alpha)\varphi^{-\alpha}(\rho_k)\end{aligned} \qquad (2.5)$$

其中B_p是正常数，又由可交换条件，当$k\geqslant 2$时有

$$U_k(x)=I_{\rho_k}(f-I_{\rho_{k-1}}(f),x)-I_{\rho_{k-1}}(f-I_{\rho_k}(f),x)$$

因此由 Bernstein 型条件（2.3）和（2.2）导出

$$\begin{aligned}\|U_k''\|_p&\leqslant\|I_{\rho_k}''(f-I_{\rho_{k-1}}(f))\|_p+\|I_{\rho_{k-1}}''(f-I_{\rho_k}(f))\|_p\\&\leqslant B_p(\varphi^2(\rho_k)\|I_{\rho_{k-1}}(f)-f\|_p+\varphi^2(\rho_{k-1})\|I_{\rho_k}(f)-f\|_p)\\&\leqslant B_p(\varphi^2(\rho_k)\varphi^{-\alpha}(\rho_{k-1})+\varphi^2(\rho_{k-1})\varphi^{-\alpha}(\rho_k))\\&\leqslant C_p(\varphi(\rho_k))^{2-\alpha}\end{aligned}$$

其中C_p是正常数，所以当$k\geqslant 2$时有

$$\|\triangle_h^2(U_k)\|_p\leqslant h^2\|U_k''\|_p\leqslant C_ph^2((\varphi(\rho_k))^{2-\alpha} \qquad (2.6)$$

于是由（2.5）和（2.6）得到，对$h>0$有

$$\|\Delta_h^2(f)\|_p \leqslant C_p h^2 \sum_{k=2}^{m} \varphi^{2-\alpha}(\rho_k)+4\sum_{k=m+1}^{\infty}\|U_k\|_p$$

$$\leqslant C_p^*\left(h^2\sum_{k=2}^{m}\varphi^{(2-\alpha)}(\rho_k)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\varphi^{-\alpha}(\rho_k)\right)$$

所以对$0<h\leqslant t\leqslant 1$有

$$\omega_2(f,t)_p \leqslant C_p^*\left(t^2\sum_{k=0}^{m}K^{k(2-\alpha)}+\sum_{k=m+1}^{\infty}{}' K^{-k\alpha}\right)$$

$$=C_p^*\begin{cases} t^2\dfrac{K^{(m+1)(2-\alpha)}}{K^{2-\alpha}-1}+K^{-(m+1)\alpha}, & 0<\alpha<2\\ t^2 m+K^{-(m+1)\alpha} & \alpha=2\end{cases}$$

其中C_p^*是正常数，由于$K>1$，所以对$t\in(0,1)$存在$m\in N$使得

$$K^{m-1}<\frac{1}{t}<K^m$$

因此有

$$\omega_2(f,t)_p=\begin{cases}O(t^2) & 0<\alpha<2\\ O\left(t^2 ln\dfrac{1}{t}\right) & \alpha=2\end{cases}$$

证毕。

作为定理3.3的应用，我们有。

系1 设J_n为Jackson算子，若$f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），且对$0<\alpha<2$有

$$\|J_n(f)-f\|_p=O(n^{-\alpha})$$

则$f\in {}^*W_{p\alpha}$

证明　由Fubini交换定理可见，Jackson算子列$\{J_n\}_{n\in N}$是可交换的，又因为$J_n(g)$是次数$\leqslant 2n$的三角多项式，所以由Bernstein不等式得到，对每个$g\in X_{2\pi}^p$有

$$\|J_n''(g)\|\leqslant 4n^2\|J_n(g)\|_p\leqslant 4n^2\|g\|_p$$

所以取$\varphi(n)=n$，应用定理3.3得到$f\in{}^*W_{p\alpha}$。

结合第二章§4.1系2得到Jackson算子的逼近等价定理。

系1′ 设J_n为Jackson算子，$0<\alpha<2$，则如下命题是等价的：

i) $f\in{}^*W_{p\alpha}$，

ii) $\|J_n(f)-f\|_p=O(n^{-\alpha})$

对于Fej′er算子σ_n我们有

系2 设σ_n为Fej′er算子，若$f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）且对$0<\alpha<1$有

$$\|\sigma_n(f)-f\|_p=O(n^{-\alpha})$$

则 $f\in {}^*W_{p\alpha}$。

证明　由 Fubini 交换定理可知，Fej'er算子列 $\{\sigma_n\}$ 是可交换的，又因为对每个 $g\in X^0_{2\pi}$，$\sigma_n(g)$是次数$\leqslant n$的三角多项式，所以由 Bernstein 不等式有

$$\|\sigma_n''(g)\|_p\leqslant n^2\|\sigma_n(g)\|_p\leqslant n^2\|g\|_p$$

因此取$\varphi(n)=n$，应用定理3.3 得到$f\in {}^*W_{p\alpha}$。

结合第二章§4.1系1得到 Fejer 算子逼近等价定理α。

系2′　设σ_n为 Fejer 算子，$0<\alpha<1$，则下列命题是等价的。

1) $f\in {}^*W_{p\alpha}$

ii) $\|\sigma_n(f)-f\|_p=O(n^{-\alpha})$

对于Vall'ee—Poussion 算子V_n，我们有

系3　设V_n为Vall'ee—Poussion 算子，若$f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）且对$0<\alpha<2$有

$$\|V_n(f)-f\|_p=O(n^{-\frac{\alpha}{2}})$$

则 $f\in {}^*W_{p\alpha}$。

证明　因为对$f\in X^0_{2\pi}$有

$$V_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)v_n(t)dt$$

其中$v_n(t)=\dfrac{(n!)^2}{2(2n)!}\left(2\cos\dfrac{t}{2}\right)^{2n}$所以由 Fubini 交换定理可知 Vall'ee—Paussion 算子列$\{V_n\}_{n\in N}$是可交换的。虽然$V_n(f)$是次数$\leqslant 2n$的三角多项式，但是利用 Bernstein 不等式建立的 Bernstein 型不等式并不能由定理3.3导出系3的断言，因此需作适当的改进得到，对每个 $g\in X^p_{2\pi}$有

$$\|V_n''(g)\|_p\leqslant n\|g\|_p$$

事实上，

$$V_n(g,x)=(g*v_n)(x)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\hat{g}(k)e^{ikx},$$

$$V_n''((g,x)=-\sum_{k=-n}^{n}k^2\alpha_{nk}\hat{g}(k)e^{ikx}$$

其中$\alpha_{nk}=\dfrac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}$由计算得到

$$k^2\alpha_{nk}=n^2(\alpha_{nk}-\alpha_{n-1,k})$$

因而有

$$V_n''(g,x)=-n^2\sum_{k=-n}^{n}(\alpha_{nk}-\alpha_{n-1,k})\hat{g}(k)e^{ikx}$$

$$= -n^2(V_n(g,x)-V_{n-1}(g,x))$$

$$= -n^2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)(v_n(t)-v_{n-1}(t))\,dt$$

注意到

$$n^2(v_n(t)-v_{n-1}(t)) = \frac{n^2}{2}v_{n-1}(t)(1-\cos t)-\frac{n}{2}v_n(t)$$

故得 $V_n''(g,x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)\left(\frac{n^2}{2}v_{n-1}(t)(1-\cos t)-\frac{n}{2}v_n(t)\right)dt$

利用Minkowski不等式得到

$$\|V_n''(g)\|_p \leqslant \|g\|_p\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{n^2}{2}v_{n-1}(t)(1-\cos t)+\frac{n}{2}v_n(t)\right)dt$$

$$=\left(\frac{n^2}{2}(1-\alpha_{1,n-1})+\frac{n}{2}\right)\|g\|_p = n\|g\|_p$$

因而取$\varphi(n)=\sqrt{n}$应用定理3.3得到$f\in{}^*W_{p\alpha}$

结合本章§1.3系2得到Vall'ee—Poussion算子逼近的等价定理。

系3' 设V_n为Valle'e—Poussion算子，$0<\alpha<2$，则如下命题是等价的

i) $f\in{}^*W_{p\alpha}$,

ii) $\|V_n(f)-f\|_p=O(n^{-\frac{\alpha}{2}})$。

应当指出，在系1')和系3')中$\alpha=2$以及系2')中$1\leqslant\alpha\leqslant2$的情况属于饱和性问题我们将在第四章讨论。

2.2 Becker—Nessel方法

设$\omega(t)$是$(0,\infty)$上单调增加函数且$\omega(0)=0$，若存在某个$\alpha>0$使得对$\forall 0<t_1<t_2$有

$$\frac{\omega(t_2)}{t_2^\alpha}\leqslant C_\alpha\frac{\omega(t_1)}{t_1^\alpha} \tag{2.7}$$

则记$\omega\in\Phi_\alpha$，例如$\omega(t)=t^\alpha\in\Phi_\alpha$。

首先建立如下引理，它对Becker—Nessel方法是关键的。

引理3.2 (Lorentz—Hermann) 设$\Omega(t)$是$(0,a)$上单调函数，$\omega\in\Phi_\alpha$，若存在$r>\alpha$使得对$\forall h$, $t\in(0,a)$有

$$\Omega(h)\leqslant M\left(\omega(t)+\left(\frac{h}{t}\right)^r\Omega(t)\right) \tag{2.8}$$

则有

$$\Omega(t)=O(\omega(t)) \tag{2.9}$$

证明 选取$A>1$使得$A^{r-\alpha}>2MC_\alpha$，记

$$M_1=\max\left(\frac{\Omega(a)}{\omega(a)},\ 2MC_\alpha A^\alpha\right)$$

$$h_m = aA^{1-m}$$

则$\frac{h_m}{h_{m-1}} = \frac{1}{A} < 1$。 首先我们证明对$m \in N$有

$$\Omega(h_m) \leqslant M_1 \omega(h_m)。 \tag{2.10}$$

事实上，当$m=1$时有

$$\Omega(h_1) = \Omega(a) \leqslant M_1 \omega(a)$$

归纳假定$(m-1)$成立，即有

$$\Omega(h_{m-1}) \leqslant M_1 \omega(h_{m-1})$$

取$h=h_m$，$t=h_{m-1}$，应用条件(2.8)(2.7)得到

$$\begin{aligned}
\Omega(h_m) &\leqslant M\left(\omega(h_{m-1}) + \left(\frac{h_m}{h_{m-1}}\right)^r \Omega(h_{m-1})\right) \\
&\leqslant M\left(\omega(h_{m-1}) + \left(\frac{h_m}{h_{m-1}}\right)^r M_1 \omega(h_{m-1})\right) \\
&\leqslant M\left(C_\alpha\left(\frac{h_{m-1}}{h_m}\right)^\alpha + M_1 C_\alpha\left(\frac{h_m}{h_{m-1}}\right)^{r-\alpha}\right)\omega(h_m) \\
&\leqslant M(C_\alpha A^\alpha + MC_\alpha A^{\alpha-r})\omega(h_m) \\
&\leqslant M_1 \omega(h_m).
\end{aligned}$$

所以(2.10)证得。

其次，对$t \in (0,a)$选取$m \in N$使得

$$h_m \leqslant t < h_{m-1}$$

因此由单调性和(2.7)得到

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &\leqslant \Omega(h_{m-1}) \leqslant M_1 \omega(h_{m-1}) \\
&\leqslant M_1\left(\frac{h_{m-1}}{h_m}\right)^\alpha C_\alpha \omega(h_m) \\
&\leqslant M_1 A^\alpha C_\alpha \omega(t) \leqslant \frac{M_1^2}{2M}\omega(t)
\end{aligned}$$

所以有$\Omega(t) = O(\omega(t))$证毕。

特别地，取$\omega(t) = t^\alpha$ $(0<\alpha<r)$得到

推论3.3 (Hermann) 设$\Omega(t)$是$(0,a)$上单调增加函数，若对$\forall h, t \in (0,a)$有

$$\Omega(h) \leqslant M\left(t^\alpha + \left(\frac{h}{t}\right)^r \Omega(t)\right)$$

则有$\Omega(t) = O(t^\alpha)$。

应当指出，从引理3.2的证明可见，若$\alpha = r$上述的证明无效，此外，若$\omega(t)$是连续模函数，由(1.5)式可见$\omega \in \Phi_1$，因此对任何$\alpha > 0$有$\omega_\alpha(t) = \omega^\alpha(t) \in \Phi_\alpha$，且对$0<t_1<t_2$有

$$\frac{\omega_\alpha(t_2)}{t_2^\alpha} \leqslant 2^\alpha \frac{\omega_\alpha(t_1)}{t_1^\alpha}$$

现在对$f\in X_{2\pi}^{p}$（$1\leq p\leq+\infty$）和$h>0$引入二阶Steklov平均

$$f_{2h}(x)=\frac{1}{h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int f(x+s+t)\,dsdt$$

则有

$$f_{2h}(x)-f(x)=\frac{1}{2h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int\triangle_{s+t}^{2}(f,x)\,dsdt$$

和

$$f''_{2h}(x)=\frac{\triangle_{s+t}^{2}(f,x)}{h^2}$$

因此得到

$$\|f_{2h}-f\|_p\leq\frac{1}{2}\omega_2(f,h)_p \qquad (2.11)$$

$$\|f''_{2h}\|_p\leq\frac{\omega_2(f,h)_p}{h^2} \qquad (2.12)$$

现在继续讨论周期卷积算子逼近逆定理得到

定理3.4（Becker—Nessel） 设$\varphi(\rho)\uparrow+\infty$（$\rho\to\rho_0$）且存在$\rho_k\downarrow$（或$\uparrow$）$\rho_0$（$k\to+\infty$）使得

$$\sup_{k\in N}\frac{\varphi(\rho_{k+1})}{\varphi(\rho_k)}=C<+\infty \qquad (2.13)$$

又设$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是$X_{2\pi}^{p}$（$1\leq p\leq+\infty$）上卷积算子族，且适合如下条件

I）对每个$f\in X_{2\pi}^{p}$有

$$\|I''_\rho(f)\|_p\leq M_{1p}\varphi^2(\rho)\|f\|_p \qquad (2.14)$$

II）对每个$g\in X_p^2$有

$$\|I''_\rho(g)\|_p\leq M_{2p}\|g''\|_p \qquad (2.15)$$

若对$f\in X_{2\pi}^{p}$且对$0<\alpha<2$有

$$\|I_\rho(f)-f\|_p=O(\varphi^{-\alpha}(\rho)), \qquad (2.16)$$

则$f\in{}^{\alpha}W_{\infty p}$。

证明　由于对$h>0$有

$$\|\triangle_h^2(f)\|_p\leq\|\triangle_h^2(f-I_\rho(f))\|_p+\|\triangle_h^2(I_\rho(f))\|_p$$

又由（2.16）得到

$$\|\triangle_h^2(f-I_\rho(f))\|_p\leq4\|f-I_\rho(f)\|_p\leq4M_p\varphi^{-\alpha}(\rho)$$

而由（2.11）—（2.12）以及（2.14）—（2.15）得到，对$\delta\in(0,1)$和$h>0$有

$$\|\triangle_h^2(I_\rho(f))\|_p\leq\|\triangle_h^2(I_\rho(f-f_{2\delta}))\|_p+\|\triangle_h^2(I_\rho(f_{2\delta}))\|_p$$

$$\leqslant h^2\|I_\rho^{\prime\prime}(f-f_{2\delta})\|_p+h^2\|I_\rho^{\prime\prime}(f_{2\delta})\|_p$$

$$\leqslant Mh^2(\varphi^2(\rho)\|f-f_{2\delta}\|_p+\|f_{2\delta}^{\prime\prime}\|_p)$$

$$\leqslant Mh^2\left(\varphi^2(\rho)+\frac{1}{\delta^2}\right)\omega_2(f,\delta)_p$$

其中M是仅依赖于p的正常数，取$\delta=\delta_\rho=\frac{1}{\varphi(\rho)}$，导出

$$\|\triangle_h^2(I_\rho(f))\|_p\leqslant M\left(\frac{h}{\delta_\rho}\right)^2\omega_2(f,\delta_\rho)_p$$

所以有

$$\|\triangle_h^2(f)\|_p\leqslant M\left(\delta_\rho^\alpha+\left(\frac{h}{\delta_\rho}\right)^2\omega_2(f,\delta_\rho)_p\right)$$

因此导出

$$\omega_2(f,h)_p\leqslant M\left(\delta_\rho^\alpha+\left(\frac{h}{\delta_\rho}\right)^2\omega_2(f,\delta_\rho)_p\right)$$

于是利用 Lorentz—Hermann 引理得到，当$0<\alpha<2$时有

$$\omega_2(f,\delta_\rho)_p=O(\delta_\rho^\alpha).$$

最后设$t>0$是足够小，由于$\varphi(\rho_k)\uparrow+\infty\ (k\to\infty)$，所以存在$k_t=k\in N$使得

$$\delta_{\rho_k}<t\leqslant\delta_{\rho_{k-1}}$$

因此

$$\omega_2(f,t)_p\leqslant\omega_2(f,\delta_{\rho_{k-1}})_p=O(\delta_{\rho_{k-1}}^\alpha)$$

$$=O\left(\left(\frac{\delta_{\rho_{k-1}}}{\delta_{\rho_k}}\right)^\alpha\delta_{\rho_k}\right)=O(\delta_{\rho_k}^\alpha)=O(t^\alpha)$$

故得 $f\in{}^\alpha W_p$。证毕。

由定理3.3和定理3.4可见，后一个定理用条件（2.15）代替前一个定理中卷积算子族可交换条件，这样使定理3.4的适应性更广泛。例如，若$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是相应于正 Borel 测度核$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的卷积算子族，则对每个$g\in X_{2\pi}^p$有

$$\|I_\rho^{\prime\prime}(g)\|_p\leqslant\|g^{\prime\prime}\|_p$$

事实上，由于

$$I_\rho^{\prime\prime}(g,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g^{\prime\prime}(x-t)\,d\mu_\rho(t)$$

应用Minkowski不等式得到所需的结论。

若记

$${}^\omega W_pH_\omega=\{f\mid f\in X_{2\pi}^p,\ \text{且}\ \omega_2(f,t)_p=O(\omega(t))\}$$

其中$\omega(t)\in\Phi_\alpha$。

更一般地可将定理3.4推广为

定理3.5 设$\varphi(\rho)\uparrow+\infty(\rho\to\rho_0)$是适合(2.13)，又设$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是$X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$

卷积算子族且适合条件（2.14）和（2.15），若$f\in X_{2\pi}^{p}$且对某个$\omega\in\Phi_{\alpha}$（$0<\alpha<2$）有

$$\|I_{\rho}(f)-f\|_{p}=O\left(\omega\left(\frac{1}{\varphi(\rho)}\right)\right) \qquad (2.17)$$

则$f\in {}^{*}W_{p}H_{\omega}$。

证明　与定理3.4证明类似得到

$$\omega_{2}(f,h)_{p}\leq M\left(\omega(\delta_{\rho})+\left(\frac{h}{\delta_{\rho}}\right)^{2}\omega_{2}(f,\delta_{\rho})_{p}\right)$$

其中$\delta_{\rho}=\frac{1}{\varphi(\rho)}$，因此由 Lorentz—Hermann 引理得到，对$\omega\in\Phi_{\alpha}$（$0<\alpha<2$）有

$$\omega_{2}(f,\delta_{\rho})_{p}=O(\omega(\delta_{\rho})).$$

最后设$t>0$是足够小，由于$\varphi(\rho_{k})\uparrow+\infty$（$k\to\infty$）所以存在$k_{t}=k\in N$使得

$$\delta_{\rho_{k}}<t\leq\delta_{\rho_{k-1}}$$

因此由单调性和$\omega\in\Phi_{\alpha}$导出

$$\omega_{2}(f,t)_{p}\leq\omega_{2}(f,\delta_{\rho_{k-1}})_{p}=O(\omega(\delta_{\rho_{k-1}}))$$

$$=O\left(\left(\frac{\delta_{\rho_{k-1}}}{\delta_{\rho_{k}}}\right)^{\alpha}\omega(\delta_{\rho_{k}})\right)=O(\omega(t))$$

证毕。

作为例子，考察 Valll'ee—Poussion 算子V_{n}得到如下结论。

系1　设V_{n}是 Vall'ee—Poussion 算子，又设$\omega\in\Phi_{\alpha}$（$0<\alpha<2$），若$f\in X_{2\pi}^{p}$且适合条件

$$\|V_{n}(f)-f\|_{p}=O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

则$f\in {}^{*}W_{p}H_{\omega}$。特别地若$\omega(t)=t^{\alpha}$（$0<\alpha<2$）则有$f\in {}^{*}W_{p\alpha}$。

证明　由§2.1 系3，对每个$f\in X_{2\pi}^{p}$有

$$\|V_{n}''(f)\|_{p}\leq n\|f\|_{p}.$$

所以取$\varphi(n)=\sqrt{n}$，又对每$g\in X_{2\pi}^{p}$有

$$\|V_{n}''(g)\|_{p}\leq\|g''\|_{p}$$

所以应用定理3.5导出$f\in {}^{*}W_{p}H_{\omega}$，证毕。

2.3卷积算子逼近的等价定理

逼近等价定理也是衡量逼近度估计精确性的一种方式，卷积算子逼近的等价定理是研究卷积算子族对函数类${}^{*}W_{p\alpha}$（或更一般的${}^{*}W_{p}H_{\omega}$类）的逼近度特征。我们有如下定理

定理3.6　设$\varphi(\rho)\uparrow\infty(\rho\to\rho_{0})$且适合（2.13），又设$\{I_{\rho}\}_{\rho\in\Omega}$是$X_{2\pi}^{p}$（$1\leq p\leq+\infty$）上一致有界的卷积算子族且适合如下条件

i) 对每个$g\in X_{2\pi}^{p}$（$1\leq p\leq\infty$）有

$$\|I_{\rho}(g)-g\|_{p}\leq C_{1p}\varphi^{-2}(\rho)\|g''\|_{p} \qquad (2.18)$$

和

$$\|I_\rho''(g)\|_p \leqslant C_{2p}\|g''\|_p \qquad (2.19)$$

ii) 对每个 $f\in X_{2\pi}^p$ 有

$$\|I_\rho''(f)\|_p \leqslant C_{3p}\varphi^2(\rho)\|f\|_p \qquad (2.20)$$

若 $f\in X_{2\pi}^p$ 和 $\omega\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha<2$）则如下命是等价的：

i) $\|I_\rho(f)-f\|_p=O\left(\omega\left(\frac{1}{\varphi(\rho)}\right)\right)$,

ii) $f\in {}^*W_pH_\omega$,

证明 i) ⟹ ii) 是定理3.5的断言，因而我们只需证明 ii) ⟹ i)、设 $f\in X_{2\pi}^p$，对 $h>0$ 它的二阶Steklov 平均 $f_{2h}\in X_p^2$，由（2.18）和（2.11）及（2.12）导出

$$\begin{aligned}\|I_\rho(f)-f\|_p &\leqslant \|I_\rho(f-f_{2h})\|_p+\|f-f_{2h}\|_p+\|I_\rho(f_{2h})-f_{2h}\|_p\\ &\leqslant (\|I_\rho\|+1)\|f-f_{2h}\|_p+C_{1p}\varphi^{-2}(\rho)\|f_{2h}''\|_p\\ &\leqslant M_p\left(1+\frac{1}{h^2\varphi^2(\rho)}\right)\omega_2(f,h),\end{aligned}$$

其中 M_p 是仅依赖于p的正常数，特别取 $h=\frac{1}{\varphi(\rho)}$ 得到

$$\|I_\rho(f)-f\|_p\leqslant 2M_p\omega_2\left(f,\frac{1}{\varphi(\rho)}\right).$$

由于 $f\in {}^*W_pH_\omega$，所以由上式导出

$$\|I_\rho(f)-f\|_p=O\left(\omega\left(\frac{1}{\varphi(\rho)}\right)\right).$$

证毕.

特别地，若取 $\omega(t)=t^\alpha$（$0<\alpha<2$）得到

推论 在定理3.6的条件下，若 $f\in X_{2\pi}^p$ 和 $0<\alpha<2$，则下列命题是等价的.

i) $\|I_\rho(f)-f\|_p=O(\varphi^{-\alpha}(\rho))$

ii) $f\in {}^*W_{p\alpha}$.

作为例子有

系1 设 V_n 是Vall'ee—Poussin 算子，又设 $\omega\in\Phi_\alpha(0<\alpha<2)$，若 $f\in X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 则如下命题是等价的：

i) $\|V_n(f)-f\|_p=O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$,

ii) $f\in {}^*W_pH_\omega$

系2 设 J_n 是Jackson 算子，又设 $\omega\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha<2$）若 $f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），则如下命题是等价的：

i) $\|J_n(f)-f\|_p=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

ii) $f\in {}^*W_pH_\omega$.

证明是容易的.

§3 $C_{2\pi}$空间上线性算子逼近的等价定理

3.1 Lorentz—Bernes 定理

设$\phi_n \downarrow 0$ ($n\to\infty$) 若

$$\sup_{n\in N}\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}=C<+\infty \qquad (3.1)$$

则记$\{\phi_n\}\in\Lambda$，对$f\in C_{2\pi}$和$0<\alpha\leqslant 2$，引入Lorentz半范：

$$\|f\|_{\alpha,1}^{*}=\sup_{t>0}t^{-\alpha}\|\Delta_t^2(f)\|_{C_{2\pi}},$$

$$\|f\|_{\alpha,2}^{*}=\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|\Delta_{\phi_n}^2(f)\|_{C_{2\pi}}.$$

若$\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$到自身内一致有界线性算子列，1972年 Lorentz—Bernes首先研究逼近度$\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=O(\phi_n^\alpha)$与$f\in \mathrm{Lip}^*\alpha$之间的等价关系，得到

定理3.7 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$到自身内一致有界的线性算子列，若对每个$g\in \mathrm{Lip}^*\alpha$ ($0<\alpha\leqslant 2$) 有

$$\|L_n(g)-g\|_{C_{2\pi}}\leqslant C_1\phi_n^\alpha\|g\|_{\alpha,1}^{*} \qquad (3.2)$$

则对每个$f\in \mathrm{Lip}^*\beta$ ($0<\beta\leqslant\alpha$) 有

$$\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=O(\phi_n^\beta). \qquad (3.3)$$

证明 设$f\in \mathrm{Lip}^*\beta$ ($0<\beta\leqslant\alpha$)，即对$t\to 0^+$时有

$$\omega_2(f,t)\leqslant 2Mt^\beta$$

若f_{2,ϕ_n}表示f的二阶Steklov平均，由 (2.12) 和 (2.13)，得到

$$\|f-f_{2,\phi_n}\|_{C_{2\pi}}\leqslant\frac{1}{2}\omega_2(f,\phi_n)$$

$$\|f''_{2,\phi_n}\|_{C_{2\pi}}\leqslant\frac{\omega_2(f,\phi_n)}{\phi_n^2}$$

和

$$\omega_2(f_{2,\phi_n},t)\leqslant\omega_2(f,t)$$

于是对$f\in \mathrm{Lip}^*\beta$ ($0<\beta\leqslant 2$) 有

$$\|f_{2,\phi_n}\|_{\alpha,1}^{*}\leqslant 2M\phi_n^{\beta-\alpha} \qquad (3.4)$$

事实上，当$t\geqslant\phi_n$时，有

$$t^{-\alpha}\|\Delta_t^2(f_{2,\phi_n})\|_{C_{2\pi}}\leqslant t^{-\alpha}\omega_2(f_{2,\phi_n},t)$$

$$\leqslant t^{-\alpha}\omega_2(f,t)\leqslant 2Mt^{\beta-\alpha}\leqslant 2M\phi_n^{\beta-\alpha}$$

而当$0<t\leqslant\phi_n$时，有

$$t^{-\alpha}\|\Delta_t^2(f_{2\phi_n})\|_{C_{2\pi}}\leqslant t^{2-\alpha}\|f''_{2\phi_n}\|_{C_{2\pi}}$$

$$\leqslant\frac{\omega_2(f,\phi_n)}{\phi_n^2}t^{2-\alpha}\leqslant 2M\phi_n^{-2+\beta}\phi_n^{2-\alpha}=2M\phi_n^{\beta-\alpha}$$

所以对$\forall t>0$有

$$t^{-\alpha}\|\Delta_t^2(f_{2\phi_n})\|_{C_{2\pi}}\leqslant 2M\phi_n^{\beta-\alpha}$$

从而得到

$$\|f_{2\phi_n}\|_{\alpha 1}^{*}=\sup_{t>0}t^{-\alpha}\|\Delta_t^2(f_{2\phi_n})\|_{C_{2\pi}}\leqslant 2M\phi_n^{\beta-\alpha}$$

可见$f_{2\phi_n}\in\text{Lip}^*\alpha$。

对每个$f\in\text{Lip}^*\beta$（$0<\beta\leqslant\alpha$），由（3.2）得到

$$\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}\leqslant\|L_n(f-f_{2\phi_n})\|_{C_{2\pi}}+\|L_n(f_{2\phi_n})-f_{2\phi_n}\|_{C_{2\pi}}+\|f-f_{2\phi_n}\|_{C_{2\pi}}$$

$$\leqslant(1+L)\|f-f_{2\phi_n}\|+c_1\|f_{2\phi_n}\|_{\alpha 1}^{*}\phi_n^{\alpha}$$

$$\leqslant(1+L)\frac{\omega_2(f,\phi_n)}{2}+C_1(2M\phi_n^{\beta-\alpha})\phi_n^{\alpha}$$

$$\leqslant M(1+L)\phi_n^{\alpha}+2C_1M\phi_n^{\beta}\leqslant M_\alpha\phi_n^{\beta}$$

其中$L=\sup_{n\in N}\|L_n\|$，而M_α是依赖于α的正数，所以对$0<\beta\leqslant\alpha$有

$$\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=O(\phi_n^{\beta})$$

证毕。

关于逆命题我们有

定理3.8（Lorentz—Bernes）　设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$到自身内，可交换的线性算子列且对每个$f\in C_{2\pi}$有

$$\|L_n(f)\|_{\alpha 1}^{*}\leqslant C_2\phi_n^{-\alpha}\|f\|_{C_{2\pi}}\tag{3.5}$$

其中$\phi_n\downarrow 0$（$n\to+\infty$）且适合条件（3.1），若$f\in C_{2\pi}$且对$0<\beta<\alpha$有

$$\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=O(\phi_n^{\beta})\tag{3.6}$$

则$f\in\text{Lip}^*\beta$。

证明　因为$\phi_n\downarrow 0$（$n\to+\infty$），所以可取子列$\{\phi_{n_k}\}$使得

$$2\phi_{n_{k+1}}\leqslant\phi_{n_k}.$$

事实上，设$n_1,n_2\cdots n_k$已选定，只要取

$$n_{k+1}=\min\{n|n>n_k\text{ 且}2\phi_n<\phi_{n_k}\}$$

即可，于是对$0<\beta<\alpha$有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\phi_{n_k}^{\beta}\leqslant\phi_{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k\beta}}<+\infty.$$

设$f\in C_{2\pi}$，由条件（3.6）可见，一致成立

$$f(x)=L_{s_1}(f,x)+\sum_{k=1}^{\infty}(L_{s_{k+1}}(f,x)-L_{s_k}(f,x))$$

现在对$t\in(0,\phi_{s_1})$选取$m_t=m\in N$,使得

$$\phi_{s_{m+1}}\leqslant t<\phi_{s_m}$$

于是有

$$\|\Delta_t^r(f)\|_{C_{2\pi}}\leqslant\|\Delta_t^r(L_{s_1}(f))\|_{C_{2\pi}}+\sum_{k=1}^{m}\|\Delta_t^r((L_{s_{k+1}}-L_{s_k})(f))\|_{C_{2\pi}}$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\|\Delta_t^r((L_{s_{k+1}}-L_{s_k})(f)\|_{C_{2\pi}}\underset{=}{(记)}I_1+I_2+I_3$$

其中

$$I_1=\|\Delta_t^r(L_{s_1}(f))\|\leqslant t^{\alpha}\|L_{s_1}(f)\|_{\alpha,1}^{*}$$

由（3.5）得到

$$I_1\leqslant C_2t^{\alpha}\phi_{s_1}^{-\alpha}\|f\|_{C_{2\pi}}=O(t^{\beta}).\tag{3.7}$$

其次由算子列的可交换性和条件（3.5），（3.6）得到

$$\|\Delta_t^r((L_{s_{k+1}}-L_{s_k})(f))\|_{C_{2\pi}}=\|\Delta_t^r(L_{s_{k+1}}(f-L_{s_k}(f))-L_{s_k}(f-L_{s_{k+1}}(f))\|$$

$$\leqslant\|\Delta_t^r(L_{s_{k+1}}(f-L_{s_k}(f)))\|+\|\Delta_t^r(L_{s_k}(f-L_{s_{k+1}}(f))\|$$

$$\leqslant t^{\alpha}\|L_{s_{k+1}}(f-L_{s_k}(f))\|_{\alpha,1}^{*}+t^{\alpha}\|L_{s_k}(f-L_{s_{k+1}}(f))\|_{\alpha,1}^{*}$$

$$\leqslant C_2t^{\alpha}(\phi_{s_{k+1}}^{-\alpha}\|f-L_{s_k}(f)\|_{C_{2\pi}}+\phi_{s_k}^{-\alpha}\|f-L_{s_{k+1}}(f)\|_{C_{2\pi}})$$

$$\leqslant C_3t^{\alpha}\phi_{s_k}^{\beta-\alpha}$$

因此当$0<\beta<\alpha$时，有

$$I_2=\sum_{k=1}^{m}\|\Delta_t^r((L_{s_{k+1}}-L_{s_k})(f))\|_{C_{2\pi}}$$

$$\leqslant C_3t^{\alpha}\sum_{k=1}^{m}\phi_{s_k}^{\beta-\alpha}$$

$$\leqslant C_3t^{\alpha}\phi_{s_m}^{\beta-\alpha}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\phi_{s_k}}{\phi_{s_m}}\right)^{\beta-\alpha}$$

$$\leqslant C_3t^{\alpha}\phi_{s_m}^{\beta-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(\beta-\alpha)}$$

$$\leqslant C_4t^{\beta}\left(\frac{t}{\phi_{s_m}}\right)^{\alpha-\beta}\tag{3.8}$$

最后由（3.6）导出

$$I_3=\sum_{k=m+1}^{\infty}\|\Delta_t^2((L_{n_{k+1}}-L_{n_k})(f))\|$$

$$\leqslant 4\sum_{k=m+1}^{\infty}(\|L_{n_{k+1}}(f)-f\|+\|L_{n_k}(f)-f\|)$$

$$\leqslant M\sum_{k=m+1}^{\infty}(\phi_{n_{k+1}}^{\beta}+\phi_{n_k}^{\beta})\leqslant M\sum_{k=m+1}^{\infty}\phi_{n_k}^{\beta}$$

$$\leqslant M\phi_{n_{m+1}}^{\beta}\sum_{k=m+1}^{\infty}2^{-\beta k}\leqslant C_3 t^{\beta} \qquad (3.9)$$

因此由（3.7）—（3.9）得到，当$t\in(0,\phi_{n_1})$和$0<\beta<\alpha$时有

$$\|\Delta_t^2(f)\|_{C_{2\pi}}=O(t^{\beta})$$

或$f\in \mathrm{Lip}^*\beta$ 证毕。

结合定理3.7和定理3.8得到$C_{2\pi}$上算子逼近的等价定理。

定理3.9 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$到自身内一致有界，可交换的线性算子列，且适合如下条件

i）对每个$g\in \mathrm{Lip}^*\alpha$有

$$\|L_n(g)-g\|_{C_{2\pi}}\leqslant C_1\phi_n^{\alpha}\|g\|_{\alpha,1}^{*}$$

ii）对每个$f\in C_{2\pi}$有

$$\|L_n(f)\|_{\alpha,1}^{*}\leqslant C_2\,\phi_n^{-\alpha}\|f\|_{C_{2\pi}}$$

其中$0<\alpha\leqslant 2$，而$\{\phi_n\}\in A$，则对$f\in C_{2\pi}$和$0<\beta<\alpha$如下命题是等价的：

i）$\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=O(\phi_n^{\beta})$，

ii）$f\in \mathrm{Lip}^*\beta$。

现在讨论非可交换算子列的逼近等价定理，设$f\in C_{2\pi}$，对$0<\alpha\leqslant 2$和$t>0$引入K－泛函

$$K_{(\alpha)}(f,t)=\inf_{g\in \mathrm{Lip}^*\alpha}\{\|f-g\|_{C_{2\pi}}+t^{\alpha}\|g\|_{\alpha,1}^{*}\}.$$

由于对和$\forall g\in \mathrm{Lip}^*\alpha$有

$$\|\Delta_h^2(f)\|_{C_{2\pi}}\leqslant\|\Delta_h^2(f-g)\|_{C_{2\pi}}+\|\Delta_h^2(g)\|_{C_{2\pi}}$$

$$\leqslant 4\|f-g\|_{C_{2\pi}}+h^{\alpha}\|g\|_{\alpha,1}^{*}$$

所以有

$$\omega_2(f,t)\leqslant 4K_{(\alpha)}(f,t) \qquad (3.10)$$

现设$\omega\in\Phi_\beta(\beta>0)$记

$$^{*}H_{\omega}=\{f|f\in C_{2\pi},\text{且}\omega_2(f,t)=O(\omega(t))\}$$

我们有如下逼近等价定理。

定理3.10 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$到自身内一致有界线性算子列，且对某个$\alpha\in(0,2]$适合如下条件.

i) 对每个$g\in \mathrm{Lip}^*\alpha$有

$$\|L_n(g)-g\|_{C_{2\pi}}\leqslant C_1\phi_n^{\alpha}\|g\|^*_{\alpha,1}, \tag{3.11}$$

$$\|L_n(g)\|^*_{\alpha,1}\leqslant C_1\|g\|^*_{\alpha,1}. \tag{3.12}$$

ii) 对每个$f\in C_{2\pi}$有

$$\|L_n(f)\|^*_{\alpha,1}\leqslant C_2\phi_n^{-\alpha}\|f\|_{C_{2\pi}} \tag{3.13}$$

其中$\{\phi_n\}\in A$.

若$f\in C_{2\pi}$和$\omega\in\Phi_\beta\,(0<\beta<2)$，则如下命题是等价的：

i) $\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=O(\omega(\phi_n))$, (3.14)

ii) $f\in {}^*H_\omega$.

证明 i)$\Longrightarrow$ii). 设$f\in C_{2\pi}$且适合(3.14)、由于$L_n(f)\in \mathrm{Lip}^*\alpha\ (0<\alpha\leqslant 2)$，所以对$h>0$和$\forall g\in \mathrm{Lip}^*\alpha$有

$$K_{(\alpha)}(f,h)\leqslant\|f-L_n(f)\|_{C_{2\pi}}+h^{\alpha}\|L_n(f)\|^*_{\alpha,1}$$

$$\leqslant\|f-L_n(f)\|_{C_{2\pi}}+h^{\alpha}(\|L_n(f-g)\|^*_{\alpha,1}+\|L_n(g)\|^*_{\alpha,1})$$

于是由(3.12)—(3.13及(2.14)得到

$$K_{(\alpha)}(f,h)\leqslant M\Big(\omega(\phi_n)+h^{\alpha}(\phi_n^{-\alpha}\|f-g\|_{C_{2\pi}}+\|g\|^*_{\alpha,1})\Big)$$

$$=M\Big(\omega(\phi_n)+\Big(\frac{h}{\phi_n}\Big)^{\alpha}\Big(\|f-g\|_{C_{2\pi}}+\phi_n^{\alpha}\|g\|^*_{\alpha,1}\Big)$$

所以有

$$K_{(\alpha)}(f,h)\leqslant M\Big(\omega(\phi_n)+\Big(\frac{h}{\phi_n}\Big)^{\alpha}K_{(\alpha)}(f,\phi_n)\Big)$$

取$\Omega(h)=K_{(\alpha)}(f,h)$，则$\Omega(h)$是$h>0$的单调增加函数．因此由引理3.2导出，对$\omega\in\Phi_\beta\,(0<\beta<\alpha)$有

$$K_{(\alpha)}(f,\phi_n)=O(\omega(\phi_n)). \tag{3.15}$$

因为$\{\phi_n\}\in A$，用定理3.4的处理方法导出对$t>0$有

$$K_{(\alpha)}(f,t)=O(\omega(t))$$

从而由(3.10)导出$f\in {}^*H_\omega$.

ii)$\Longrightarrow$i)，设$f\in {}^*H_\omega$，$\omega\in\Phi_\beta\,(0<\beta<\alpha)$，用$f_{2,\phi_n}$表示f的二阶Steklov平均，则有

$$\|f-f_{2,\phi_n}\|_{C_{2\pi}}\leqslant\frac{1}{2}\omega_2(f,\phi_n)$$

$$\|f''_{2,\phi_n}\|_{C_{2\pi}}\leqslant\frac{\omega_2(f,\phi_n)}{\phi_n^{2}}$$

和

$\omega_2(f_{2\phi_n},t)\leqslant\omega_2(f,t)$。

于是利用$f_{2\phi_n}\in \mathrm{Lip}\alpha\ (0<\alpha\leqslant 2)$，所以由（3.11）得到

$$\|L_n(f_{2\phi_n})-f_{2\phi_n}\|_{C_{2\pi}}\leqslant C_1\phi_n^\alpha\|f_{2\phi_n}\|_{\alpha,1}^*$$

我们证明

$$\phi_n^\alpha\|f_{2\phi_n}\|_{\alpha,1}^*\leqslant M\omega(\phi_n)。\qquad (3.16)$$

事实上，若$t\geqslant\phi_n$，则

$$t^{-\alpha}\|\Delta_t^2(f_{2\phi_n})\|\leqslant t^{-\alpha}\omega_2(f_{2\phi_n},t)$$

$$\leqslant t^{-\alpha}\omega_2(f,t)\leqslant M\frac{\omega(t)}{t^\alpha}$$

由于$\omega\in\Phi_\beta\ (0<\beta<\alpha)$所以对$t\geqslant\phi_n$有

$$\frac{\omega(t)}{t^\alpha}\leqslant C_\beta\frac{\omega(\phi_n)}{\phi_n^\alpha}$$

因此当$t\geqslant\phi_n$时有

$$t^{-\alpha}\|\Delta_t^2(f_{2\phi_n})\|\leqslant M\frac{\omega(\phi_n)}{\phi_n^\alpha}$$

若$0<t<\phi_n$则

$$t^{-\alpha}\|\Delta_t^2(f_{2\phi_n})\|\leqslant t^{2-\alpha}\|f_{2\phi_n}''\|$$

$$\leqslant\frac{\omega_2(f,\phi_n)}{\phi_n^2}t^{2-\alpha}\leqslant M\frac{\omega(\phi_n)}{\phi_n^\alpha}$$

因而得到（3.16）。

于是对$f\in{}^*H_\omega$有

$$\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}\leqslant\|L_n(f-f_{2\phi_n})\|+\|f-f_{2\phi_n}\|+\|L_n(f_{2\phi_n})-f_{2\phi_n}\|$$

$$\leqslant\frac{1+L}{2}\omega_2(f,\phi_n)+CM\omega(\phi_n)$$

从而有

$$\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=O(\omega(\phi_n))$$

证毕。

例1　设$\{V_n\}_{n\in N}$是Vall'ee—Poussion算子列，由计算可得

i) 对每个$g\in \mathrm{Lip}^*2$有

$$\|V_n(g)-g\|_{C_{2\pi}}\leqslant C_1 h\|g\|_{2,1}^*$$

$$\|V(g)\|_{2,1}^*\leqslant C_1\|g\|_{2,1}^*$$

ii) 对每个$f\in C_{2\pi}$有

$$\|V_n(f)\|_{2,1}^*\leqslant 2n\|f\|_{C_{2\pi}}$$

所以取$\phi_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，则$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\in A$因此由定理3.10得到

系1 若$f\in C_{2\pi}$和$\omega\in\Phi_\beta$ ($0<\beta<2$) ,则

$$\|V_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

当且仅当$f\in {}^*H_\omega$，特别地，取$\omega(t)=t^\beta$ ($0<\beta<2$) 则有

$$\|V_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=O\left(n^{-\frac{\beta}{2}}\right)$$

当且仅当$f\in \mathrm{Lip}^*\beta$

3.2 逼近阶序列的必要条件

由§3.1 中定理3.8和定理3.10的证明可见，逼近阶序列$\{\phi_n\}\in\Lambda$是关键的，现在研究为使对任何一致有界线性算子列逆定理恒成立条件$\{\phi_n\}\in\Lambda$的必要性。

设$\phi_n\downarrow 0$，令

$$L_n(f,x)=(f*d\mu_n)(x)$$

其中$d\mu_n(t)=\frac{\pi}{2}\left(d\delta_{\phi_n}(t)+d\delta_{-\phi_n}(t)\right)$，则$\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$上正偶卷积算子列，且

$$1-2\overset{\vee}{\mu}_n(1)=1-\cos\phi_n\sim\frac{\phi_n^2}{2}$$

所以由定理2.32得到，对$f\in \mathrm{Lip}^*\alpha$ ($0<\alpha\leqslant2$) 有

$$\|L_n(f)-f\|_{2\pi}=O\left(\phi_n^\alpha\right).$$

由于

$$L_n(f,x)-f(x)=\frac{1}{2}\left(f(x+\phi_n)+f(x-\phi_n)\right)-2f(x)$$

$$=\frac{1}{2}\Delta_{\phi_n}^2(f,x)$$

所以就算子列$\{L_n\}_{n\in N}$而言，逆命题成立等价于

$$\|\Delta_{\phi_n}^2(f)\|_{C_{2\pi}}=O(\phi_n^\alpha)\Longleftrightarrow\|\Delta_t^2(f)\|_{C_{2\pi}}=O(t^\alpha)\tag{3.17}$$

其中$0<\alpha<2$，因此只需要研究逼近阶序列$\{\phi_n\}$使得 (3.17) 关系成立应满足的条件、我们有

定理3.11 (DeVore) 设$\phi_n\downarrow0$，$0<\alpha\leqslant2$，若对每个$f\in C_{2\pi}$成立 (3.17) 关系，则$\{\phi_n\}\in\Lambda$即，

$$\sup_{n\in N}\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}=C<+\infty$$

证明 对$\phi_n\downarrow0$和$0<\alpha\leqslant2$，引入一个半范

$$\|f\|_{\alpha,1}^*=\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|\Delta_{\phi_n}^2(f)\|_{C_{2\pi}}$$

明显地有

$$\|f\|_{\alpha,1}^*\leqslant\|f\|_\alpha^*\tag{3.18}$$

因此关系 (3.17) 转化为从$\|f\|_{\alpha,1}^*<+\infty\Longleftrightarrow\|f\|_\alpha^*<+\infty$

采用反证法，若$\sup\limits_{n\in N}\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}=+\infty$，我们只要构造$g\in C_{2\pi}$使得$\|g\|^*_{\alpha 1}=+\infty$，而$\|g\|^*_{\alpha 2}<+\infty$，从而与（3.17）关系矛盾，而定理得证.

由于$\sup\limits_{n\in N}\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}=+\infty$，所以存在子列$\{j_n\}_{n\in N}$使得

$\frac{\phi_{j_n}}{\phi_{j_{n+1}}}\to+\infty\ (n\to\infty)$ 记$\delta_n=\frac{\phi_{j_{n+1}}}{\phi_{j_n}}\to 0^+$令

$$f_n(x)=e^{2\pi i\lambda_n x}$$

其中$\lambda_n=[\delta_n^{-\frac{1}{2}}\phi_{j_n}^{-1}]\to+\infty\ (n\to+\infty)$. 由计算得到

$$\|f_n\|^*_{\alpha 1}=\sup_{t>0}t^{-\alpha}\|\triangle_t^2(f_n)\|_{C_{2\pi}}\geqslant(2\lambda_n)^\alpha|\triangle^2_{\frac{1}{2\lambda_n}}(f,0)|$$

$$=2^{2+\alpha}\lambda_n^\alpha,\tag{3.19}$$

和

$$\|f_n\|^*_{\alpha 2}=\sup_{k\in N}\phi_k^{-\alpha}\|\triangle^2_{\phi_k}(f_n)\|_{C_{2\pi}}=4\sup_{k\in N}\phi_k^{-\alpha}\sin^2(\pi\lambda_n\phi_k)$$

当$k\leqslant j_n$时，因为$\delta_n^{-\frac{1}{2}}\phi_{j_n}^{-1}\leqslant\lambda_n+1$，所以

$$4\phi_k^{-\alpha}\sin^2(\pi\lambda_n\phi_k)\leqslant 4(1+\lambda_n)^\alpha\delta_n^{\frac{\alpha}{2}}$$

而当$k>j_n$时，有

$$4\phi_k^{-\alpha}\sin^2(\pi\lambda_n\phi_k)\leqslant 4\phi_k^{-\alpha}\pi^2\lambda_n^2\phi_k^2\leqslant 4\pi^2(\phi_k\lambda_n)^{2-\alpha}\lambda_n^\alpha$$

$$\leqslant 4\pi^2(\phi_{j_n}\lambda_n)^{2-\alpha}\lambda_n^\alpha\leqslant 4\pi^2\delta^{1-\frac{\alpha}{2}}\lambda_n^\alpha$$

因而得到$\|f_n\|^*_{\alpha 2}\leqslant 4\pi^2(\lambda_n+1)^\alpha\left(\delta^{\frac{\alpha}{2}}+\delta_n^{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$，于是有

$$\frac{\|f_n\|^*_{\alpha 2}}{\|f\|^*_{\alpha 1}}\leqslant\frac{4\pi(\lambda_n+1)^\alpha\left(\delta_n^{\frac{\alpha}{2}}+\delta_n^{1-\frac{\alpha}{2}}\right)}{2^{2+\alpha}\lambda_n^\alpha}\overset{(记)}{=\!=}\varepsilon_n$$

即

$$\|f_n\|^*_{\alpha 2}\leqslant\varepsilon_n\|f\|^*_{\alpha 1}\tag{3.20}$$

其中$\varepsilon_n\downarrow 0\ (n\to+\infty)$.

现在对$f\in C_{2\pi}$，引入Lorentz 范数：

$$\|f\|_{\alpha 1}=\|f\|^*_{\alpha 1}+\|f\|,$$

$$\|f\|_{\alpha 2}=\|f\|^*_{\alpha 2}+\|f\|.$$

明显地

$$\|f\|_{\alpha 2} \leqslant \|f\|_{\alpha 1} \qquad (3.21)$$

且$\|\cdot\|_{\alpha 1}$和$\|\cdot\|_{\alpha 2}$都是 $Lip^*\alpha$ 空间中的范数，且在$\|\cdot\|_{\alpha 1}$范数下 $Lip^*\alpha$ 是完备的，但在$\|\cdot\|_{\alpha 2}$范数下$Lip^*\alpha$不是完备的，为此我们只需证明不存在$M>0$使得

$$\|f\|_{\alpha 1} \leqslant M\|f\|_{\alpha 2} \qquad (3.22)$$

事实上，对于序列$\{f_n\}$有$\|f_n\|=1$且由（3.19）导出

$$\|f_n\|^*_{\alpha 2} \leqslant \varepsilon_n \|f_n\|^*_{\alpha 1} \qquad (3.23)$$

其中$\varepsilon_n \downarrow 0$（$n\to\infty$），其次由（3.21）若$M>0$使得(3.22)成立，则$M\geqslant 1$，于是由(3.2?)和（3.23）导出

$$\|f_n\|^*_{\alpha 1}+1=\|f_n\|_{\alpha 1} \leqslant M\|f_n\|_{\alpha 2}=M(\|f\|^*_{\alpha 2}+1) \leqslant M(\varepsilon_n\|f_n\|^*_{\alpha 1}+1)$$

或

$$(1-M\varepsilon_n)\|f_n\|^*_{\alpha 1} \leqslant M-1$$

因此由（3.19）导出

$$(1-M\varepsilon_n)2^{1+\alpha}\lambda_n^\alpha \leqslant M-1$$

因为$\lambda_n\to+\infty$，所以上式导出$\varepsilon_n M\geqslant 1$，但$\varepsilon_n \downarrow 0$这是矛盾。

最后，由于在$\|\cdot\|_{\alpha 2}$范数下$Lip^*\alpha$是不完备的，所以，存在$\|\cdot\|_{\alpha 2}$下的Cauchy列$\{g_n\}\subset Lip^*\alpha$，即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0\in N$使得当$n_1>n_0$，$n_2>n_0$时有

$$\|g_{n_1}-g_{n_2}\|_{\alpha 2}<\varepsilon \qquad (3.24)$$

由范数$\|\cdot\|_{\alpha 2}$的定义可知$\{g_n\}$在$C_{2\pi}$范数下也是Cauchy列，所以存在$g\in C_{2\pi}$使得$\|g-g_n\|_{C_{2\pi}}\to 0$（$n\to+\infty$）但$g\notin Lip^*\alpha$，即$\|g\|^*_{\alpha 1}=+\infty$。

由（3.24），对任意$m\in N$，有

$$\phi_m^{-\alpha}\|\Delta^2_{\phi_m}(g_{n_1}-g_{n_2})\|_{C_{2\pi}}<\varepsilon$$

令$n_2\to+\infty$得到，对$\varepsilon>0$，当$n_1>n_0$时有

$$\phi_m^{-\alpha}\|\Delta^2_{\phi_m}(g_{n_1}-g)\|_{C_{2\pi}}\leqslant\varepsilon$$

从而有

$$\|g_{n_1}-g\|^*_{\alpha 2}\leqslant\varepsilon \qquad (n_1>n_0)$$

又因为

$$\|g\|^*_{\alpha 2}\leqslant\|g_n\|^*_{\alpha 2}+\|g_{n_1}-g\|^*_{\alpha 2}\leqslant\sup_{n\in N}\|g_{n_1}\|^*_{\alpha 2}+\varepsilon<+\infty$$

因此得到$g\in C_{2\pi}$，且$\|g\|^*_{\alpha 2}<+\infty$，但$\|g\|^*_{\alpha 1}=+\infty$，定理证毕。

3.3 关于二阶光滑模的一个充分条件

考察定理3.11的逆命题，自然要问，逼近阶序列$\{\phi_n\}\in\Lambda$是否为对每个$f\in C_{2\pi}$关系（3.17）成立的充分条件呢？为回答这个问题，首先建立如下引理：

引理3.8 （抛物线引理） 设$f\in C[a,b]$且$f(a)=f(b)=0$，若对某个$x_0\in(a,b)$有$f(x_0)>0$，则存在二次抛物线$Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$（$\alpha<0$）和$y\in(a,b)$使得$Q(y)=f(y)$

且对$x\in[a,b]$有

$$Q(x)\geqslant f(x) \tag{3.24}$$

或对$x\in[a,b]$有

$$Q(x)=\alpha(x-y)^2+\beta(x-y)+f(y)\geqslant f(x)$$

证明　令$M=2\|f\|_{C[a,b]}$，$c=\frac{a+b}{2}$，因此对$\alpha<0$且$|\alpha|$充分小有

$$Q_0(x)=\alpha(x-c)^2+M\geqslant f(x)$$

还可选取$|\alpha|$充分小使得

$$\alpha\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+M>Q_0(x_0)-f(x_0)\geqslant 0$$

于是有

$$Q_0(b)-f(b)=\alpha\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+M>Q_0(x_0)-f(x_0)\geqslant 0;$$

$$Q_0(a)-f(a)=\alpha\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+M>Q_0(x_0)-f(x_0)\geqslant 0,$$

因此$m=\inf\limits_{x\in[a,b]}(Q_0(x)-f(x))$在$(a,b)$内某点$y$达到，即

$$Q_0(y)-f(y)=m \tag{3.25}$$

所以对$x\in[a,b]$有

$$Q_0(x)-m\geqslant f(x).$$

因而二次抛物线

$$Q(x)=Q_0(x)-m=Q_0(x)-Q_0(y)+f(y)$$
$$=\alpha(x-y)^2+\beta(x-y)+f(y)$$

适合引理所求，证毕。

附注　由引理3.3确定的二次抛物线$Q(x)$实际上还适合$Q(a)>0$，$Q(b)>0$。因为
$Q(a)=Q_0(a)-m>Q_0(a)-(Q_0(a)-f(a))=f(a)=0$。
同样地有$Q(b)>0$。

引理3.4（Baianski－Bojanic）设f在区间$[x_0-t_0,\ x_0+t_0]$（$t_0>0$）上连续，且

$$\Delta^2_{t_0}(f,x_0)\leqslant -Mt_0^2 \tag{3.26}$$

其中$M>0$，则对充分近于1的λ（$0<\lambda<1$）如下命题之一成立，

1）存在$y\in[x_0-\lambda t_0,\ x_0+\lambda t_0]$和抛物线

$$Q^*(t)=-\frac{1}{2}(1-\lambda)M(t-y)^2+l(t)$$

使得对$t\in[x_0-t_0,\ x_0+t_0]$有

$$Q^*(t)\geqslant f(t)\ 且Q^*(y)=f(y) \tag{3.27}$$

其中$l(t)$是线性函数，或对$t\in[x_0-t_0,\ x_0+t_0]$有

$$Q^*(t)=-\frac{1}{2}(1-\lambda)M(t-y)^2+\beta(t-y)+f(y)\geqslant f(t)$$

II) 对某个$0<\beta<1-\lambda$和$y\in[x_0-t_0,\ x_0+t_0]$有

$$\Delta^2_{\beta t_0}(f,y)\leqslant-\frac{1}{2}(\lambda-\lambda\beta-\beta^2)Mt_0^2 \quad (3.28)$$

证明 设

$$l_1(t)=f(x_0-t_0)+\frac{f(x_0+t_0)-f(x_0-t_0)}{2t_0}(t-x_0+t_0)$$

令 $g(t)=f(t)-l_1(t)$，则$g(x_0\pm t_0)=0$，且由（3.26）导出

$$-2g(x_0)=f(x_0+t_0)+f(x_0-t_0)-2f(x_0)$$
$$=\Delta^2_{t_0}(f,x_0)\leqslant-Mt_0^2$$

或$g(x_0)\geqslant\frac{M}{2}t_0^2>0$、因此由抛物线引理，存在抛物线$Q(t)=-\frac{1}{2}(1-\lambda)M(t-x_0)^2+C$（C是足够大的常数）使得对$t\in[x_0-t,x_0+t_0]$有$Q(t)\geqslant g(t)$，且对某个$y\in(x_0-t_0,x_0+t_0)$有

$$Q(y)-g(y)=m=\inf_{t\in[x_0-t_0,x_0+t_0]}(Q(t)-g(t))$$

若$y\in[x_0-\lambda t_0,x_0+\lambda t_0]$，取$Q^*(t)=Q(t)-m+l_1(t)$，则对$t\in[x_0-t_0,\ x_0+t_0]$有

$$Q^*(t)=Q(t)-m+f(t)-g(t)\geqslant f(t)$$

且$Q^*(y)=f(y)$，或对$t\in[x_0-t_0,x_0+t_0]$有

$$Q^*(t)=-\frac{1}{2}(1-\lambda)M(t-y)^2+\beta(t-y)\geqslant f(t),$$

即断言I)成立。

若$y\notin[x_{00}-\lambda t_0,x_0+\lambda t_0]$，不妨设$y=x_0-\lambda' t_0$，其中$1>\lambda'>\lambda$，令$\beta=1-\lambda'>0$，则$y-\beta t_0=x_0-t_0$ 故有

$$g(y-\beta t_0)=g(x_0-t_0)=0 \quad (3.29)$$

且有

$$-Q(y)+Q(x_0)=\frac{1}{2}(1-\lambda)M(\lambda' t_0)^2\leqslant\frac{1}{2}(1-\lambda)Mt_0^2$$

或

$$Q(y)\geqslant-\frac{1}{2}(1-\lambda)Mt_0^2+Q(x_0)$$

因此

$$g(y)=g(x_0-\lambda' t_0)=Q(y)-m\geqslant-\frac{1}{2}(1-\lambda)Mt_0^2-m+Q(x_0)$$

$$=\frac{1}{2}\lambda Mt_0^2+Q(x_0)-m-\frac{1}{2}Mt_0^2\geqslant\frac{1}{2}\lambda Mt_0^2 \quad (3.30)$$

其中利用$Q(x_0)-g(x_0)\geqslant m$和$g(x_0)\geqslant\frac{1}{2}Mt_0^2$

又

$$|Q(y+\beta t_0)-Q(y)|=\frac{1}{2}(1-\lambda)M|2(y-x_0)\beta t_0+\beta^2 t_0^2|$$

$$=\frac{1}{2}(1-\lambda)M|2(-\lambda' t_0)\beta t_0+\beta^2 t_0^2|\leqslant\frac{1}{2}M(2\beta+\beta^2)t_0^2$$

所以有

$$|Q(y+\beta t)-m-g(y)|=|Q(y+\beta t_0)-Q(y)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}M(2\beta+\beta^2)t_0^2$$

因此有

$$g(y+\beta t_0)-g(y)\leqslant Q(y+\beta t_0)-m-g(y)\leqslant|Q(y+\beta t_0)-m-g(y)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}M(2\beta+\beta^2)t_0^2 \qquad (3.38)$$

结合(3.29)—(3.31)得到

$$g(y-\beta t_0)+g(y+\beta t_0)-2g(y)\leqslant\frac{1}{2}M(2\beta+\beta^2)t_0^2-\frac{1}{2}\lambda M t_0^2$$

$$=-\frac{1}{2}(\lambda-2\beta-\beta^2)Mt_0^2$$

因而有$0<\beta<1-\lambda$ 和$y\in[x_0-t_0,x_0+t_0]$使得

$$\triangle^2_{\beta t_0}(f,y)=\triangle^2_{\beta t_0}(g,y)\leqslant-\frac{1}{2}(\lambda-2\beta-\beta^2)Mt_0^2$$

即断言ii)成立，证毕。

现在讨论二阶光滑模的一个充分条件，并肯定地回答本节开始所提的问题，得到

定理3.12(DeVore)　设$\phi_n\downarrow 0$且$\{\phi_n\}\in\Lambda$，则对每个$f\in C_{2\pi}$，$\|f\|^{\alpha}_{\phi_2}<+\infty\Longleftrightarrow$ $\|f\|^{\alpha}_{\phi_1}<+\infty$，即

$$\|\triangle^2_{\phi_n}(f)\|=O(\phi_n^{\alpha})\Longleftrightarrow\|\triangle^2_t(f)\|=O(t^{\alpha})$$

其中$0<\alpha\leqslant 2$。

证明　分二步进行，首先设$M=\|f\|^{\alpha}_{\phi_1}<+\infty$，我们证明

$$\|f\|^{\alpha}_{\phi_1}\leqslant B_{\alpha}^{-1}\|f\|^{\alpha}_{\phi_2} \qquad (3.32)$$

其中B_α是仅依赖于α的正数，因为$\|f\|^{\alpha}_{\phi_1}<+\infty$，所以可以选取$x_0$，$t_0$使得

$$|\triangle^2_{t_0}(f,x_0)|\geqslant\frac{9}{10}Mt_0^{\alpha} \qquad (3.33)$$

不妨设$\triangle^2_{t_0}(f,x_0)<0$(否则可用$-f$代替)得到

$$\triangle^2_{t_0}(f,x_0)\leqslant-\frac{9}{10}Mt_0^{\alpha}=-\frac{9}{10}Mt_0^{\alpha-2}t_0^2,$$

取$\lambda=1-16^{-\frac{2}{\alpha}}$，我们证明引理3.4中断言ii)不真，事实上，若$0<\beta<1-\lambda$，则

$$\|\triangle^2_{\beta t_0}(f)\|_{C_{2\pi}}\leqslant M(\beta t_0)^{\alpha}\leqslant 16^2 Mt_0^{\alpha}$$

$$\leqslant \frac{9}{20}(\lambda-2\beta-\beta^2)Mt_0^\alpha < \frac{1}{2}(\lambda-2\beta-\beta^2)Mt_0^\alpha$$

即对任意$0<\beta<1-\lambda$和$\forall y\in[x_0-t_0, x_0+t_0]$有

$$\Delta^2_{\beta t_0}(f,y) > -\frac{1}{2}(\lambda-2\beta-\beta^2)Mt_0^{\alpha-2}t_0^2$$

因此，存在$y\in[x_0-\lambda t_0, x_0+\lambda t_0]$和二次抛物线

$$Q^*(t)=-\frac{9}{20}(1-\lambda)Mt_0^{\alpha-2}(t-y)^2+l_1(t)$$

使得 $Q^*(y)=f(y)$且对$t\in[x_0-t_0, x_0+t_0]$有

$$Q^*(t)\geqslant f(t). \tag{3.34}$$

由于$\phi_n\downarrow 0$，所以可选取$n\in N$使得

$$\phi_n\leqslant(1-\lambda)t_0<\phi_{n-1}$$

注意到$y\in[x_0-\lambda t_0, x_0+\lambda t_0]$，有

$$x_0-t_0\leqslant y-\phi_n<y+\phi_n\leqslant x_0+t_0$$

因此由(3.34)导出

$$\Delta^2_{\phi_n}(f,y)=f(y+\phi_n)+f(y-\phi_n)-2f(y)\leqslant Q^*(y+\phi_n)+Q^*(y+\phi_n)-2Q^*(y)$$

$$=-\frac{9}{10}(1-\lambda)Mt_0^{\alpha-2}\phi_n^2\leqslant-\frac{9}{10}(1-\lambda)M(1-\lambda)^{2-\alpha}\phi_{n-1}^{\alpha-2}\phi_n^2$$

$$\leqslant-\frac{9}{10}(1-\lambda)^{3-\alpha}MC^{\alpha-2}\phi_n^\alpha \overset{(记)}{=\!=} -B_\alpha\phi_n^\alpha M$$

其中利用了$\{\phi_n\}\in\Lambda$的条件(3.1)，而$B_\alpha=\frac{9}{10}(1-\lambda)^{3-\alpha}C^{\alpha-2}$，因此导出

$$|\Delta^2_{\phi_n}(f,y)|\geqslant MB_\alpha\phi_n^\alpha$$

或

$$\phi_n^{-\alpha}|\Delta^2_{\phi_n}(f,y)|\geqslant B_\alpha\|f\|^*_{\alpha 1}$$

从而有

$$\|f\|^*_{\alpha 2}\geqslant B_\alpha\|f\|^*_{\alpha 1}$$

(3.32)得证

其次，设$\|f\|^*_{\alpha 2}<+\infty$，令

$$f_m(x)=(f*F_m)(x)=\sigma_m(f,x)$$

则$f_m\in C^2_{2\pi}$所以$\|f_m\|^*_{\alpha 1}<+\infty$，由(3.32)得到

$$\|f_m\|^*_{\alpha 1}\leqslant B_\alpha^{-1}\|f_m\|^*_{\alpha 2} \tag{3.35}$$

注意到对$m\in N$有

$$\|\Delta^2_{\phi_n}(f_m)\|_{C_{2\pi}}\leqslant\|\Delta^2_{\phi_n}(f)\|_{C_{2\pi}}$$

从而有

$$\|f_m\|^*_{\alpha 2}\leqslant\|f\|^*_{\alpha 2}<+\infty$$

因此由（3.35）导出，对$m\in N$有

$$\|f_m\|_{\alpha 1}^{*}\leqslant B_{\alpha}^{-1}\|f\|_{\alpha 2}^{*}$$

又因为$\|f_m-f\|_{C_{2\pi}}\to 0$（$m\to\infty$）。所以有

$$\|f\|_{\alpha 1}^{*}\leqslant B_{\alpha}^{-1}\|f\|_{\alpha 2}^{*}。$$

证毕。

结合定理3.11和定理3.12得到

定理3.13 说$\phi_n\downarrow 0$（$n\to+\infty$）和$f\in C_{2\pi}$，则如下命题成立当且仅当$\{\phi_n\}\in\Lambda_2$

$$\|\triangle_{\phi_n}^{2}(f)\|=O(\phi_n^{\alpha})\Longleftrightarrow\|\triangle_t^{2}(f)\|_{C_{2\pi}}=O(t^{\alpha})$$

其中$0<\alpha\leqslant 2$。

§4 线性算子局部逼近的等价定理

4.1 质量集中的Borel测度列

设$\{d\mu_n(t)\}_{n\in N}$是$I_a=[-a,a]$（$a>0$）上非负、偶性Borel测度核，且当$n\to+\infty$时有

$$\phi_n^2=\int_{-a}^{a}d\mu_n(t)\downarrow 0 \tag{4.1}$$

我们有

引理3.5 设$\{d\mu_n(t)\}_{n\in N}$是I_a上非负，偶性Borl测度核且适合（4.1），则对$0<\alpha\leqslant 2$有

$$\int_{-a}^{a}|t|^{\alpha}d\mu_n(t)\leqslant 3\phi_n^{\alpha} \tag{4.2}$$

证明 由于$\phi_n\downarrow 0$（$n\to+\infty$），不妨设$\phi_n\leqslant a$，因此有

$$\int_{-a}^{a}|t|^{\alpha}d\mu_n(t)=2\int_{0}^{a}t^{\alpha}d\mu_n(t)$$

$$=2\int_{0}^{\phi_n}t^{\alpha}d\mu_n(t)+2\int_{\phi_n}^{a}t^{\alpha}d\mu_n(t)$$

$$\leqslant 2\phi_n^{\alpha}+2\phi_n^{\alpha-2}\int_{\phi_n}^{a}t^{2}d\mu_n(t)\leqslant 3\phi_n^{\alpha}$$

证毕。

现在，对$f\in C(I_{2a})$令

$$L_n(f,x)=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)d\mu_n(t) \tag{4.3}$$

通称L_n为非周期卷积算子，明显地，L_n是$C(I_{2a})$到$C(I_a)$的正线性算子，首先研究L_n的局

部逼近正定理得到

定理3.14 设$\{L_n\}_{n\in N}$是由（4.3）确定的非周期卷积算子列，则对每个$f\in Lip^*\alpha$（$0<\alpha\leqslant 2$）有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}=O(\phi_n^{\alpha})$$

证明 由（4.2）和（4.3）得到

$$\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}\leqslant\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\|\Delta_t^2(f)\|_{C(I_a)}d\mu_n(t)$$

$$\leqslant M\int_{-a}^{a}|t|^{\alpha}d\mu_n(t)=O(\phi_n^{\alpha})$$

证毕。

自然要问，设$f\in C(I_{2a})$，如下命题成立否？

$$\|L_n(f)\|_{C(I_a)}=O(\phi_n^{\alpha})\Longleftrightarrow f\in Lip^*\alpha \qquad (4.4)$$

由定理3.14导出如下结论。

引理3.6 若存在$\varepsilon\in(0,\alpha)$使得

$$\int_{-a}^{a}|t|^{\alpha-\varepsilon}d\mu_n(t)=O(\phi_n^{\alpha}) \qquad (4.5)$$

则命题（4.4）一定不成立。

证明 由定理3.14可见，若（4.5）成立，则对每个$f\in Lip^*(\alpha-\varepsilon)$有

$$\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}=O(\phi_n^{\alpha})。$$

另一方面，对$\varepsilon>0$，$Lip^*\alpha$真包含于$Lip^*(\alpha-\varepsilon)$，所以存在$f_\varepsilon\in Lip^*(\alpha-\varepsilon)$，但$f_\varepsilon\notin Lip^*\alpha$，可是仍成立

$$\|L_n(f_\varepsilon)-f_\varepsilon\|_{C(I_a)}=O(\phi_n^{\alpha})$$

所以命题（4.4）不成立，证毕。

由引理3.6可见，要使命题（4.4）成立，必须对$\forall\varepsilon\in(0,\alpha)$有

$$\int_{-a}^{a}|t|^{\alpha-\varepsilon}d\mu_n(t)\neq O(\phi_n^{\alpha})。$$

为确保Borel测度列$\{d\mu_n\}_{n\in N}$适合上述条件，我们引入如下质量集中的测度列。

设$\{d\mu_n(t)\}_{n\in N}$是I_a上非负、偶性Borel测度核，若对每个$\varepsilon>0$存在$A_\varepsilon>0$和自然数N使得当$n>N$时有

$$\int_{A_\varepsilon\phi_n}^{a}t^2d\mu_n(t)\leqslant\varepsilon\int_{0}^{a}t^2d\mu_n(t)=\frac{\varepsilon}{2}\phi_n^2 \qquad (4.6)$$

则说$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是质量集中的测度列。

下面讨论质量集中的测度列的若干重要性质。

引理3.7 若$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是质量集中的测度列，则对$0<\beta\leqslant 2$有

$$\int_{-a}^{a}|t|^{\beta}d\mu_n(t)\geqslant\frac{1}{2}A_{\frac{1}{2}}^{\beta-2}\phi_n^{\beta} \qquad (4.7)$$

证明 由于$\{d\mu_n\}$是质量集中的测度列，所以对$\varepsilon=\frac{1}{2}$存在$A_{\frac{1}{2}}>0$和自然数N,使得当$n>N$时

$$\int_{A_{\frac{1}{2}}\phi_n}^{a} t^2 d\mu_n(t)\leqslant\frac{1}{4}\phi_n^2$$

于是有（注意，当n充分大时$A_{\frac{1}{2}}\phi_n\leqslant a$）

$$\int_0^a |t|^\beta d\mu_n(t)\geqslant\int_0^{A_{\frac{1}{2}}\phi_n}|t|^\beta d\mu_n(t)$$

$$\geqslant(A_{\frac{1}{2}}\phi_n)^{\beta-2}\int_0^{A_{\frac{1}{2}}\phi_n}t^2 d\mu_n(t)$$

$$=(A_{\frac{1}{2}}\phi_n)^{\beta-2}\left(\int_0^a t^2 d\mu_n(t)-\int_{A_{\frac{1}{2}}}^{a} t^2 d\mu_n(t)\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{4}A_{\frac{1}{2}}^{\beta-2}\phi_n^{\beta}.$$

证毕。

由（4.2）和（4.7）导出，若$\{d\mu_n(t)\}$是质量集中的测度列，则对任意$0<\beta\leqslant 2$有

$$\int_{-a}^{a}|t|^\beta d\mu_n(t)\asymp\phi_n^\beta \qquad (4.8')$$

由此可见，对任意$0<\alpha\leqslant 2$和$\forall\varepsilon\in(0,\alpha)$，有

$$\phi_n^{-\alpha}\int_0^a|t|^{\alpha-\varepsilon}d\mu_n(t)\geqslant\phi_n^{-\alpha}\ \frac{1}{4}A_{\frac{1}{2}}^{\alpha-\varepsilon-2}\phi_n^{\alpha-\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{4}A_{\frac{1}{2}}^{\alpha-\varepsilon-2}\phi_n^{-\varepsilon}\to+\infty$$

即

$$\int_0^a|t|^{\alpha-\varepsilon}d\mu_n(t)\neq O(\phi_n^\alpha).$$

根据引理3.7我们指出非质量集中的测度列是存在的。

例 设$x_{nk}=\frac{1}{kn^r}$（$r\geqslant1$），$t\in[-\pi,\pi]$，令

$$d\mu_n(t)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(d\delta_{x_{nk}}(t)+d\delta_{-x_{nk}}(t)\right)$$

于是对$\beta>1$有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^\beta d\mu_n(t)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{kn^r}\right)^\beta$$

$$=n^{-\beta r-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\asymp n^{-\beta r-1}.$$

特别有

$$\phi_n^2=\int_{-\pi}^{\pi}t^2d\mu_n(t)=n^{-r-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\asymp n^{-2r-1}$$

现在设$1<\alpha<2$，$0<\varepsilon<\min\left(\alpha-1,\frac{1-\frac{\alpha}{2}}{r}\right)$，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha-\varepsilon}d\mu_n(t)=n^{-(\alpha-\varepsilon)r-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-\varepsilon}}$$

$$=n^{-(r+\frac{1}{2})\alpha}\left(n^{\varepsilon r+\frac{\alpha}{2}-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha-\varepsilon}}\right)$$

由于$\alpha-\varepsilon>1$，$r\varepsilon+\frac{\alpha}{2}-1<0$，所以得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha-\varepsilon}d\mu_n(t)=O(\phi_n^{\alpha})$$

可见，本例给出的测度列$\{d\mu_n\}$并非质量集中的。

不过，从本例可见，质量集中测度列的定义中条件（4.6）：

$$\int_{A,\phi_n}^{a}t^2d\mu_n(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\phi_n^2$$

不能换作条件

$$\int_{A,\phi_n'}^{a}t^2d\mu_n(t)<\frac{\varepsilon}{2}\phi_n^2$$

其中$\phi_n=O(\phi_n')$，比如本例中的测度列并非质量集中的测度列，但若取$\phi_n'=n^{-r}$，则

$$\phi_n=n^{-(r+\frac{1}{2})}=O(\phi_n')$$

且有

$$\int_{2n^{-r}}^{\pi}t^2d\mu_n(t)=0<\frac{\varepsilon}{2}\phi_n^2$$

引理3.8 设$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是质量集中的测度列，则当$n\to+\infty$时，对$\delta\in(0,\frac{a}{2})$一致有

$$\int_{a-\delta}^{a}d\mu_n(t)=O(\phi_n^2)$$

或对$\delta\in(0,\frac{a}{2})$一致有

$$\int_{a-\delta\leqslant|t|\leqslant a}d\mu_n(t)=o(\phi_n^2).\tag{4.10}$$

证明 由于$\{d\mu_n\}$是质量集中的测度列，所以对$\forall\varepsilon>0$和自然数N使得当$n\geqslant N$时有

$$\int_{A_1\phi_n}^{a}t^2d\mu_n(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\phi_n^2.$$

又因对固定$A_1<0$，有$A_1\phi_n\to 0^+(n\to\infty)$，于是存在自然数N使得当$n>N$时

$$0<A_1\phi_n<\frac{a}{2},$$

因此当$n>N$时，对$\forall\delta\in(0,\frac{a}{2})$有

$$0<A_1\phi_n<a-\delta.$$

从而对$\forall\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>N$时，对$\forall\delta\in(0,\frac{a}{2})$有

$$\int_{a-\delta}^{a}d\mu_n(t)\leqslant\frac{1}{(a-\delta)^2}\int_{a-\delta}^{a}t^2d\mu_n(t)$$

$$\leqslant\frac{4}{a^2}\int_{A_1\phi_n}^{a}t^2d\mu_n(t)\leqslant\frac{2\varepsilon}{a^2}\phi_n^2$$

所以得到，当$n\to+\infty$时，关于$\delta\in(0,\frac{a}{2})$一致有

$$\int_{a-\delta}^{a}d\mu_n(t)=o(\phi_n^2)$$

证毕。

引理3.9 设$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是质量集中的测度列，则当$n\to+\infty$时，对$\delta\in(0,\frac{a}{2})$一致有

$$\int_{-a+\delta}^{a-\delta}d\mu_n(t)=1+o(\phi_n^2)\tag{4.11}$$

证明 由于对$\forall\delta\in(0,\frac{a}{2})$有

$$\int_{-a+\delta}^{a-\delta}d\mu_n(t)=\int_{-a}^{a}d\mu_n(t)-2\int_{-a}^{a}d\mu_n(t)$$

所以由引理3.8得到，当$n\to+\infty$时，对$\delta\in(0,\frac{a}{2})$一致有

$$\int_{-a+\delta}^{a-\delta}d\mu_n(t)=1-2\int_{a-\delta}^{a}d\mu_n(t)$$

$$=1+o(\phi_n^2)$$

证毕。

4.2. 非周期正卷积算子逼近的逆定理

设$\{L_n\}$是由（4.3）确定的非周期正卷积算子列，对$f\in C(I_{2a})$，令

$$\|f\|_{a1}^* = \sup_{0<t\leqslant a} t^{-a}\|\Delta_t^2(f)\|_{C(I_a)}$$

$$\|f\|_{a2}^* = \sup_{n\in N} \phi_n^{-a}\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}$$

则命题（4.4）等价于如下命题：对$f\in C(I_{2a})$有，

$$\|f\|_{a2}^* < +\infty \iff \|f\|_{a1}^* < +\infty \tag{4.12}$$

我们证明在一定条件下，命题（4.12）是正确的。

首先建立如下引理。

引理3.10 设$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是质量集中的测度列且存在$C>1$使得

$$\frac{1}{C} \leqslant \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \leqslant C. \tag{4.13}$$

若对$0<a\leqslant 2$有$\|f\|_{a1}^*<+\infty$，则存在$B_a>0$使得

$$\|f\|_{a1}^* \leqslant B_a^{-1}\|f\|_{a2}^*. \tag{4.14}$$

证明 设$0<\lambda<1$，并选取充分近于1的λ使得

$$(1-\lambda)^a < \frac{9}{20}(\lambda-2(1-\lambda)-(1-\lambda)^2) \tag{4.15}$$

固定λ选取$\varepsilon>0$使得

$$-\frac{9}{20}(1-\lambda)^{2-a}(1-\varepsilon)C^{2(2-a)} + \frac{\varepsilon}{2} < 0 \tag{4.16}$$

固定$\varepsilon>0$，存在$A_\varepsilon>0$和自然数N，使得当$n>N$时

$$\int_{A_\varepsilon\phi_n}^{a} t^2 d\mu_n(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\phi_n^2 \tag{4.17}$$

因为$\|f\|_{a1}^*=M<+\infty$，可选取$x_0, t_0\in I_a$，使得

$$\Delta_{t_0}^2(f, x_0) \leqslant -\frac{9}{10}Mt_0^a = -\frac{9}{10}Mt_0^{a-2}t_0^2$$

由此可导出Bajanski—Bojanic引理（引理3.4）中的断言ii)不成立。事实上，由于$\|f\|_{a1}^*=M<+\infty$，所以当$0<\beta<1-\lambda$时，对$\forall y\in[-a,a]$有

$$|\Delta_{\beta t_0}^2(f,y)| \leqslant M\beta^a t_0^a \leqslant M(1-\lambda)^a t_0^a$$

故由（4.15）导出

$$|\Delta_{\beta t_0}^2(f,y)| \leqslant \frac{9}{20}(\lambda-2(1-\lambda)-(1-\lambda)^2)Mt_0^a$$

$$<\frac{1}{2}(\lambda-2\beta-\beta^2)Mt_0^{\alpha-2}t_0^2.$$

因而有

$$\Delta^2_{\beta t_0}(f,y)>-\frac{1}{2}(\lambda-2\beta-\beta^2)Mt_0^{\alpha-2}t_0^2$$

$$>-\frac{1}{2}(\lambda-\lambda\beta-\beta^2)Mt_0^{\alpha-2}t_0^2$$

因此由引理3.4断定，存在$y\in[x_0-\lambda t_0,x_0+\lambda t_0]$和二次抛物线

$$Q^*(t)=-\frac{9}{20}(1-\lambda)t_0^{\alpha-2}(t-y)^2+l(t)$$

使得$Q^*(y)=f(y)$且对$t\in[x_0-t_0,x_0+t_0]$有

$$Q^*(t)\geqslant f(t) \tag{4.17}$$

其中$l(t)$是线性的。

由于$\phi_n\to0$且适合(4.13)，所以可选取$m\in N$使得

$$A_c\phi_m<(1-\lambda)t_0\leqslant CA_c\phi_{m-1} \tag{4.18}$$

因此有$[y-A_c\phi_m,y+A_c\phi_m]\subset[x_0-t_0,x_0+t_0]$注意到

$$L_m(f,y)-f(y)=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\Delta_t^2(f,y)d\mu_m(t)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-a}^{-A_c\phi_m}+\int_{-A_c\phi_m}^{A_c\phi_m}+\int_{A_c\phi_m}^{a}\right)\Delta_t^2(f,y)d\mu_m(t)$$

$$\underline{\underline{(记)}}\ I_1+I_2+I_3$$

其中

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{-A_c\phi_m}^{A_c\phi_m}\Delta_t^2(f,y)d\mu_m(t)\leqslant\frac{1}{2}\int_{-A_c\phi_m}^{A_c\phi_m}\Delta_t^2(Q^*,y)d\mu_m(t)$$

$$=-\frac{9}{20}Mt_0^{\alpha-2}(1-\lambda)\int_{-A_c\phi_m}^{A_c\phi_m}t^2d\mu_m(t)$$

由(4.17)导出

$$\int_{-A_c\phi_m}^{A_c\phi_m}t^2d\mu_m(t)=\left(\phi_m^2-2\int_{A_c\phi_m}^{a}t^2d\mu_m(t)\right)\geqslant\phi_m^2(1-\varepsilon)$$

所以有

$$I_2\leqslant-\frac{9}{20}Mt_0^{\alpha-2}(1-\lambda)(1-\varepsilon)\phi_m^2$$

$$\leqslant-\frac{9}{20}M(1-\lambda)^{2-\alpha}(CA_c)^{\alpha-2}(1-\varepsilon)\phi_m^2\phi_{m-1}^{\alpha-2}$$

$$\leqslant-\frac{9}{20}M(1-\lambda)^{2-\alpha}C^{2(\alpha-2)}A_c^{\alpha-2}(1-\varepsilon)\phi_m^\alpha$$

而

$$|I_1|=\left|\frac{1}{2}\int_{A_\varepsilon\phi_n}^{a}\triangle_t^2(f,y)\,d\mu_n(t)\right|$$

$$\leqslant\frac{M}{2}\int_{A_\varepsilon\phi_n}^{a}|t|^{\alpha}d\mu_n(t)$$

$$\leqslant\frac{M}{2}(A_\varepsilon\phi_n)^{\alpha-2}\int_{A_\varepsilon\phi_n}^{a}t^2d\mu_n(t)$$

$$\leqslant\frac{M}{4}A_\varepsilon^{\alpha-2}\phi_n^{\alpha-2}\varepsilon\phi_n^2=\frac{M}{4}A_\varepsilon^{\alpha-2}\varepsilon\phi_n^\alpha$$

类似地有

$$|I_3|\leqslant\frac{M}{4}A_\varepsilon^{\alpha-2}\varepsilon\phi_n^\alpha.$$

因而有

$$L_n(f,y)-f(y)\leqslant|I_1|+|I_2|+|I_3|$$

$$\leqslant\left(-\frac{9}{20}(1-\lambda)^{2-\alpha}(1-\varepsilon)C^{2(2-\alpha)}+\frac{\varepsilon}{2}\right)A_\varepsilon^{\alpha-2}M\phi_n^\alpha$$

$$\text{记}\ -B_\varepsilon M\phi_n^\alpha$$

其中由（4.16）导出，$B_\varepsilon=\left(\frac{9}{20}(1-\lambda)^{2-\alpha}(1-\varepsilon)C^{2(2-\alpha)}-\frac{\varepsilon}{2}\right)A_\varepsilon^{\alpha-2}>0$

所以

$$\|L_n(f)-f\|_{C(I_b)}\geqslant B_\varepsilon M\phi_n^\alpha,$$

故得

$$\|f\|_{\alpha 2}^{*}=\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|L_n(f)-f\|_{C(I_b)}\geqslant B_\varepsilon\|f\|_{\alpha 1}^{*}$$

或

$$\|f\|_{\alpha 1}^{*}\leqslant B_\varepsilon^{-1}\|f\|_{\alpha 2}^{*},$$

证毕。

对$f\in C(I_{2a})$和$0<\delta<\frac{a}{4}$引入二阶Steklov平均

$$f_{2\delta}(x)=\frac{1}{4\delta^2}\int_{-\delta}^{\delta}\int f(x+u+v)\,du\,dv,\quad x\in I_a$$

则$f_{2\delta}\in C^2(I_a)$，所以对$0<\alpha\leqslant 2$有$\|f_{2\delta}\|_{\alpha 1}^{*}<+\infty$。由于

$$f_{2\delta}(x)-L_n(f_{2\delta},x)=\frac{1}{4\delta^2}\int_{-\delta}^{\delta}\int\left(f(x+u+v)-L_n(f,x+u+v)\right)du\,dv$$

所以

$$\|f_{2\delta}-L_n(f_{2\delta})\|_{C(I_{a-2\delta})}\leqslant\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)} \tag{4.18}$$

因此有

$$\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|f_{2\delta}-L_n(f_{2\delta})\|_{C(I_{a-2\delta})}$$

$$\leqslant\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}=\|f\|^{*}_{\alpha,\alpha}$$

又对$\delta\in(0,\frac{a}{4})$引入δ截断算子：

$$L_n^{(2\delta)}(f,x)=\frac{C_n^{(2\delta)}}{2}\int_{-a+2\delta}^{a-2\delta}(f(x+t)+f(x-t))\,d\mu_n(t)\qquad x\in I_a$$

其中$C_n^{(2\delta)}$使得

$$C_n^{(2\delta)}\int_{-a+2\delta}^{a-2\delta}d\mu_n(t)=1$$

由于$\{d\mu_n(t)\}$是质量集中的测度列，根据引理3.9当$n\to+\infty$时，关于$\delta\in(0,\frac{a}{4})$一致有

$$C_n^{(2\delta)}=1+o(\phi_n^2)$$

引理3.11 设$\{L_n\}$是由（4.3）确定的非周期卷积算子列，而$\left\{L_n^{(2\delta)}\right\}$是$\delta$截断算子列，若$\{d\mu_n\}$是质量集中的测度列，则对$f\in C(I_{2a})$，当$n\to\infty$时关于$\delta\in(0,\frac{a}{4})$一致有

$$\|L_n^{(2\delta)}(f)-L_n(f)\|_{C(I_a)}=o(\phi_n^2) \tag{4.19}$$

证明　对$\forall x\in I_a$有

$$L_n(f,x)-L_n^{(2\delta)}(f,x)=\frac{1}{2}\left(\int_{-a}^{-a+2\delta}+\int_{a-2\delta}^{a}\right)(f(x+t)+f(x-t))\,d\mu_n(t)$$

$$+o(\phi_n^2)\int_{-a+2\delta}^{a-2\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,d\mu_n(t)$$

因此由（4.9）导出，当$n\to\infty$时关于$\delta\in(0,\frac{a}{4})$一致有

$$\|L_n(f)-L_n^{(2\delta)}(f)\|_{C(I_a)}\leqslant\|f\|\left(2\int_{a-2\delta}^{a}d\mu_n(t)+o(\phi_n^2)\right)$$

$$=o(\phi_n^2)$$

证毕。

定理3.15 设$\{L_n\}_{n\in N}$是由（4.3）确定的非周期卷积算子列，若$\{d\mu_n(t)\}_{n\in N}$是质量集中的测度列且$\{\phi_n\}$适合（4.13），则对每个$f\in C(I_{2a})$如下断言成立：

$$\|f\|^*_{\alpha,2}<+\infty \Longleftrightarrow \|f\|^*_{\alpha,1}<+\infty$$

证明 设$f\in C(I_a)$且$\|f\|^*_{\alpha 2}<+\infty$，由于对$\delta\in\left(0,\frac{a}{4}\right)$有

$$\|L_n^{(2\delta)}(f_{2\delta})-f_{2\delta}\|_{C(I_{a-2\delta})}\leqslant\|L_n(f_{2\delta})-L_n^{(2\delta)}(f_{2\delta})\|_{C(I_{a-2\delta})}+$$
$$+\|f_{2\delta}-L_n(f_{2\delta})\|_{C(I_{a-2\delta})}$$

由(4.8)，(4.19)导出，当$n\to+\infty$时，关于$\delta\in\left(0,\frac{a}{4}\right)$一致有

$$\|L_n^{(2\delta)}(f_{2\delta})-f_{2\delta}\|_{C(I_{a-2\delta})}\leqslant\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}+o(\phi_n^2),$$

所以有

$$\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|L_n^{(2\delta)}(f_{2\delta})-f_{2\delta}\|_{C(I_{a-2\delta})}$$
$$\leqslant\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}+\sup_{n\in N}o(\phi_n^{2-\alpha})$$
$$\leqslant 2\|f\|^*_{\alpha 2}<+\infty \tag{4.20}$$

又因为对$\delta\in\left(0,\frac{a}{4}\right)$有$\|f_{2\delta}\|^*_{\alpha 1}<+\infty$。利用引理3.11得到

$$\|f_{2\delta}\|^*_{\alpha 2}=\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|L_n(f_{2\delta})-f_{2\delta}\|_{C(I_{a-2\delta})}$$
$$\geqslant B_\alpha\|f_{2\delta}\|^*_{\alpha 1}$$

故

$$\|f_{2\delta}\|^*_{\alpha 1}\leqslant B_\alpha^{-1}\|f_{2\delta}\|^*_{\alpha 2}$$

其中$B_\alpha>0$是常数，又由(4.20)得到

$$\|f_{2\delta}\|^*_{\alpha 2}\leqslant 2\|f\|^*_{\alpha 2}$$

因此得到

$$\|f_{2\delta}\|^*_{\alpha 1}\leqslant 2B_\alpha^{-1}\|f\|^*_{\alpha 2}<+\infty$$

令$\delta\to0^+$并注意到$\|f_{2\delta}-f\|_{C(I_{a-2\delta})}\to0$，故得

$$\|f\|^*_{\alpha 1}\leqslant 2B_\alpha^{-1}\|f\|^*_{\alpha 2}$$

证毕。

特别地，取$d\mu_n(t)=d\delta_{\phi_n}(t)$，则$\{d\mu_n(t)\}$是质量集中的测度列，且有

$$\|f\|^*_{\alpha 2}=\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}$$
$$=\frac{1}{2}\sup_{n\in N}\phi_n^{-\alpha}\|\Delta^2_{\phi_n}(f)\|_{C(I_a-\phi_n)}$$

因此由定理3.15导出二阶光滑的一个充分条件，即

推论3.14 设$\phi_n \to 0^+$（$n\to+\infty$）和$f\in C(I_a)$，则如下断言成立，当且仅当$\{\phi_n\}_{n\in N}$适合条件（4.13）：

$$\|\Delta_{\phi_n}^2(f)\|_{C(I_a-\phi_n)}=O(\phi_n^\alpha)\Longrightarrow\|\Delta_t^2(f)\|_{C(I_a-t)}=O(t^\alpha),$$

其中$0<\alpha\leqslant 2$。

结合定理3.14和3.15得到非周期正卷积算子局部逼近的等价定理

定理3.16 设$\{L_n\}_{n\in N}$是由（4.3）确定的非周期卷积算子列，若$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是质量集中的测度列且$\{\phi_n\}$适合条件（4.13），则对每个$f\in C(I_a)$和$0<\alpha\leqslant 2$，如下命题是等价的：

i）$\|\Delta_t^2(f)\|_{C(I_a)}=O(t^\alpha)$，

ii）$\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}=O(\phi_n^\alpha)$。

4.3 代数卷积算子局部逼近的等价定理

作为非周期卷积算子局部逼近定理的应用我们讨论代数卷积算子局部逼 近 定 理．为此，首先给出质量集中测度列的一个充分条件。

引理3.12 设$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是I_a上正性Borel测度列且$\phi_n^2=\int_{-a}^{a}t^2d\mu_n(t)\to 0$（$n\to+\infty$）若

$$\int_{-a}^{a}t^4d\mu_n(t)=O(\phi_n^4),\tag{4.21}$$

则$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是质量集中的测度列。

证明　由于对$A>0$有

$$\int_{A\phi_n}^{a}t^2d\mu_n(t)\leqslant\frac{1}{(A\phi_n)^2}\int_{A\phi_n}^{a}t^4d\mu_n(t)$$

$$\leqslant A^{-2}\phi_n^{-2}\int_{-a}^{a}t^4d\mu_n(t)\leqslant C_0A^{-2}\phi_n^2$$

又对$\forall\varepsilon>0$，可取$A_\varepsilon>0$使得$C_0A_\varepsilon^{-2}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$，因此对$\forall\varepsilon>0$，存在$A_\varepsilon>0$使得

$$\int_{A_\varepsilon\phi_n}^{a}t^2d\mu_n(t)\leqslant C_0A_\varepsilon^{-2}\phi_n^2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\phi_n^2$$

证毕。

例1 设$d\mu_n(t)=C_n(1-t^2)^n dt$，其中$C_n$使得

$$C_n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt=1$$

因此有

$$\phi_n^2=\int_{-1}^{1}t^2(1-t^2)^n dt\sim\frac{1}{2n} \tag{4.22}$$

故取$\phi_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，由于

$$C_n\int_{-1}^{1}t^4(1-t^2)^n dt=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

所以$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是质量集中的测度列.

由引理3.12和定理3.16得到如下局部逼近的等价定理

定理3.17 设$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是I_a上正性Borel测度核且$\phi_n^2=\int_{-a}^{a}t^2d\mu_n(t)\to0^+$ $(n\to+\infty)$，并存在$C>1$使得

$$\frac{1}{C}\leqslant\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}}\leqslant C,$$

若

$$\int_{-a}^{a}t^4d\mu_n(t)=O(\phi_n^4),$$

则对每个$f\in C(I_{2a})$和$0<\alpha\leqslant2$，如下命题是等价的：

i) $\|\Delta_t^2(f)\|_{C(I_a)}=O(t^\alpha)$.

ii) $\|L_n(f)-f\|_{C(I_a)}=O(\phi_n^\alpha)$，其中$L_n$是由(4.3)确定的非周期正卷积算子.

现在讨论如何运用定理3.17来研究代数卷积算子列的局部逼近等价定理。为了明确起见以Landau算子为例，设$f\in C(I_{\frac{1}{2}})$，引入Landau算子：

$$l_n(f,x)=C_n\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)(1-(t-x)^2)^n dt$$

其中C_n使得

$$C_n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt=1$$

对$0<\delta<\frac{1}{2}$，我们有

$$\begin{aligned}
l_n(f,x)&=C_n\int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x}f(x+t)(1-t^2)^n dt\\
&=C_n\int_{-\frac{1}{2}+\delta}^{\frac{1}{2}-\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}(1-t^2)^n dt+R_n(f,x)\\
&\stackrel{\text{(记)}}{=}l_n^*(f,x)+R_n(f,x)
\end{aligned}$$

其中

$$l_n^*(f,x)=C_n\int_{-\frac{1}{2}+\delta}^{\frac{1}{2}-\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}(1-t^2)^n dt \qquad (4.23)$$

由例1可知，测度列$d\mu_n(t)=C_n(1-t^2)^n dt$是$[-1,1]$上质量集中的测度列，且$\phi_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，因此由定理3.20导出如下结论

系1 设$0<\delta<\frac{1}{2}$，则对$f\in C(I_{\frac{1}{2}})$和$0<\alpha\leqslant 2$如下命题是等价的：

i) $\|\Delta_t^2(f)\|_{C(I_\delta)}=O(t^\alpha)$，

ii) $\|l_n^*(f)-f\|_{C(I_\delta)}=O(n^{-\frac{\alpha}{2}})$。

由于

$$l_n(f,x)=C_n\int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x}f(x+t)(1-t^2)dt$$

$$l_n^*(f,x)=C_n\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}+\delta}^{\frac{1}{2}-\delta}(f(x+t)+f(x-t))(1-t^2)^n dt$$

$$=C_n\int_{-\frac{1}{2}+\delta}^{\frac{1}{2}-\delta}f(x+t)(1-t^2)^n dt$$

所以

$$R_n(f,x)=l_n(f,x)-l_n^*(f,x)$$

$$=C_n\left(\int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x}-\int_{-\frac{1}{2}+\delta}^{\frac{1}{2}-\delta}\right)f(x+t)(1-t^2)^n dt$$

故得

$$\|R_n(f)\|_{C(I_\delta)}\leqslant\|f\|_{C(I_{\frac{1}{2}})}\cdot C_n\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1}(1-t^2)^n dt$$

$$\leqslant 2\|f\|_{C(I_{\frac{1}{2}})}C_n\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^{-4}\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1}t^4(1-t^2)^n dt$$

$$\leqslant C_\delta\|f\|_{C(I_{\frac{1}{2}})}n^{-2}.$$

因此对$x\in I_{\frac{1}{2}}$一致有

$$l_n(f,x)=l_n^*(f,x)+O(n^{-2})$$

从而有

$$\|l_n(f)-f\|_{C(I_\delta)}\leqslant\|l_n^*(f)-f\|_{C(I_\delta)}+O(n^{-2})$$

和

$$\|l_n^*(f)-f\|_{C(I_\delta)}\leqslant\|l_n(f)-f\|_{C(I_\delta)}+O(n^{-2})。$$

可见，对$0<\delta<\frac{1}{2}$，当$f\in C(I_{\frac{1}{2}})$和$0<\alpha\leqslant 2$时有如下等价关系：

$$\|I_n(f)-f\|_{C(I_\delta)}=O(n^{-\frac{\alpha}{2}})\Longleftrightarrow\|I_n^*(f)-f\|_{C(I_\delta)}=O(n^{-\frac{\alpha}{2}})$$

因而由系1导出

系2 设$0<\delta<\frac{1}{2}$，则对$f\in C(I_{\frac{1}{2}})$和$0<\alpha\leqslant 2$时，如下命题是等价的：

I) $\|\Delta_t^2(f)\|_{C(I_\delta)}=O(t^\alpha)$，

II) $\|I_n(f)-f\|_{C(I_\delta)}=O(n^{-\frac{\alpha}{2}})$。

最后轮廓地讨论一般代数卷积算子Λ_n局部逼近的等价定理，设$\{d\mu_n\}_{n\in N}$是I_a上的正Borel测度列且$\phi_n^2=\int_{-a}^{a}t^2d\mu_n(t)\to 0$并适合条件（4.13），对$f\in C(I_{\frac{a}{2}})$有

$$\Lambda_n(f,x)=\int_{-a/2}^{a/2}f(t)d\mu_n(t-x)$$

若$0<\delta<\frac{a}{2}$，则有

$$\begin{aligned}\Lambda_n(f,x)&=\int_{-a/2-x}^{a/2-x}f(x+t)\,d\mu_n(t)\\&=\int_{-\frac{a}{2}+\delta}^{\frac{a}{2}-\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}d\mu_n(t)+R_n(f,x)\\&\overset{(记)}{=}\Lambda_n^*(f,x)+R_n(f,x)\end{aligned}$$

其中

$$\Lambda_n^*(f,x)=\int_{-\frac{a}{2}+\delta}^{\frac{a}{2}-\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}d\mu_n(t).$$

若

$$\int_{-a}^{a}t^4d\mu_n(t)=O(\phi_n^4)$$

因此由定理3.17导出，设$0<\delta<\frac{a}{2}$则对$f\in C(I_{\frac{a}{2}})$和$0<\alpha\leqslant 2$如下等价关系成立：

$$\|\Lambda_n^*(f)-f\|_{C(I_\delta)}=O(\phi_n^\alpha)\Longleftrightarrow\|\Delta_t^2(f)\|_{C(I_\delta)}=O(t^\alpha)$$

又因

$$\|R_n(f)\|_{C(I_\delta)}=\|A_n(f)-A_n^*(f)\|_{C(I_\delta)}=O(\phi_n^\alpha)$$

从而导出

系3 设$0<\delta<\frac{a}{2}$，则对$f\in C(I_{\frac{a}{2}})$和$0<\alpha\leqslant 2$，如下命题是等价的：

i) $\|\Delta_t^2(f)\|_{C(I_\delta)}=O(t^\alpha)$，

ii) $\|A_n(f)-f\|_{C(I_\delta)}=O(\phi_n^\alpha)$。

§5 插补空间与逼近等价定理

5.1. Banach空间逼近等价定理

设X是Banach空间，其范数为$\|\cdot\|_X$，U是X中线性稠密集，并规定半范$|\cdot|_U$，则对$t>0$

$$K_U(f,t)_X=\inf_{g\in U}\{\|f-g\|_X+t|g|_U\}$$

是X上的K－泛函、又设$\omega(t)\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha\leqslant 1$），记

$$X_\omega=\{f|f\in X \text{ 且 } \sup_{t\in(0,1)}\frac{K_U(f,t)_X}{\omega(t)}<+\infty\}$$

特别地若$\omega(t)=t^\alpha$（$0<\alpha\leqslant 1$），则记作X_α，明显地，若$\lim_{t\to 0+}\frac{\omega(t)}{t}=+\infty$，则有

$$X\supset X_\omega\supset U$$

所以称X_ω是X的插补空间。

关于X_ω具有如下逼近特征

定理3.18 设$\{L_n\}_{n\in N}$是X到自身内的一致有界的线性算子列，且适合条件：

i) 对每个$g\in U$有

$$\|L_n(g)-g\|_X\leqslant M_1\phi_n|g|_U \tag{5.1}$$

和

$$|L_n(g)|_U\leqslant M_2|g|_U \tag{5.2}$$

ii) 对每个$f\in X$有

$$|L_n(f)|_U\leqslant M_3\phi_n^{-1}\|f\|_X \tag{5.3}$$

其中$\phi_n\to 0^+$（$n\to+\infty$）且存在子列$\{\phi_{n_k}\}$和$C>1$使得

$$\frac{1}{C}\leqslant\frac{\phi_{n_k}}{\phi_{n_{k+1}}}\leqslant C \tag{5.4}$$

则对每个$f\in X$，$\omega\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha<1$）如下命题是等价的，

i) $f\in X_\omega$

ii) $\|L_n(f)-f\|_X=O(\omega(\phi_n))$

证明 i) ⟹ ii) 可由定理2.14导出，现在证明 ii) ⟹ i)。由条件（5.3）有 $L_n(f)\in U$，所以对 $h\subset(0,1)$ 和 $\forall g\in U$ 有

$$K_U(f,h)_X\leqslant\|f-L_n(f)\|_X+h\|L_n(f)\|_U$$
$$\leqslant M_0\omega(\phi_n)+h(\|L_n(f-g)\|_U+\|L_n(g)\|_U)$$

由（5.3）、（5.2）导出

$$K_U(f,h)_X\leqslant M_0\omega(\phi_n)+h(M_1\phi_n^{-1}\|f-g\|_X+M_2\|g\|_U)$$
$$\leqslant M(\omega(\phi_n))+\frac{h}{\phi_n}(\|f-g\|_X+\phi_n\|g\|_U)$$

其中 $M=\max(M_0,M_1,M_2)$，所以有

$$K_U(f,h)_X\leqslant M(\omega(\phi_n)+\frac{h}{\phi_n}K_U(f,\phi_n)_X) \tag{5.5}$$

取 $\Omega(h)=K_U(f,h)_X$，则 $\Omega(h)$ 是 $h>0$ 的单调增加函数又因为存在 $\{\phi_{n_k}\}$ 适合（5.4），所以对 $t\in(0,\phi_1)$ 可选取 $k=k_t$ 使得

$$\frac{1}{C}\phi_{n_k}\leqslant t\leqslant\phi_{n_{k-1}}\leqslant C\phi_{n_k}$$

因此有

$$\Omega(h)\leqslant M\left(\omega(\phi_{n_k})+\frac{h}{\phi_{n_k}}\Omega(\phi_{n_k})\right)$$
$$\leqslant K\left(\omega(t)+\frac{h}{t}\Omega(t)\right)$$

其中K是正常数。于是由Lorentz—Hermann引理导出，对 $t\in(0,1)$ 有

$$K_U(f,t)_X=O(\omega(t)),$$

或 $f\in X_\omega$。证毕。

特别地，取 $\omega(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant1)$ 有

推论3.5 在定理3.18条件下，则对每个 $f\in X$ 和 $0<\alpha<1$，如下命题是等价的：

i) $f\in X_\alpha$；

ii) $\|L_n(f)-f\|_X=O(\phi_n^\alpha)$。

现在考查一个具体的例子。

例1 设 $D=(0,\infty)$，记

$$U_C=\{g\,|\,g\in C^2(D)\text{且}\|g\|_{U_C}=\|xg''\|_C<+\infty\},$$
$$U_L=\{g\,|\,g\in L_1^2(D)\text{ 且 }\|g\|_{U_L}=\|xg''\|_{L_1}<+\infty\}.$$

则对 $t>0$

$$K(f,t)_C=\inf_{g\in U_C}\{\|f-g\|_C+t\|g\|_{U_C}\},$$

和

$$K(f,t)_L=\inf_{g\in U_L}\{\|f-g\|_{L_1}\text{和}+t\|g\|_{U_L}\}$$

分别为 $C(D)$ 和 $L_1(D)$ 上的K－泛函。

对$\omega\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha\leqslant1$），令

$$C_\omega=\{f \mid f\in C(D)\text{且}\sup_{t\in(0,1)}\frac{K(f,t)_C}{\omega(t)}<+\infty\}$$

和

$$L_{1,\omega}=\{f \mid f\in L_1(D)\text{且}\sup_{t\in(0,1)}\frac{K(f,t)_L}{\omega(t)}<+\infty\}$$

它们分别是$C(D)$和$L_1(D)$的插补空间，特别地，若$\omega(t)=t^\alpha$，则插补空间分别用C_α和$L_{1,\alpha}$表示。

为讨论Sz'asz－Mirakjan算子列$\{S_n\}_{n\in N}$和Sz'asz－Kantorovich算子列$\{S_n^*\}_{n\in N}$分别对C_ω和$L_{1,\omega}$的逼近特征，需要如下一些结果。

命题1 记$f_s(x)=(s-x)_+$，则对$n\geqslant1$，$s\geqslant0$有

$$\int_0^{+\infty}|S_n(f_s,x)-f(x)|dx\leqslant5\frac{s}{n},\tag{5.6}$$

$$\int_0^{+\infty}|S_n^*(f_s,x)-S_n(f_s,x)|dx\leqslant\frac{2s}{n}.\tag{5.7}$$

证明 由于当$x\leqslant s$时有

$$S_n(f_s,x)-f_s(x)=\sum_{k\leqslant[ns]}\left(\left(s-\frac{k}{n}\right)-(s-x)\right)S_{nk}(x)+$$
$$+(x-s)\sum_{k>[ns]}S_{nk}(x)$$

其中 $S_{nk}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$。又因为

$$\sum_{k\leqslant[ns]}\left(x-\frac{k}{n}\right)S_{nk}(x)=x\sum_{k\leqslant[ns]}S_{nk}(x)-\sum_{k\leqslant[ns]}\frac{k}{n}S_{nk}(x)$$
$$=x\left(\sum_{k\leqslant[ns]}S_{nk}(x)-\sum_{1\leqslant k\leqslant[ns]}S_{n,k-1}(x)\right)$$
$$=xS_{n,[ns]}(x).$$

而当$k>[ns]$时，则有$k+1>ns$或$\frac{k+1}{n}>s$，因而有

$$\sum_{k>[sn]}xS_{nk}(x)=\sum_{k>[ns]}e^{-nx}\frac{(nx)^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k+1}{n}$$
$$>s\sum_{k>[ns]}S_{n,k+1}(x)$$

所以

$$(s-x)\sum_{k>[ns]}S_{nk}(x)<s\sum_{k>[ns]}(S_{nk}(x)-S_{n,k+1}(x))$$
$$=s\,S_{n,[ns]+1}(x)$$

因此，当$0\leqslant x\leqslant s$时，有

$$|S_n(f_s,x)-f_s(x)|\leqslant xS_{n,[ns]+1}(x)+s\,S_{n,ns+1}(x),$$

故有

$$\int_0^s |S_n(f_s,x)-f_s(x)|\,dx \leqslant \frac{s}{n}\left(1+\frac{1}{ns}\right)+\frac{s}{n} \leqslant \frac{3s}{n} \tag{5.8}$$

其次，当$x \geqslant s$时，有

$$\begin{aligned} S_n(f_s,x)-f_s(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_s\left(\frac{k}{n}\right) S_{nk}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(s-\frac{k}{n}\right)_+ S_{nk}(x) \end{aligned}$$

由于当$0<s<\frac{1}{n}$时，有

$$S_n(f_s,x)-f_s(x)=s\,S_{n0}(x)=se^{-nx},$$

故有

$$\int_s^{+\infty} |S_n(f_s,x)-f_s(x)|\,dx < \frac{s}{n}. \tag{5.9}$$

而当$s \geqslant \frac{1}{n}$时，有

$$\begin{aligned} |S_n(f_s,x)-f_s(x)| &= \left|\sum_{k \leqslant [ns]}\left(s-\frac{k}{n}\right) S_{nk}(x)\right| \\ &\leqslant x S_{n,[ns]}(x) \end{aligned}$$

所以

$$\int_s^{+\infty} |S_n(f_s,x)-f_s(x)|\,dx \leqslant \int_s^{+\infty} x S_{n,[ns]}(x)\,dx \leqslant \frac{2s}{n} \tag{5.10}$$

因而由（5.9）、（5.9）和（5.10）导出

$$\int_0^{+\infty} |S_n(f_s,x)-f(x)|\,dx = \left(\int_0^s + \int_s^{+\infty}\right)|S_n(f_s,x)-f_s(x)|\,dx \leqslant \frac{5s}{n}.$$

即（5.6）得证。

最后，当$ns \leqslant 1$时，有

$$S_n^*(f_s,x)-S_n(f_s,x)=\left(\frac{ns^2}{2}-s\right)S_{n0}(x)$$

故得

$$\int_0^{+\infty} |S_n^*(f_s,x)-S_n(f_s,x)|\,dx = \frac{s}{n}\left|\frac{ns}{2}-s\right| \leqslant \frac{2s}{n}. \tag{5.11}$$

而当$ns \geqslant 1$时，则有

$$S_n^*(f_s,x)-S_n(f,x)=\sum_{k\leqslant[ns]-1}\left\{\left(n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}(s-t)_+\,dt-\left(s-\frac{k}{n}\right)\right)S_{nk}(x)\right.$$

$$\left.+\left(n\int_{\frac{[ns]}{n}}^{s}(s-t)\,dt-\left(s-\frac{[ns]}{n}\right)\right)S_{n,[ns]}(x)\right\}\overset{(记)}{=\!=}I_1+I_2$$

由于

$$n\int_{\frac{[ns]}{n}}^{s}(s-t)\,dt=\frac{n}{2}\left(s-\frac{[ns]}{n}\right)^2=\frac{1}{2n}(ns-[ns])^2$$

所以

$$|I_2|=\left|n\int_{\frac{[ns]}{n}}^{s}(s-t)\,dt-\left(s-\frac{[ns]}{n}\right)\right|S_{n,[ns]}(x)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2n}(ns-[ns])^2+\frac{1}{n}(ns-[ns])\right)S_{n,[ns]}(x)$$

$$\leqslant\frac{3}{2n}S_{n,[ns]}(x).$$

又

$$I_1=\sum_{k\leqslant[ns]-1}\left(n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}(s-t)\,dt-\left(s-\frac{k}{n}\right)\right)S_{nk}(x)$$

$$=\sum_{k\leqslant[ns]-1}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k}{n}-t\right)dt\,S_{nk}(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k\leqslant[ns]-1}S_{nk}(x)$$

所以当$ns\geqslant1$时有

$$\int_0^{+\infty}|S_n^*(f_s,x)-S_n(f_s,x)|\,dx\leqslant\frac{3}{2n}\int_0^{\infty}S_{n,[ns]}(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{k\leqslant[ns]-1}\int_0^{\infty}S_{nk}(x)\,dx$$

$$\leqslant\frac{3}{2n^2}+\frac{1}{2n^2}[ns]\leqslant\frac{s}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2ns}\right)\leqslant\frac{2s}{n}\qquad(5.12)$$

因此由（5.11），（5.12）导出（5.7）。证毕.

明显地，由（5.6）—（5.7）导出：对$s\geqslant0$和$n\geqslant1$有

$$\int_0^{+\infty} |S_n^*(f_s,x)-f_s(x)|\,dx$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} |S_n^*(f_s,x)-S_n(f_s,x)|\,dx+\int_0^{+\infty} |S_n(f_s,x)-f_s(x)|\,dx$$

$$<\frac{7s}{n} \tag{5.13}$$

命题2 对$s\geqslant 0, n\geqslant 1$有

$$\|xS_n^{*\prime\prime}(f_s)\|_{L(0,\infty)}\leqslant\frac{\max(2s,\frac{1}{2})}{n} \tag{5.14}$$

证明 由于

$$S_n^{*\prime\prime}(f_s,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}(s-u)_+du\right)S_{nk}''(x)$$

若$ns<1$，则有

$$S_n^{*\prime\prime}(f_s,x)=n\int_0^s(s-u)\,duS_{n0}''(x)$$

$$=s^2\frac{n^3}{2}e^{-nx}$$

故得

$$\|xS_n^{*\prime\prime}(f_s)\|_{L_1}=\int_0^{\infty}|xS_n^{*\prime\prime}(f_s,x)|\,dx$$

$$=\frac{s^2n^3}{2}\int_0^{\infty}xe^{-nx}dx=\frac{ns^2}{2}<\frac{1}{2n} \tag{5.15}$$

若$ns\geqslant 1$时，则有

$$S_n^{*\prime\prime}(f_s,x)=n^2\sum_{k=0}^{\infty}S_{nk}(x)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left((s-u)_+-2(s-u-\frac{1}{n})_++(s-u-\frac{2}{n})_+\right)du$$

由于仅当$[ns]-2\leqslant k<ns$有

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left((s-u)_+-2\left(s-u-\frac{1}{n}\right)_++\left(s-u-\frac{2}{n}\right)_+\right)du\neq 0$$

且有

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left((s-u)_+-2\left(s-u-\frac{1}{n}\right)_++\left(s-u-\frac{2}{n}\right)_+\right)du$$

$$\leqslant\begin{cases}\frac{1}{2n^2}, & k=[ns]-2\\ \frac{1}{n^2}, & k=[ns]-1\\ \frac{1}{2n^2}, & k=[ns]\end{cases}$$

所以有

$$S_n^{*''}(f_s,x)\leqslant\frac{S_{n,[ns]-2}(x)}{2}+S_{n,[ns]-1}(x)+\frac{S_{n,[ns]}(x)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-nx}\left(\frac{(nx)^{[ns]-2}}{([ns]-2)!}+2\frac{(nx)^{[ns]-1}}{([ns]-1)!}+\frac{(ns)^{[ns]}}{[ns]!}\right)$$

因此当$sn\geqslant1$时，有

$$\|xS_n^{*''}(f_s)\|_{L_1}=\int_0^{\infty}x\,|S_n^{*''}(f_s,x)|\,dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2n^2}\int_0^{+\infty}te^{-t}\left(\frac{t^{[ns]-2}}{([ns]-2)!}+2\frac{t^{[ns]-1}}{([ns]-1)!}+\frac{t^{[ns]}}{[ns]!}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2n^2}\left([ns]-1+2[ns]+[ns]+1\right)=\frac{4(ns)}{2n^2}<\frac{2s}{n}$$

综合（5.15）和（5.16）得到

$$\|xS_n^{*''}(f_s)\|_{L_1}\leqslant\frac{1}{n}\max\left(2s,\frac{1}{2}\right)$$

（5.14）得证。

命题3 对每个$g\in U_C$有

$$\|S_n(g)-g\|_C\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+e^{-1}\right)\|g\|_{U_C}\tag{5.17}$$

而对每个$g\in U_L$有

$$\|S_n^*(g)-g\|_L\leqslant\frac{7}{n}\|g\|_{U_L}\tag{5.18}$$

证明 由于$g\in U_C$，所以对$\forall t,x\geqslant0$有

$$g(t)-g(x)=(t-x)g'(x)+\int_x^t\left(\int_x^\tau g''(u)\,du\right)d\tau$$

所以

$$|S_n(g,x)-g(x)|\leqslant\|g\|\sum_{k=0}^{\infty}\left|\int_x^{\frac{k}{n}}\int_x^\tau\frac{du}{u}\,d\tau\right|S_{nk}(x)$$

由于，当$k=0$时，有

$$\left|\int_0^x\int_0^x\frac{du}{u}\,d\tau\right|=\left|\int_0^x(\ln x-\ln\tau)\,d\tau\right|=|x|,$$

而当$k\geq 1$时，若$0<x<\frac{k}{n}$，则有

$$\left|\int_x^{\frac{k}{n}}\int_x^{\tau}\frac{du}{u}d\tau\right|\leq\frac{1}{x}\int_x^{\frac{k}{n}}(\tau-x)\,d\tau=\frac{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}{2x},$$

若$\frac{k}{n}\leq x$，则有

$$\left|\int_x^{\frac{k}{n}}\int_x^{\tau}\frac{du}{u}d\tau\right|\leq\frac{k}{n}\int_{\frac{k}{n}}^{x}(x-\tau)\,d\tau=\frac{n\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}{2k}$$

所以得到

$$|S_n(g,x)-g(x)|\leq|g|_{U_0}\Bigg(xS_{n0}(x)+\frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{\overline{\quad}}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2S_{nk}(x)+$$

$$+\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2S_{nk}(x)\Bigg)$$

由计算得到

$$\sum_{k=1}^{\overline{\quad}}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2S_{nk}(x)=\frac{x}{n}-x^2e^{-nx},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2S_{nk}(x)=\frac{x}{n}-\frac{x}{n}(1-e^{-nx})$$

所以对$x\geq 0$有

$$|S_n(g,x)-g(x)|\leq|g|_{U_0}\left(\frac{1}{2n}+xe^{-nx}\right)$$

$$=\frac{1}{n}|g|_{U_0}\left(\frac{1}{2}+nxe^{-nx}\right)$$

$$\leq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+e^{-1}\right)|g|_{U_0}$$

其中利用不等式$xe^{-x}\leq e^{-1}$（$x\geq 0$），所以（5.17）得证。

其次，对$g\in U_L$，有

$$g(x)=\int_0^{\infty}(u-x)_+g''(u)\,du$$

所以

$$\|S_n^*(g)-g\|_{L_1}\leq\int_0^{\infty}\|S_n^*(f_u)-f_u\|_{L_1}|g''(u)|\,du$$

由（5.13）得到

$$\|S_n^*(g)-g\|_{L_1}\leqslant\frac{7}{n}\int_0^{+\infty}u|g''(u)|\,du=\frac{7}{n}\|g\|_{U_L}$$

故（5.18）得证。

命题4 对每个$f\in C[0,\infty)$有

$$\|S_n(f)\|_{U_c}\leqslant 2n\|f\|_C \tag{5.19}$$

而对每个$f\in L_1(0,\infty)$有

$$\|S_n^*(f)\|_{U_L}\leqslant 2n\|f\|_{L_1} \tag{5.20}$$

证明 由于对$f\in C[0,\infty)$有

$$S_n''(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)S_{nk}''(x)$$

$$=\frac{n^2}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)^2-\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{k}{n}\right)S_{nk}(x)$$

所以

$$\|xS_n''(f)\|_C\leqslant n^2\|f\|_C\sup_{x>0}\left(\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\frac{k}{n^2}\right)S_{nk}(x)$$

$$=n^2\|f\|_C\sup_{x>0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{n}\right)=2n\|f\|_C$$

即（5.23）得证。

其次，对$f\in L_1(0,\infty)$，有

$$S_n^{*''}(f,x)=\frac{n^2}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)dt\right)\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\frac{k}{n}\right)S_{nk}(x)$$

所以有

$$\|xS_n^{*''}(f)\|_{L_1}\leqslant n^3\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(t)|\,dt\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+\frac{k}{n^2}\right)\frac{S_{nk}(x)}{x}dx$$

$$=2n\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(t)|\,dt=2n\|f\|_{L_1}$$

即（5.24）得证。

命题5 若$g\in U_C$，则有

$$\|S_n(g)\|_{U_c}\leqslant(1+2e^{-\frac{3}{2}})\|g\|_{U_c} \tag{5.21}$$

若$g\in U_L$，则有

$$\|S_n^*(g)\|_{U_L}\leqslant 2\|g\|_{U_L} \tag{5.22}$$

证明　由于

$$S_n''(g,x)=n^2\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_{\frac{1}{n}}^2\left(g,\frac{k}{n}\right)S_{nk}(x)$$

又因为$g\in U_C$，故有

$$\left|\Delta_{\frac{1}{n}}^2\left(g,\frac{k}{n}\right)\right|=\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}g''\left(\frac{k}{n}+\tau+u\right)dud\tau\right|$$

$$\leqslant\|xg''\|_C\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{dud\tau}{\frac{k}{n}+u+\tau}\right|$$

$$\leqslant\|xg''\|_C\begin{cases}2\dfrac{\ln 2}{n}, & k=0\\ \dfrac{1}{kn}, & k>0\end{cases}$$

所以对$x>0$有

$$|S_n''(g,x)|\leqslant\|xg''\|_C n\left(2\ln 2e^{-nx}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{nk}(x)}{k}\right)$$

$$\leqslant\|xg''\|_C\left(2e^{-nx}+\frac{1}{nx}(1-e^{-nx})\right)$$

故得

$$\|xS_n''(g)\|_C\leqslant\|xg''\|_C\sup_{t\geqslant 0}(2te^{-t}+1-e^{-t})$$

$$\leqslant\left(1+2e^{-\frac{3}{2}}\right)\|xg''\|_C$$

即（5.21）证得.

其次，对$g\in U_L$，由于

$$g(x)=\int_0^{\infty}(u-x)_+g''(u)du$$

所以

$$S_n^{*''}(g,x)=\int_0^{\infty}S_n^{*''}(f_u,x)g''(u)du$$

由（5.14）导出

$$\|xS_n^{*''}(g)\|_{L_1}\leqslant\int_0^{\infty}\|xS_n^{*''}(f_u)\|_{L_1}|g''(u)|du$$

$$\leqslant 2\int_0^{\infty}u|g''(u)|du=2\|xg''\|_{L_1}$$

因此（5.22）得证。

根据定理3.18，由（5.17），（5.19），（5.21）和（5.18），（5.20），（5.22）得到如下结论

系1 对$f\in C[0,\infty)$和$\omega\in\Phi_a(0<\alpha<1)$，则如下命题是等价的：

i) $f\in C_\omega$，

ii) $\|S_n(f)-f\|_C=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

特别地有

$$f\in C_\alpha \Longleftrightarrow \|S_n(f)-f\|_C=O(n^{-\alpha}).$$

系2 对$f\in L_1(0,\infty)$和$\omega\in\Phi_a(0<\alpha<1)$，则如下命题是等价的：

i) $f\in L_{1,\omega}$，

ii) $\|S_n^*(f)-f\|_{L_1}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

特别地有

$$f\in L_{1,\alpha} \Longleftrightarrow \|S_n^*(f)-f\|_{L_1}=O(n^{-\alpha}).$$

5.2. L_p空间的逼近等价定理

设$D=(a,b)$代表区间$I=[0,1]$，$R_+=[0,\infty)$或$R=(-\infty,+\infty)$，$\varphi\in C^2(a,b)$是非负权函数且适合第二章§1.5中列举的条件，令

$$U_p=\{g\,|\,g\in L_p(D)\text{ 且}\varphi^2g''\in L_p(D)\}$$

并规定半范$|g|_{U_p}=\|\varphi^2g''\|_p$（$1\leqslant p<+\infty$），则对$t>0$

$$K_\varphi(f,t)_p=\inf_{g\in U_p}\{\|f-g\|_p+t^2|g|_{U_p}\}$$

为$L_p(D)$上的K－泛函。

又设$\omega(t)$是$t>0$的单调增加函数且$\omega(0)=0$，若对某个$\alpha\in(0,1]$，存在常数$C_\alpha>0$使得对$0<t_1<t_2$有

$$\frac{\omega(t_1)}{t_1^\alpha}\leqslant C_\alpha\frac{\omega(t_2)}{t_2^\alpha} \tag{5.23}$$

则记$\omega\in\psi_\alpha$，例如$\omega(t)=t^\alpha\in\psi_\alpha$（$0<\alpha\leqslant1$）。

若$\omega\in\psi_\alpha$（$0<\alpha\leqslant1$），记

$$L_{p,\omega}=\{f\,|\,f\in L_p(D)\text{且}K_\varphi(f,t)_p=O(\omega(t^2)),\ t\to0^+\}$$

由于假定$\lim\limits_{t\to0}\frac{\omega(t)}{t}=+\infty$，所以有

$$U_p\subset L_{p,\omega}\subset L_p(D).$$

即$L_{p,\omega}$是$L_p(D)$的插补空间。特别地，若$\omega(t)=t^\alpha$，则用$L_{p,\alpha}$表示。

对每个$f\in L_p(D)$，令

$$V_\varphi(f,t)_p = \sup_{0<h\leqslant t} \|\Delta^2_{h\varphi}(f)\|_{L_p((C_1h)^*,(C_1h)^{**})}$$

（参见第二章§1.5），特别地，若存在$K>0$使得对$\forall x\in[h^*,h^{**}]$有$1+h\varphi'(x)\geqslant K$，则有

$$V_\varphi(f,t)_p = \sup_{0<h\leqslant t} \|\Delta^2_{h\varphi}(f)\|_{L_p[h^*,h^{**}]} \tag{5.24}$$

根据定理2.9对充分小的$t>0$有

$$\frac{1}{K}V_\varphi(f,t)_p \leqslant K_\varphi(f,t)_p \leqslant K\int_0^t \frac{V_\varphi(f,\tau)_p}{\tau}d\tau$$

明显地，若$\omega\in\psi_\alpha$（$0<\alpha\leqslant 1$），则对$0<\tau<t$有

$$\frac{\omega(\tau^2)}{\tau} \leqslant C_\alpha \frac{\omega(t^2)}{t^{2\alpha}}\tau^{2\alpha-1}$$

因此若$V_\varphi(f,\tau)_p = O(\omega(\tau^2))$（$\tau\to 0^+$），则当$t\to 0^+$时有

$$\int_0^t \frac{V_\varphi(f,\tau)_p}{\tau}d\tau = O(\omega(t^2))$$

于是得到

$$f\in L_{p,\omega} \Longleftrightarrow V_\varphi(f,t)_p = O(\omega(t^2)) \qquad (t\to 0_+)$$

现在对$g\in U_p$，令

$$\|g\|_{U_{p,2}} = \|\varphi^2 g''\|_p + \|g\|_p$$

则对$t>0$，

$$\widetilde{K}_\varphi(f,t)_p = \inf_{g\in U_p}\{\|f-g\|_p + t^2\|g\|_{U_{p,2}}\}$$

也是$L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）上的K－泛函，且有

$$\widetilde{K}_\varphi(f,t)_p \asymp \min(1,t^2)\|f\|_p + K_\varphi(f,t)_p$$

由于$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\omega(t)}{t}=+\infty$，所以当$t\to 0^+$时，有

$$\widetilde{K}_\varphi(f,t)_p = O(\omega(t^2)) \Longleftrightarrow K_\varphi(f,t)_p = O(\omega(t^2))$$

由定理3.18直接导出如下逼近等价定理

定理3.19 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）到自身内一致有界线性算子列，且适合以下条件：

I) 对每个$g\in U_p$有

$$\|L_n(g)-g\|_p \leqslant M_1\phi_n\|g\|_{U_{p,2}} \tag{5.25}$$

和

$$\|L_n(g)\|_{U_{p,2}} \leqslant M_2\|g\|_{U_{p,2}} \tag{5.26}$$

II) 对每个$f\in L_p(D)$，有

$$\|L_n(f)\|_{U_{p,2}} \leqslant M_2\phi_n^{-1}\|f\|_p \tag{5.27}$$

其中$\phi_n \to 0$（$n\to+\infty$）且适合条件（5.4），则对每个$f\in L_p(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）和$\omega\in\psi_\alpha$（$0<\alpha<1$），如下命题是等价的：

i) $f\in L_{p,\omega}$

ii) $V_p(f,t)_p=O(\omega(t^2))$　　$(t\to0^+)$

iii) $\|L_n(f)-f\|_p=O(\omega(\phi_n))$　　$(n\to+\infty)$

特别地有

推论3.6　在定理3.19条件下，对每个$f\in L_p(D)$和$0<\alpha<1$如下等价关系成立，

$$\|L_n(f)-f\|_p=O(\phi_n^\alpha)\qquad(n\to+\infty)$$

$\Longleftrightarrow$对$h>0$有

$$\|\Delta_h^2{}_\varphi(f)\|L_p((C_1h)^\alpha,(C_1h)^{\alpha\alpha})=O(h^{2\alpha})$$

现在利用修正光滑模$\omega_\varphi(f,t)_p$（参见第二章§1.5）可以建立具有量化形式的逼近等价关系：

定理3.20　在定理3.19条件下，记$E_n(f)=\|L_n(f)-f\|_p$，则有

i) $$E_n(f)\leqslant K_p\left(\omega_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})_p+\frac{1}{n}\|f\|_p\right) \tag{5.28}$$

其中K_p是依赖于p的正数

ii) 对$r>0$有

$$\omega_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})_p\leqslant K_{p,r}\left(n^{r-1}\sum_{k=1}^{n}k^{-r}E_k(f)+n^{r-1}\|f\|_p\right) \tag{5.29}$$

其中$K_{p,r}$是正常数.

证明　i) 对$\forall g\in U_p$，由（5.29）（其中$\phi_n=n^{-1}$）导出

$$\begin{aligned}E_n(f)&=\|L_n(f)-f\|_p\\&\leqslant\|L_n(f-g)-(f-g)\|_p+\|L_n(g)-g\|_p\\&\leqslant K\left(\|f-g\|_p+\frac{1}{n}\|g\|_{U_{p,2}}\right)\end{aligned}$$

因此有

$$E_n(f)\leqslant K\widetilde{K}_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})_p$$

由定理2.8和推论2.2导出，

$$\begin{aligned}E_n(f)&\leqslant K\left(K_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})_p+\frac{1}{n}\|f\|_p\right)\\&\leqslant K_p\left(\omega_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})_p+\frac{1}{n}\|f\|_p\right)\end{aligned}$$

所以（5.28）得证.

ii) 由条件（5.26）对$g\in U_p$有

$$\|L_n(g)\|_{U_{p,s}} \leq M_2 \|g\|_{U_{p,s}}$$

记 $M=M_1^{\frac{1}{r}}$（$r>0$），对 $n\in N$ 令 $i_n=\min\left\{i \,\Big|\, \frac{n}{M^{i+1}}<1\right\}$，又对 $i=0,1,2,\cdots i_n$，记

$$E_{k_i}(f)=\min_{\frac{n}{M^{i+1}}<k<\frac{n}{M^i}}\{E_k(f)\},\tag{5.30}$$

则有 $k_i=k_{i,n}\in N$ 且

$$\frac{n}{M^{i+1}}<k_i\leq\frac{n}{M^i}.\tag{5.31}$$

由定理2.8和条件（5.26），（5.27）（其中 $\phi_n=n^{-1}$）导出

$$\frac{1}{K}\omega_\varphi\left(f,n^{-\frac{1}{r}}\right)_p\leq\omega_\varphi\left(f,n^{-\frac{1}{r}}\right)_p$$

$$\leq\|f-L_{k_0}(f)\|_p+\frac{1}{n}\|L_{k_0}(f)\|_{U_{p,s}}$$

$$\leq E_{k_0}(f)+\frac{1}{n}\|L_{k_0}(f-L_{k_1}(f))\|_{U_{p,s}}+\frac{1}{n}\|L_{k_0}(f))\|_{U_{p,s}}$$

$$\leq E_{k_0}(f)+\frac{1}{n}M_1k_0\|f-L_{k_1}(f)\|_p+M_2\frac{1}{n}\|L_{k_1}(f)\|_{U_{p,s}}$$

重复应用上述方法导出。

$$\frac{1}{K}\omega_\varphi\left(f,n^{-\frac{1}{r}}\right)_p\leq E_{k_0}(f)+K_1\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i_n-1}M_2^ik_iE_{k_{i+1}}(f)+M_2^{i_n}\frac{1}{n}\|L_{k_{i_n}}(f)\|_{U_{p,s}}$$

其中 $K_1=MM_1>0$，又由条件（5.31），（5.35）和 $\frac{n}{M^{i_n+1}}<1$ 导出

$$\|L_{k_{i_n}}(f)\|_{U_{p,s}}\leq M_1k_{i_n}\|f\|_p\leq M_1\frac{n}{M^{i_n}}\|f\|_p$$

$$\leq MM_1\frac{n}{M^{i_n+1}}\cdot\|f\|_p\leq K_1\|f\|_p$$

又注意到

$$k_i\leq\frac{n}{M^i},\qquad M_2^i=M^{ri}$$

我们有

$$\frac{1}{K}\omega_\varphi\left(f,n^{-\frac{1}{r}}\right)_p\leq E_{k_0}(f)+$$

$$+K_1\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i_n-1}\frac{n}{M^i}M_2^iE_{k_{i+1}}(f)+K_1\frac{1}{n}M_2^{i_n}\|f\|_p$$

$$\leq E_{k_0}(f)+K_1M\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i_n-1}\left(\frac{n}{k_i}\right)^r\frac{n}{M^{i+1}}E_{k_{i+1}}(f)+K_1\frac{1}{n}M^{ri_n}\|f\|_p$$

$$\leq E_{k_0}(f)+K_2\sum_{i=0}^{i_n-1}\left(\frac{n}{k_i}\right)^r\frac{n}{M^{i+1}}E_{k_{i+1}}(f)+K_2n^{r-1}\|f\|_p\tag{5.23}$$

其中利用了如下不等式

$$M_{1}^{i}=M^{ir}\leqslant\left(\frac{n}{k_{i}}\right)^{r},\ M^{i_{0}}\leqslant n.$$

另一方面，由于

$$K_{3}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^{r}E_{k}(f)$$

$$=K_{2}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i_{0}-1}\sum_{\frac{n}{M^{i+1}}\leqslant k<\frac{n}{M^{i+1}}}\left(\frac{n}{k}\right)^{r}E_{k}(f)+K_{2}\frac{1}{n}\sum_{\frac{n}{M}\leqslant k<n}\left(\frac{n}{k}\right)^{r}E_{k}(f)$$

$$\geqslant K_{3}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i_{0}-1}\left(\frac{n}{k_{i}}\right)^{r}\frac{n}{M^{i+1}}E_{k_{i+1}}(f)+\frac{K_{2}}{M^{r}}E_{k_{0}}(f)$$

$$\geqslant K_{4}\left(K_{3}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i_{0}-1}\left(\frac{n}{k_{i}}\right)^{r}E_{k_{i+1}}(f)+E_{k_{0}}(f)\right)$$

其中K_{3}、K_{4}是正常数，因此由（5.32）导出：

$$\frac{1}{K}\omega_{r}(f,n^{-\frac{1}{2}})_{p}\leqslant\frac{K_{3}}{K_{4}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^{r}E_{k}(f)+K_{2}n^{r-1}\|f\|,$$

因而存在正常数 K_{p}，使得

$$\omega_{r}(f,n^{-\frac{1}{2}})_{p}\leqslant K_{p}\left(n^{r-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{r}E_{k}(f)+n^{r-1}\|f\|_{p}\right),$$

即（5.29）得证。

特别地，若$\omega(t)\in\Phi_{\alpha}$（$0<\alpha<1$），则有

推论3.7 在定理3.20条件下，则对$\omega\in\Phi_{\alpha}$（$0<\alpha<1$）和$f\in L_{p}(D)$（$1\leqslant p<+\infty$）如下等价关系成立。

$$\|L_{n}(f)-f\|_{p}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\Longleftrightarrow\omega_{r}\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{p}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

证明 $\Longleftarrow$ 设$\omega_{r}\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{p}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$，由于$\lim\limits_{t\to0^{+}}\frac{\omega(t)}{t}=+\infty$，所以由估计式（5.28）导出

$$\|L_{n}(f)-f\|_{p}=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

$\Longrightarrow$）由于$\omega\in\Phi_{\alpha}$（$0<\alpha<1$），取$0<r<1$使得$\alpha+r<1$利用Bari-Steckin 渐 近 估计定理有

$$\sum_{k=1}^{n}k^{-r}\omega\left(\frac{1}{k}\right)=O\left(n^{1-r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\tag{5.33}$$

且有

$$\omega(1) \leqslant C_r \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^r} = C_r n^r \omega\left(\frac{1}{n}\right) < C_r n^{1-r} \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此有

$$n^{r-1} = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{5.34}$$

所以，由$E_n(f) = \|L_n(f) - f\|_p = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$和（5.29），（5.33）及（5.34）导出

$$\omega_\varphi\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p \leqslant K_{p,r}\left(n^{r-1} \sum_{k=1}^{n} k^{-r} \omega\left(\frac{1}{n}\right) + n^{r-1}\|f\|_p\right)$$

$$= O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

证毕。

由定理3.20知道，由

$$\omega_\varphi\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p = O(n^{-\alpha}) \qquad (n \to \infty)$$

可推出

$$\omega_\varphi(f, t)_p = O(t^{2\alpha}) \qquad (t \to 0^+)$$

因而有

推论3.8 在定理3.20条件下，对$f \in L_p(D)$（$1 \leqslant p < +\infty$）和$0 < \alpha < 1$，如下命题是等价的。

i) $\|L_n(f) - f\|_p = O(n^{-\alpha})$，

ii) 对$h > 0$有

$$\|\Delta^2_{h\varphi}(f)\|_{L_p((c_1 h)^*, (c_1 h)^{**})} = O(h^{2\alpha}),$$

iii) 对$t > 0$有

$$\omega_\varphi(f, t)_p = O(t^{2\alpha}); \quad (t \to 0^+).$$

5·3 L_p逼近等价定理的应用

现在利用§5.2建立的L_p逼近等价定理，讨论一些熟知的正线性算子列在L_p上的逼近定理。

例1 设$\{S_n\}_{n\in N}$是Sz'asz—Mirakjan算子列，而$\{S_n^*\}_{n\in N}$是Sz'asz—Kantorovich算子列，取$\varphi(x) = \sqrt{x}$，令

$$U_p = \{g \mid g \in L_p(0, \infty) \text{ 且 } \varphi^2 g'' \in L_p(0, \infty)\}.$$

对$g \in U_p$引入半范$\|g\|_{U_{p,\varphi}} = \|\varphi^2 g''\|_p + \|g\|_p$。又由$\varphi(x) = \sqrt{x}$，所以对$h > 0$有

$$h^* = h, \qquad h^{**} = +\infty$$

因此对$x \in [h^2, +\infty)$有$1 \pm h\varphi'(x) \geqslant \frac{1}{2}$，故有

$$V_p(f,t)_p=\sup_{0<h\leq t}\|\Delta_{h\varphi}^2(f)\|_{L_p[h^2,+\infty)}.$$

我们有

系1 设$\varphi(x)=\sqrt{x}$，$\omega\in\psi_\alpha$（$0<\alpha<1$），则对$f\in L_p(0,\infty)$（$1\leq p<+\infty$）如下命题是等价的：

i) $\|S_n^*(f)-f\|_p=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\qquad(n\to+\infty)$，

ii) $\|\Delta_{h\varphi}^2(f)\|_{L_p(h^2,\infty)}=O(\omega(h^2))\qquad(h\to0^+)$。

特别地，当$\omega(t)=t^\alpha$（$0<\alpha<1$）时，有

$$\|S_n^*(f)-f\|_p=O(n^{-\alpha})\Longleftrightarrow\|\Delta_{h\varphi}^2(f)\|_{L_p(h^2,\infty)}=O(h^{2\alpha}).$$

应用定理3.19我们只需证明如下命题：

命题1 对每个$f\in L_p[0,\infty)$有

$$\|S_n^*(f)\|_p\leq\|f\|_p\tag{5.35}$$

证明 因为

$$\int_0^\infty S_{nk}(x)dx=\frac{1}{n}$$

其中$S_{nk}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$，所以由Jensen不等式导出

$$\|S_n^*(f)\|_p\leq\left\{\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty n\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(u)|^pdu\right)S_{nk}(x)dx\right\}^{\frac{1}{p}}=\|f\|_p$$

即$\{S_n^*\}_{n\in N}$是一致有界的正线性算子列。

命题2 对每个$f\in L_p(0,\infty)$有

$$\|S_n^{*\prime}(f)\|_p\leq n\|f\|_p\tag{5.36}$$

$$\|\varphi^2S_n^{*\prime\prime}(f)\|_p\leq2n\|f\|_p\tag{5.37}$$

其中$\varphi(x)=\sqrt{x}$。

证明 记$F_{nk}=n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(u)du$，则有

$$S_n^{*\prime}(f,x)=n\sum_{k=0}^\infty(F_{n,k+1}-F_{n,k})S_{nk}(x),$$

$$xS_n^{*\prime\prime}(f,x)=\frac{n^2}{x}\sum_{k=0}^\infty F_{nk}\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)^2-\frac{k}{n^2}\right)S_{nk}(x).$$

于是有

$$|xS_n^{*''}(f,x)|\leq n\sum_{k=0}^{n}F_{nk}\frac{n}{x}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2S_{nk}(x)+n\sum_{k=1}^{\infty}F_{nk}S_{n,k-1}(x)$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n}{x}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2S_{nk}(x)=1$$

和

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{n}{x}-x\right)^2S_{nk}(x)dx=\int_0^{\infty}\left(k\frac{k}{nx}S_{nk}(x)-2kS_{nk}(x)+nxS_{nk}(x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\infty}(kS_{n,k-1}(x)-2kS_{nk}(x)+(k+1)S_{n,k+1}(x))dx=\frac{1}{n}.$$

因此由Jensen不等式导出

$$\|S_n^{*'}(f)\|_p\leq n\|f\|_p,\text{和}\|\varphi^2S_n^{*''}(f)\|_p\leq 2n\|f\|_p.$$

证毕。

由(5.35)和(5.37)导出，对每个$f\in L_p(0,\infty)$（$1\leq p<+\infty$）有

$$\|S_n^*(f)\|_{U_{p2}}=\|\varphi^2S_n^{*''}(f)\|_p+\|S_n(f)\|_p\leq 3n\|f\|_p \tag{5.38}$$

命题3 对每个$g\in U_p$有

$$\|S_n^*(g)\|_p\leq K\|g'\|_p \tag{5.39}$$

$$\|\varphi^2S_n^{*''}(g)\|_p\leq K\|\varphi^2g''\|_p \tag{5.40}$$

其中K为正常数。

证明 由于

$$n|F_{n,k+1}-F_{n,k}|=n^2\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}g'\left(\frac{k}{n}+\tau+u\right)dud\tau\right|$$

$$\leq n\int_0^{\frac{1}{n}}M\left(g',\frac{k}{n}+\tau\right)d\tau$$

其中$M\left(g',\frac{k}{n}+\tau\right)$是$g'$的Hardy—Littlewood极大函数，因此有

$$|S_n^{*'}(g,x)|=\left|n\sum_{k=0}^{\infty}(F_{n,k+1}-F_{nk})S_{nk}(x)\right|$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left(n\int_0^{\frac{1}{n}}M\left(g',\frac{k}{n}+\tau\right)d\tau\right)S_{nk}(x)=S_n^*(M(g'),x)$$

于是由Hardy不等式，对$1<p<+\infty$有

$$\|S_n^{*\prime}(g)\|_p \leqslant \|S_n^*(M(g'))\|_p \leqslant \|M(g')\|_p \leqslant K_p\|g'\|_p$$

其中K_p是仅依赖于p的正数，而当p=1时有

$$\|S_n^{*\prime}(g)\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} n\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|g'\left(\frac{k}{n}+\tau+u\right)\right|dud\tau$$

$$= n\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{n}+\tau}^{\frac{k+1}{n}+\tau}|g'(t)|\,dt\right)d\tau$$

$$= n\int_0^{\frac{1}{n}}\int_{\tau}^{\infty}|g'(t)|\,dt\,d\tau \leqslant \|g'\|_1$$

因此(5.39)得证，类似地，利用

$$xS_n^{*\prime\prime}(g,x) = n^2x\sum_{k=0}^{\infty}(F_{n,k+2}-2F_{n,k+1}+F_{nk})S_{nk}(x)$$

和

$$F_{n,k+2}-2F_{n,k+1}+F_{nk} = \left|n\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}g''\left(\frac{k}{n}+\tau+u+v\right)dudv\right)d\tau\right|$$

$$\leqslant \frac{n}{k}n\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\left(\frac{k}{n}+\tau+u+v\right)g''\left(\frac{k}{n}+\tau+u+v\right)\right|dudv\,d\tau$$

$$\leqslant 2\frac{1}{(k+1)n}n\int_0^{\frac{1}{n}}M\left(tg''(t),\frac{k}{n}+\tau\right)d\tau \qquad (k=1,2,\cdots).$$

此外，注意到恒等式

$$\frac{nx}{k+1}S_{nk}(x) = S_{n,k+1}(x)$$

因此有

$$xS_n^{*\prime\prime}(g,x) = n^2x\sum_{k=0}^{\infty}(F_{n,k+2}-2F_{n,k+1}+F_{nk})S_{nk}(x)$$

$$= n^2x\sum_{k=1}^{\infty}n\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}g''\left(\frac{k}{n}+\tau+u+v\right)dudv\right)d\tau S_{nk}(x)+$$

$$+n^2(F_{n0}-2F_{n1}+F_{n2})xe^{-nx} \qquad (5.41)$$

所以当p>1时有

$$\|\varphi^2S_n^{*\prime\prime}(g)\|_p \leqslant \|M(\varphi^2g'')\|_p + \|n^2(F_{n0}-2F_{n1}+F_{n2})xe^{-nx}\|_p$$

$$\leqslant K\left(\|\varphi^2 g''\|_p + n^{2-\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}|g''(\tau+u+v)|\,d\tau du dv\right)$$

$$= K\left(\|\varphi^2 g''\|_p + n^{2-\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{3}{n}} x^2 |g''(x)|\,dx\right)$$

$$\leqslant K\|\varphi^2 g''\|_p\left(1+n^{2-\frac{1}{p}}n^{-1-\frac{1}{p}}\right)\leqslant K_p\|\varphi^2 g''\|_{p}, \qquad \left(q=\frac{p}{p-1}\right)$$

而当$p=1$时，由（5.41）直接估计可得

$$\|\varphi^2 S_n^{*\prime\prime}(g)\|_1 \leqslant K_1\|\varphi^2 g''\|_1$$

于是（5.40）得证。

命题4　对每个$g\in U_p$（$1<p<+\infty$）有

$$\|g'\|_p \leqslant K(\|\varphi^2 g''\|_p + \|g\|_p) = K\|g\|_{U_p} \tag{5.42}$$

其中$\varphi(x)=\sqrt{x}$

证明　设$\psi\in C^2(0,\infty)$，$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1$且

$$\psi(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 1\\ 0 & x\geqslant 2\end{cases}$$

由导数插补不等式（或Stein不等式）有

$$\|g'\|_p \leqslant K\sqrt{\|g\|_p\|g''\|_p} \leqslant K(\|g\|_p + \|g''\|_p)$$

所以

$$\|g'\|_{L_p[\frac{1}{4},\infty)} \leqslant K\left(\|g\|_p + \|g''\|_{L_p(\frac{1}{8},\infty)}\right)$$
$$\leqslant K\left(\|g\|_p + \|\varphi^2 g''\|_{L_p(\frac{1}{8},\infty)}\right) \leqslant K\|g\|_{U_p} \tag{5.43}$$

记　$g_1(x)=g(x)\psi(4x)$，则$\mathrm{Supp}\,g_1\subset[0,\frac{1}{2})$，对$\forall h\in L_q(0,\infty)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

且 Supp $h\subset(0,\frac{1}{2})$内，由分部积分得到

$$\left|\int_0^{+\infty} g_1'(x)h(x)dx\right| = \left|\int_0^{+\infty} g_1''(x)\left(\int_0^x h(\tau)d\tau\right)dx\right|$$

$$\leqslant \|\varphi^2 g_1''\|_p \left\|\frac{1}{\varphi^2(\cdot)}\int_0^{\cdot} h(z)dz\right\|_q$$

$$\leqslant K_q\|\varphi^2 g_1''\|_p\|h\|_q \tag{5.44}$$

其中应用了 Hardy 极大不等式，因为$h\in L_q(0,\infty)$是任意的，所以由（5.48）导出

$$\|g_1'\|_p \leqslant K\|\varphi^2 g_1''\|_p \leqslant K\|\varphi^2 g''\|_{L_p[0,\frac{1}{2})} +$$

$$+\|\psi''\|\|g\|_{L_p(\frac{1}{2},\infty)}+2\|\psi'\|\|g'\|_{L_p(\frac{1}{2},\infty)}+\|\varphi^2 g\|_{L_p(\frac{1}{2},\infty)}$$

因此由（5，47）得到

$$\|g\|_p\leqslant K\|g\|_{U_{p2}}$$

从而得到（5，42）、证毕。

命题6 对每个$g\in U_p(1\leqslant p<+\infty)$有

$$\|S_n^*(g)-S_n(g)\|_p\leqslant\frac{K}{n}\|g\|_{U_{p2}},\tag{5，45}$$

和

$$\|S_n(g)-g\|_p\leqslant\frac{K}{n}\|g\|_{U_{p2}}.$$

证明 首先注意

$$S_n^*(g,x)-S_n(g,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}g(t)dt-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)S_{nk}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}n\int_0^{\frac{1}{n}}\left(g\left(t+\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)dt\,S_{nk}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}n\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^t g'\left(u+\frac{k}{n}\right)du\,dt\,S_{nk}(x)$$

故有

$$|S_n^*(g,x)-S_n(g,x)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}n\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^t\left|g'\left(u+\frac{k}{n}\right)\right|du\,dt\,S_{nk}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(n\int_0^{\frac{1}{n}}\left|g'\left(u+\frac{k}{n}\right)\right|du\int_u^{\frac{1}{n}}dt\right)S_{nk}(x)$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}n\int_0^{\frac{1}{n}}\left|g'\left(u+\frac{k}{n}\right)\right|du\,S_{nk}(x)$$

对$1\leqslant p<+\infty$，由 Jensen 不等式导出

$$\|S_n^*(g)-S_n(g)\|_p\leqslant\frac{1}{n}\left(\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}n\int_0^{\frac{1}{n}}\left|g'\left(u+\frac{k}{n}\right)\right|^p du\,S_{nk}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|g'\left(u+\frac{k}{n}\right)\right|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|g'(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{\|g'\|_p}{n}$$

利用（5.42）导出

$$\|S_n^*(g)-S_n(g)\|_p\leqslant\frac{K}{n}\|g\|_{U_{p2}}.$$

其次，对$g\in U_p$（$1\leqslant p<+\infty$），由 Taylor 展开有

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+\frac{1}{2}\int_0^{t-x}\frac{t-x-\tau}{x+\tau}(x+\tau)g''(x+\tau)d\tau$$

由于对$\tau\in(0,t-x)$，$t,x\in(0,\infty)$，有$\left|\frac{t-x-\tau}{x+\tau}\right|\leqslant\frac{|t-x|}{x}$和$S_n(t-x,x)=0$，导出

$$|S_n(g,x)-g(x)|\leqslant\frac{1}{2}S_n\left(\frac{|t-x|}{x}\left|\int_0^{t-x}(x+\tau)g''(x+\tau)d\tau\right|,x\right).$$

当$p=1$时，利用极大函数$M(\cdot)$和 Hardy 极大不等式得到，

$$\|S_n(g)-g\|_p\leqslant\frac{1}{2}\left\|S_n\left(\frac{(t-\cdot)^2}{\varphi^2}M(\varphi^2g'',\cdot),\cdot\right)\right\|_p$$

$$=\frac{1}{2}\left\|M(\varphi^2g'',\cdot)\frac{1}{\varphi^2}S_n((t-\cdot)^2,\cdot)\right\|_p=\frac{1}{2n}\|M(\varphi^2g'',\cdot)\|_p$$

$$\leqslant\frac{K_p}{2n}\|\varphi g''\|_p\leqslant\frac{K}{n}\|g\|_{U_{p2}}.$$

而$p=1$有

$$\|S_n(g)-g\|_1\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{x}\left|\int_x^{\frac{k}{n}}u|g''(u)|du\right|S_{n,k}(x)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{k}{n}}+\int_{\frac{k}{n}}^{\infty}\right)\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\int_x^{\frac{k}{n}}u|g''(u)|du\,S_{n,k}(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{k}{n}}u|g''(u)|du\left(\int_0^u\frac{\frac{k}{n}-x}{x}S_{n,k}(x)dx-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{\frac{k}{n}}^{\infty}u|g''(u)|du\right)\left(\int_u^{\infty}\frac{\frac{k}{n}-x}{x}S_{n,k}(x)dx\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}u|g''(u)|du\int_u^{\infty}S_{n,k}(x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{k}{n}}+\int_{\frac{k}{n}}^{\infty}\right)u|g''(u)|\left(\int_0^u \frac{\frac{k}{n}-x}{x}S_{nk}(x)dx\right)du \qquad (5.47)$$

其中最后一步利用如下事实：

$$\frac{k}{nx}S_{nk}(x)=S_{n,k-1}(x) \qquad (k\geq 1)$$

和

$$\int_0^\infty S_{nk}(x)dx=\frac{1}{n}。$$

由于 $\int_0^u \frac{\frac{k}{n}-x}{x}S_{nk}(x)dx$ 对 $u\leq\frac{k}{n}$ 是增加的，而对 $u\geq\frac{k}{n}$ 是减少的和 $\int_0^\infty \frac{\frac{k}{n}-x}{x}S_{nk}(x)dx=0$，所以有

$$\int_0^u \frac{\frac{k}{n}-x}{x}S_{nk}(x)dx\geq 0 \qquad (u>0)。$$

固定 u 使得对 $x<u$ 和充分大 k 有 $\frac{k}{n}-x\geq 0$，并注意到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{k}{n}-x}{x}S_{nk}(x)=S_{n0}(x)+S_n(t-x,x)=S_{n0}(x)$$

所以由（5.47）得到

$$\|S_n(g)-g\|_1\leq\frac{1}{2}\int_0^\infty u|g''(u)|\left(\int_u^\infty S_{n0}(x)dx\right)du+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty u|g''(u)|\int_0^u\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{k}{n}-x}{x}S_{nk}(x)\right)dx\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty u|g''(u)|\int_0^\infty S_{n0}(x)dx$$

$$=\frac{1}{2n}\int_0^\infty u|g''(u)|du=\frac{1}{2n}\|\varphi^2g''\|_1\leq\frac{K}{n}\|g\|_{U_{12}}$$

所以（5.46）得证。

命题6 对每个 $g\in U_p$（$1<p<+\infty$）有

$$\|S_n^*(g)-g\|_p\leq\frac{k}{n}\|g\|_{U_{p2}} \qquad (5.48)$$

证明 由（5.45）和（5.46）导出

$$\|S_n^*(g)-g\|_p \leqslant \|S_n^*(g)-S_n(g)\|_p+\|S_n(g)-g\|_p$$

$$\leqslant \frac{K}{n}\|g\|_{U_{p2}}.$$

证毕

由命题1－6可见，对算子列 $\left\{S_n^*\right\}_{n\in N}$ 和 $\phi_n=\frac{1}{n}$，定理3.19中的条件(5.25)－(5.27)全部适合，从而证得系1的断言。又由推论3.7导出

系2 对每个 $\omega\in\Phi_\alpha(0<\alpha<1)$ 和 $f\in L_p(0,\infty)(1\leqslant p<+\infty)$，如下命题是等价的

i) $\|S_n^*(f)-f\|_p=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ $\quad(n\to+\infty)$

ii) $\omega_\varphi\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ $\quad(n\to+\infty)$

特别地，若 $\omega(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ 则有

$$\|S_n^*(f)-f\|_p=O(n^{-\alpha})\ (n\to+\infty)\Longleftrightarrow\omega_\varphi(f,t)_p=O(t^{2\alpha})\quad(t\to0^+)$$

其中 $\varphi(x)=\sqrt{x}$。

应当指出，例1所采用的方法是由V.Totik首先提出的。

例2 设 $\{B_n\}_{n\in N}$ 是Bernstein算子列，而 $\{P_n\}_{n\in N}$ 是Bernstein－Kantorovich算子列，取 $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$，令

$$U_p=\{g|\ g\in L_p[0,1]\text{ 且 }\varphi^2g''\in L_p[0,1]\}$$

对 $g\in U_p$，令 $\|g\|_{U_{p2}}=\|\varphi^2g''\|_p+\|g\|_p$。由 $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$ 和 $h>0$ 得到

$h^*=\frac{h^2}{1+h^2}$；$h^{**}=\frac{1}{1+h^2}$，注意到当 $h\to0^+$ 时有

$$h^*=h^2+O(h^2),\ h^{**}=1-h^2+O(h^2).$$

又因对 $x\in\left(\frac{h^2}{1+h^2},\frac{1}{1+h^2}\right)$ 有 $1\pm h\varphi'(x)\geqslant K>0$，所以可取

$$V_\varphi(f,t)_p=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_{h\varphi}^2(f)\|_{L_p(h^2,1-h^2)}$$

我们有

系 设 $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$，$\omega\in\psi_\alpha(0<\alpha<1)$，则对 $f\in L_p[0,1]$ $(1\leqslant p<+\infty)$，如下命题是等价的，

i) $\|P_n(f)-f\|_p=O\left(\omega\ \frac{1}{n}\ \right)$， $\quad(n\to+\infty)$，

ii) $\|\Delta_{h\varphi}^2(f)\|_{L_p[h^2,1-h^2]}=O(\omega(h^2))$ $\quad(h\to0^+)$

特别地，当 $\omega(t)=t^\alpha(0<\alpha<1)$ 时，有

$$\|P_n(f)-f\|_p=O(n^{-\alpha})\Longleftrightarrow\|\Delta_{h\varphi}^2(f)\|_{L_p[h^2,1-h^2]}=O(h^{2\alpha}).$$

系4 对每个$\omega\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha<1$）和$f\in L_p[0,1]$（$1\leqslant p<+\infty$），则当$n\to+\infty$时，如下命题是等价的：

i) $\|P_n(f)-f\|_p=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$，

ii) $\omega_\varphi\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$。

特别地，若 $\omega(t)=t^\alpha$（$0<\alpha<1$），则有

$\|P_n(f)-f\|_p=O(n^{-\alpha})\ (n\to+\infty)\Longleftrightarrow\omega_\varphi(f,t)_p=O(t^{2\alpha})\ (t\to0^+)$。

为证明系3—4，应用定理3.19和推论3.7，我们只需要证明如下命题。

命题7 对每个$f\in L_p[0,1]$有

$$\|P_n(f)\|_p\leqslant\|f\|_p \tag{5.49}$$

$$\|\varphi^2P_n''(f)\|_p\leqslant Kn\|f\|_p \tag{5.50}$$

而对每个 $g\in U_p$有

$$\|\varphi^2P_n''(g)\|_p\leqslant K\|\varphi^2g''\|_p \tag{5.51}$$

$$\|g'\|_p\leqslant K\|g\|_{U_{p2}} \tag{5.52}$$

和

$$\|P_n(g)-g\|_p\leqslant\frac{k}{n}\|g\|_{U_{p2}} \tag{5.53}$$

证明 估计式（5.49）—（5.52）的证明与命题1—4类似，所以我们仅证明（5.53）首先注意到

$$\|P_n(g)-B_n(g)\|_p=\left\|\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int_{\frac{k}{n+1}-\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n+1}-\frac{k}{n}}\int_0^u g'\left(\frac{k}{n}+v\right)dvdu\right)p_{nk}(\cdot)\right\|_p$$

$$\leqslant\frac{K}{n}\left\|\sum_{k=0}^{n}(n+1)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left|g'\left(\frac{k}{n}+v\right)\right|dv\,p_{nk}(\cdot)\right\|_p$$

其中$p_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$。由于$\int_0^1p_{nk}(x)dx=\frac{1}{n}$和Jensen不等式，我们有

$$\|P_n(g)-B_n(g)\|_p\leqslant\frac{K}{n}\left\{\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\left|g'\left(\frac{k}{n}+v\right)\right|^pdv\right)p_{nk}(x)dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\frac{K}{n}\|g'\|_p\leqslant\frac{K}{n}\|g\|_{U_{p2}} \tag{5.54}$$

其次，对$g\in U_p$由Taylor公式

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+\frac{1}{2}\int_0^{t-x}\frac{t-x-\tau}{(x+\tau)(1-x-\tau)}(x+\tau)(1-x-\tau)g''(x+\tau)d\tau$$

由于对$\tau\in(0,t-x)$，t、$x\in(0,1)$有$\left|\frac{t-x-\tau}{(x+\tau)(1-x-\tau)}\right|\leqslant\frac{|t-x|}{x(1-x)}$和$B_n(t-x,x)=0$，所以有

$$|B_n(g,x)-g(x)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}B_n\left(\frac{|t-x|}{x(1-x)}\left|\int_0^{t-x}(x+\tau)(1-x-\tau)|g''(x+\tau)|d\tau\right|,x\right)$$

对$P>1$利用极大函数$M(\cdot)$和极大不等式有

$$\|B_n(g)-g\|_p\leqslant\frac{1}{2}\left\|B_n\left(\frac{(t-\cdot)^2}{\varphi^2}M(\varphi^2g'',\cdot);\ \cdot\right)\right\|_p$$

$$=\frac{K}{n}\|M(\varphi^2g'')\|_p\leqslant\frac{K}{n}\|\varphi g''\|_p\leqslant\frac{K}{n}\|g\|_{U_{p2}}\qquad(5.55)$$

对$p=1$由Fubini定理导出（记$p_{n,-1}(x)=0$）

$$\|B_n(g)-g\|_{L_1[0,\frac{1}{2}]}\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^n\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{x(1-x)}\left|\int_x^{\frac{k}{n}}u(1-u)|g''(u)|du\right|p_{nk}(x)\right\}dx$$

$$\leqslant\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^n\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\left(\int_x^{\frac{k}{n}}u(1-u)|g''(u)|du\right)p_{nk}(x)\right\}dx$$

$$\leqslant\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^n\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\left(\int_0^{\frac{k}{n}}u(1-u)|g''(u)|du\right)p_{nk}(x)\right\}dx$$

$$=\sum_{k=0}^n\left(\int_0^{\frac{k}{n}}u(1-u)|g''(u)|du\right)\int_0^1\left(p_{n-1,k-1}(x)-p_{nk}(x)\right)dx$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^n\left(\int_0^1u(1-u)|g''(u)|du\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\leqslant\frac{K}{n}\|g\|_{U_{p2}}.$$

由对称关系可导出

$$\|B_n(g)-g\|_{L_1[\frac{1}{2},1]}\leqslant\frac{K}{n}\|g\|_{U_{12}}$$

因而得到

$$\|B_n(g)-g\|_{L_1[0,1]}\leqslant\frac{K}{n}\|g\|_{U_{12}}\qquad(5.56)$$

最后由（5.54），（5.55）和（5.56）导出（5.53）证毕。

5.4 一致逼近的等价定理

设$D=(a,b)$代表区间$I=[0,1]$，$R_+=[0,+\infty)$或$R=(-\infty,+\infty)$，$\varphi\in C^2(a,b)$

是非负权且适合第二章§1.5中列举的条件，用$C_s(D)$表示$C(D)$中在端点a和b具有有限极限的函数全体、记

$$U_C=\{g|g\in AC^1_{loc}且\|\varphi^2g''\|_C<+\infty\}$$

对$g\in U_C$规定半范$|g|_{U_C}=\|\varphi^2g''\|$，则对$t>0$

$$K_\varphi(f,t)=\inf_{g\in U_C}\{\|f-g\|_C+t^2|g|_{U_C}\}$$

为$C_s(D)$上的K—泛函，对$\omega\in\Phi_\alpha(0<\alpha\leqslant1)$，记

$$C_{0,\omega}=\{f|f\in C_s(D)且K_\varphi(f,t)=O(\omega(t^2))\ t\to0^+\}.$$

由于$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\omega(t)}{t}=+\infty$，所以有

$$U_C\subset C_{0,\omega}\subset C_s(D),$$

因此$C_{0,\omega}$是$C_s(D)$的插补空间。

若对$g\in U_C$规定半范$|g|_{U_{C2}}=\|g\|_C+\|\varphi^2g''\|_C$，则对$t>0$

$$\widetilde{K}_\varphi(f,t)=\inf_{g\in U_C}\{\|f-g\|_C+t^2|g|_{U_{C2}}\}$$

也是$C_s(D)$上的K－泛函且有

$$\widetilde{K}_\varphi(f,t)\asymp\min(1,t^2)\|f\|_C+K_\varphi(f,t).$$

因此有

$$f\in C_{0,\omega}\Longleftrightarrow\widetilde{K}_\varphi(f,t)=O(\omega(t^2))\qquad(t\to0^+).$$

现在对$f\in C_0(D)$引入修正光滑模：

$$\omega_\varphi(f,t)=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta^2_{h\varphi}(f)\|_{C(a^*,b^{**})}$$

$$=\sup_{0<h\leqslant t}\ \sup_{x\pm h\varphi(x)\in(a,b)}|\Delta^2_{h\varphi(x)}(f,x)|$$

利用定理2.10的弱等价关系得到

$$f\in C_{0,\omega}\Longleftrightarrow\omega_\varphi(f,t)=O(\omega(t^2))\qquad(t\to0^+).$$

特别地，若$\omega(t)=t^\alpha(0<\alpha\leqslant1)$，则用$C_{0,\alpha}$表示相应的插补空间，由定义可见，$\omega_\varphi(f,t)=O(t^{2\alpha})(t\to0^+)$等价于对$\forall h>0$且使得$x\pm h\varphi(x)\in(a,b)$有

$$|\Delta^2_{h\varphi(x)}(f,x)|\leqslant Kh^{2\alpha}\tag{5.57}$$

将$h\varphi(x)$改为h，(5.57)变形为

$$\varphi^{2\alpha}(x)|\Delta^2_h(f,x)|\leqslant Kh^{2\alpha}\tag{5.58}$$

因此得到

$$\omega_\varphi(f,t)=O(t^{2\alpha})\qquad(t\to0^+)$$

$\Longleftrightarrow$对$\forall h>0$且使得$x\pm h\in(a,b)$有

$$\varphi^{2\alpha}(x)|\Delta^2_h(f,x)|\leqslant Kh^{2\alpha}$$

由定理3.18导出如下一般逼近等价定理

定理3.21 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(D)$ 到自身内一致有界线性算子列，且适合如下条件：

I) 对每个 $g\in U_C$ 有

$$\|L_n(g)-g\|_C\leqslant M_1\phi_n\|g\|_{U_{C2}} \quad (5.59)$$

$$\|L_n(g)\|_{U_{C2}}\leqslant M_2\|g\|_{U_{C2}} \quad (5.60)$$

II) 对每个 $f\in C_0(D)$ 有

$$\|L_n(f)\|_{U_{C2}}\leqslant M_3\phi_n^{-1}\|f\|_C \quad (5.61)$$

其中 $\phi_n\to 0^+$（$n\to+\infty$）且适合条件（5.4）、则对每个 $f\in C_0(D)$ 和 $\omega\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha<1$），如下命题是等价的：

I) $f\in C_{\varphi,\omega}$.

II) $\omega_\varphi(f,t)=O(\omega(t^2))$ $\qquad (t\to 0^+)$,

III) $\|L_n(f)-f\|_C=O(\omega(\phi_n))$ $\qquad (n\to+\infty)$.

特别地，若 $\omega(t)=t^\alpha$ （$0<\alpha<1$），则有

$$\|L_n(f)-f\|_C=O(\phi_n^\alpha)\Longleftrightarrow \text{对} h>0$$

$$\|\triangle_{h\varphi}^2(f)\|_{C(h^*,h^{**})}=O(h^{2\alpha})$$

或对 $h>0$ 且使得 $x\pm h\in D$ 有

$$\varphi(x)^{2\alpha}|\triangle_h^2(f,x)|\leqslant Kh^{2\alpha}.$$

类似于定理3.20，我们有

定理3.22 在定理3.21条件下，若记 $E_k(f)=\|L_k(f)-f\|_C$，则有

I) $E_n(f)\leqslant K\left(\omega_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{n}\|f\|_C\right)$ $\quad (5.62)$

II) 对 $r>0$ 有

$$\omega_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})\leqslant K\left(n^{r-1}\sum_{k=1}^{n}k^{-r}E_k(f)+n^{r-1}\|f\|_C\right) \quad (5.63)$$

其中 K 是与 f、n 无关的正数.

应当指出，若定理3.21中取半范为 $|\cdot|_{U_C}$，则（5.62）和（5.63）分别改为

I) $E_n(f)\leqslant K\omega_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})$,

II) 对 $r>0$ 有

$$\omega_\varphi(f,n^{-\frac{1}{2}})\leqslant kn^{r-1}\sum_{k=1}^{n}k^{-r}E_k(f),$$

其中 K 是与 f,n 无关的正数.

现在应用定理3.21到一类正线性算子列得到

定理3.23 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(D)$ 到自身内正线性算子列且对 $x\in D$ 有

$L_n(1,x)=1+O(\phi_n)$, $L_n(t,x)=x+O(\phi_n)$

和

$$L_n((t-x)^2,x)\leqslant K\phi_n\varphi^2(x) \quad (5.64)$$

其中$\varphi(x)$是非负权函数且适合第二章§1.5中的条件，而$\phi_n\to 0^+$（$n\to+\infty$）且适合条件（5.4）。此外，若还满足如下条件：

i) 对每个$g\in U_C$，有

$$\|\varphi^2 L_n''(g)\|_C\leqslant K\|g\|_{U_C}, \qquad (5.65)$$

ii) 对每个$f\in C_0(D)$有

$$\|\varphi^2 L_n''\|_C\leqslant K\phi_n^{-1}\|f\|_C, \qquad (5.66)$$

则对每个$f\in C_0(D)$和$\omega\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha<1$），如下命题是等价的：

i) $f\in C_{\varphi,\omega}$,

ii) $\|L_n(f)-f\|_C=O(\omega(\phi_n))$ $\qquad(n\to+\infty)$,

iii) $\omega_\varphi(f,t)=O(\omega(t^2))$ $\qquad(t\to0^+)$

特别地，若$\omega(t)=t^\alpha$ （$0<\alpha<1$），则

$\|L_n(f)-f\|_C=O(\phi_n^\alpha)\Longleftrightarrow$对$h>0$且使得$x\pm h\in D$有

$$\varphi^{2\alpha}(x)|\Delta_h^2(f,x)|\leqslant Kh^{2\alpha}$$

或$\omega_\varphi(f,t)=O(t^{2\alpha})$ $\qquad(t\to0^+)$.

例1 设$\{S_n\}_{n\in N}$是Szasz—Mirakjan算子列，则对$x\in[0,\infty)$有$S_n(1,x)=1$，$S_n(t,x)=x$和 $S_n((t-x)^2,x)=\frac{x}{n}$，因此可取$\varphi(x)=\sqrt{x}$，$\phi_n=n^{-1}$。由（5.19）和（5.21）断定条件（5.65）和（5.66）成立，即对每个$f\in C_0(D)$有

$$\|\varphi^2 S_n''(f)\|_C\leqslant 2n\|f\|_C,$$

而对每个$g\in U_C=\{g|g\in AC_{loc}^1$且$\|xg''\|_C<+\infty\}$有

$$\|\varphi^2 S_n''(g)\|_C\leqslant 3\|g\|_{U_C}.$$

因此由定理3.23得到

系1 对每个$f\in C_0(0,\infty)$和$\omega\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha<1$）有

$$\|S_n(f)-f\|_C=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\Longleftrightarrow\omega_{\sqrt{x}}(f,t)=O(\omega(t^2)).$$

特别地有

$$\|S_n(f)-f\|_C=O(n^{-\alpha})\Longleftrightarrow\omega_{\sqrt{x}}(f,t)=O(h^{2\alpha}).$$

$\Longleftrightarrow$对$h>0$且$x\in[h,+\infty)$有

$$x^\alpha|\Delta_h^2(f,x)|=O(h^{2\alpha})$$

类似地讨论，我们有

系2 设$\{M_n\}_{n\in N}$是Meyer—König and Zeller算子列，则有$M_n(1,x)=1$，$M_n(t,x)=x$和

$$M_n((t-x)^2,x)=\frac{x(1-x)^2}{n+1}\,{}_2F_1(1,2;n+2;x)$$

因此有$\varphi(x)=\sqrt{x}(1-x)$；$x\in(0,1)$，$\phi_n=\frac{1}{n}$。于是对每个$f\in C[0,1]$和$\omega\in\Phi_\alpha(0<\alpha<1)$有

$$\|M_n(f)-f\|_C=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\Longleftrightarrow\omega_{\sqrt{x}(1-x)}(f,t)=O(\omega(t^2))$$

特别地有

$$\|M_n(f)-f\|_C=O(n^{-\alpha})\Longleftrightarrow\omega_{\sqrt{x}(1-x)}(f,t)=O(t^{2\alpha})$$

$\Longleftrightarrow$对$h>0$，$x\in[h,1-h]$有

$$x^{\alpha}(1-x)^{2\alpha}|\Delta_h^2(f,x)|=O(h^{2\alpha})。$$

下面讨论Gamma算子列的一致逼近问题。

例：设$\{G_n\}_{n\in N}$是Gamma算子列，对$f\in C(0,\infty)$有

$$G_n(f,x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-xu}u^n f\left(\frac{n}{u}\right)du$$

$$=\int_0^\infty g_n(x,u)f\left(\frac{n}{u}\right)du$$

其中$g_n(x,u)=\frac{x^{n+1}}{n!}e^{-xu}u^n$。由于对$x\in(0,\infty)$有

$$G_n(1,x)=1;\qquad G_n(t,x)=x$$

和

$$G_n((t-x)^2,x)=\frac{x^2}{n-1},$$

故有$\varphi(x)=x$，$\phi_n=\frac{1}{n}$。记

$$U_C=\{g|g\in AC_{loc}^1\text{ 且 }\|x^2g''\|_C<+\infty\},$$

对$g\in U_C$有

$$|x^2G_n''(g,x)|=\left|\int_0^\infty x^2g''\left(\frac{nx}{u}\right)\frac{n^2}{u^2}e^{-u}\frac{u^n}{n!}du\right|$$

$$=|G_n(\varphi^2g'',x)|\leqslant\|\varphi^2g''\|_C。$$

即(5.65)成立。又对$f\in C_B(0,\infty)$有

$$x^2G_n''(f,x)=\int_0^\infty x^2\frac{\partial^2g_n(x,u)}{\partial x^2}f\left(\frac{n}{u}\right)du$$

$$=\int_0^\infty[(n+1-xu)^2g_n(x,u)-(n+1)g_n(x,u)]f\left(\frac{n}{u}\right)du$$

所以

$$|x^2G_n''(f,x)|\leqslant\|f\|_C\left(\int_0^\infty(n+1-xu)^2g_n(x,u)du+(n+1)\right)$$

$$\leq 3(n+1)\|f\|_C$$

即（5.66）成立，因此由定理3.2得到

系3 对每个$f\in C_0[0,\infty)$和$\omega\in\Phi_\alpha$（$0<\alpha<1$）有$\|G_n(f)-f\|_C=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\Longleftrightarrow \omega_\varphi(f,t)=O(\omega(t^2)) \qquad (t\to 0^+)$

特别地，有

$\|G_n(f)-f\|_C=O(n^{-\alpha})\Longleftrightarrow \omega_\varphi^2(f,t)=O(t^{2\alpha})\Longleftrightarrow$ 对$h>0$和$x\in[h,+\infty)$有

$x^{2\alpha}|\Delta_h^2(f,x)|=O(h^{2\alpha})$.

5.5 点态的逼近等价定理

设D是有限或无穷区间，对$f\in C(D)$规定范数 $\|f\|=\sup\limits_{x\in D}|f(x)|$，记

$C_0(D)=\{f|f\in C(D)且\|f\|<+\infty\}$,

$U_C=\{g|g\in C^2(D)且\|g''\|<+\infty\}$.

对$g\in U_C$规定半范$|g|_U=\|g''\|$。本节讨论点态逼近定理，得到

定理3.24 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(D)$到自身内的一致有界线性算子列，且适合如下条件：

i) 对每个$g\in U_C$，$x\in D$有

$$|L_n(g,x)-g(x)|\leq M_1\varphi(x)\phi_n|g|_U \qquad (5.67)$$

和

$$|L_n''(g,x)|\leq M_2|g|_U \qquad (5.68)$$

ii) 对每个 $f\in C_0(D)$，有

$$|L_n''(f,x)|\leq M_3\phi_n^{-1}\frac{1}{\varphi(x)}\|f\| \qquad (5.69)$$

其中 $\phi_n\to 0^+$（$n\to+\infty$）且适合条件（5.4），而$\varphi(x)\geq 0$且对$h>0$和$x\in D$有

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int \frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}\leq\frac{Mh^2}{m(x,h)} \qquad (5.70)$$

这里$m(x,h)=\max(\varphi(x\pm h),\varphi(x))$.

则对每个$f\in C(D)$和$0<\alpha<2$如下命题是等价的：

i) $f\in \mathrm{Lip}^*\alpha$,

ii) 对每个$x\in D$有

$$|L_n(f,x)-f(x)|=O\left((\phi_n\varphi(x))^{\frac{\alpha}{2}}\right),\quad (n\to+\infty).$$

证明 i)$\Longrightarrow$ii) 是定理2.18的直接推论，下面证明ii)$\Longrightarrow$i)，设$h>0$且使得$x\pm h\in D$，由条件得到

$$|\Delta_h^2(f,x)|=|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|$$

$$\le |L_n(f,x+h)-f(x+h)|+2|L_n(f,x)-f(x)|+|L_n(f,x-h)-f(x-h)|$$

$$+|\Delta_h^2(L_n(f),x)|\le M\phi_n^{\frac{\alpha}{2}}\left(\varphi^{\frac{\alpha}{2}}(x+h)+\varphi^{\frac{\alpha}{2}}(x)+\varphi^{\frac{\alpha}{2}}(x-h)\right)+$$

$$+|\Delta_h^2(L_n(f),x)|\le M(\phi_n m(x,h))^{\frac{\alpha}{2}}+|\Delta_h^2(L_n(f),x)|,$$

用$f_{2\delta}$表示f的二阶Steklov平均，并注意到$L_n(f,x)\in U_C$，所以有

$$|\Delta_h^2(L_n(f),x)|\le\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}|L_n''(f,x+s+t)|ds\,dt$$

$$\le\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}|L_n''(f-f_{2\delta},x+s+t)|ds\,dt+\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}|L_n''(f_{2\delta},x+s+t)|ds\,dt$$

$$\le M\phi_n^{-1}\|f-f_{2\delta}\|\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}+h^2\|f_{2\delta}''\|$$

因此由（5.70）导出

$$|\Delta_h^2(L_n(f),x)|\le Mh^2\left(\frac{1}{\phi_n m(x,h)}+\frac{1}{\delta^2}\right)\omega_2(f,\delta)$$

故得

$$|\Delta_h^2(f,x)|\le M\left((\phi_n m(x,h))^{\frac{\alpha}{2}}+h^2\left(\frac{1}{\phi_n m(x,h)}+\frac{1}{\delta^2}\right)\omega_2(f,\delta)\right)$$

取δ适合如下不等式：

$$\sqrt{\phi_n m(x,h)}\le\delta<\sqrt{\phi_{n-1}m(x,h)}$$

由条件（5.4）导出

$$\delta<\sqrt{\phi_{n-1}m(x,h)}=\sqrt{\phi_n m(x,h)}\sqrt{\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}}\le\sqrt{C}\sqrt{\phi_n m(x,h)}$$

因而有

$$|\Delta_h^2(f,x)|\le M\left(\delta^\alpha+\left(\frac{h}{\delta}\right)^2\omega_2(f,\delta)\right)$$

或

$$\omega_2(f,h)\le M\left(\delta^\alpha+\left(\frac{h}{\delta}\right)^2\omega_2(f,\delta)\right)$$

因此由Lorentz—Hermann引理导出，对$0<\alpha<2$有$\omega_2(f,\delta)=O(\delta^\alpha)$（$\delta\to0^+$），即$f\in \mathrm{Lip}^*\alpha$证毕。

为了应用需要，我们列举一些适合条件（5.70）的$\varphi(x)$，例如

引理8.13 设$\varphi(x)=1+\alpha x^2$（$\alpha\geqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$）。则对$0<h<1$有

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int \frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}\leqslant\frac{M_\alpha h^2}{m(x,h)} \tag{5.71}$$

其中M_α是依赖于α的正数。

证明　当$\alpha=0$时，（5.71）成立是明显的，现设$0<h<1, \alpha>0$。若$x\in[0,h]$，则有

$$1+\alpha(x+h)^2\leqslant 1+4\alpha h^2\leqslant 1+4\alpha$$

所以

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int \frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int\frac{ds\,dt}{1+\alpha(x+s+t)^2}\leqslant h^2\leqslant\frac{(1+4\alpha)h^2}{1+\alpha(x+h)^2}.$$

又因为$4hx\leqslant 5(x-h)^2+5$，所以有

$$4hx\leqslant\begin{cases}\dfrac{5}{\alpha}\left(1+\alpha(x-h)^2\right) & (0<\alpha<1)\\ 5\left(1+\alpha(x-h)^2\right) & (\alpha\geqslant 1)\end{cases}$$

因此 对$x\geqslant h$，$\alpha>0$有

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int \frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}=\frac{h^2}{\varphi(x-h)}=\left(1+\frac{4\alpha hx}{1+\alpha(x-h)^2}\right)\frac{h^2}{1+\alpha(x-h)^2}$$

$$\leqslant\left(1+5\max(\alpha,1)\right)\frac{h^2}{m(x,h)}.$$

因而只要取$M_\alpha=\max\left(1+4\alpha,\ 1+5\max(\alpha,1)\right)$，对$x\geqslant 0$估计式（5.71）成立、类 似 地可以证明对$x<0$估计式也成立、证毕。

引理8.14 设$\varphi(x)=x(1+\alpha x)$（$\alpha\geqslant 0$，$x\geqslant 0$），则对$0<h<1$、$x\geqslant h$有

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int \frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}\leqslant\frac{M_\alpha h^2}{m(x,h)} \tag{5.72}$$

其中M_α是依赖于α的正数。

证明　由于对$x\geqslant h$、$0<h<1$有

$$\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}=\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{(x+s+t)(1+a(x+s+t))}$$

$$=\begin{cases}\Delta_h^2(t\ln t, x) & a=0\\ \Delta_h^2\left(t\ln t-\frac{1+at}{a}\ln(1+at), x\right) & a>0\end{cases}$$

于是，当$a=0$时，若 $x\in[h,2h]$ 有

$$\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{x+s+t}\leqslant\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{h+s+t}=\Delta_h^2(t\ln t, h)$$

$$=2h\ln 2\leqslant 6h^2/3h\leqslant\frac{6h^2}{x+h}.$$

若$2h\leqslant x$，则有$3(x-h)\geqslant x+h$，因此有

$$\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{x+s+t}\leqslant\frac{h^2}{x-h}\leqslant\frac{3h^2}{x+h}$$

于是取$M_0=6$得到估计（5.72）。

其次，当$a>0$时，若$x\in[h,2h]$（$0<h<1$），则有

$$\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds}{\varphi(x+s+t)}\leqslant\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{\varphi(s+t+h)}$$

$$=\Delta_h^2\left(t\ln t-\frac{1+at}{a}\ln(1+at), h\right)$$

$$=2h\ln 2-2h\ln\frac{1+2ah}{1+ah}+\frac{1}{a}\ln\frac{(1+ah)^2}{1+2ah}$$

$$\leqslant 2h\ln 2+\frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{a^2h^2}{1+2ah}\right)$$

$$\leqslant 2h\ln 2+\frac{ah^2}{1+2ah}=2h\left(\ln 2+\frac{1}{4}\right)$$

$$\leqslant 6h^2\,\frac{1+3ah}{3h(1+3ah)}\leqslant\frac{6(1+3a)}{\varphi(x+h)}h^2$$

其中利用不等式：对$x\in[h,2h]$有$(x+h)(1+a(x+h))\leqslant 3h(1+3ah)$。若$x\geqslant 2h$则有

$$\int\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}\leqslant\frac{h^2}{\varphi(x-h)}=\frac{1}{(x-h)(1+a(x-h))}$$

$$=\left(1+\frac{h}{x}\right)\left(1+\frac{2ah}{1+a(x-h)}\right)\frac{h^2}{\varphi(x+h)}\leqslant\frac{9h^2}{\varphi(x+h)}$$

因此只要取$M_a=\max(9,6(1+3a))$便得到估计(5.72)证毕.

引理3.15　设$\varphi(x)=x(1-x)$ ($x\in[0,1]$), 则对$0<h<\frac{1}{4}$, $x\in[h,1-h]$有

$$\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}\leqslant\frac{Mh^2}{m(x,h)}\tag{5.73}$$

证明　设$0<h<\frac{1}{4}$, 我们只需分别对$[h,2h]$, $[2h,1-2h]$和$[1-2h,1-h]$证明(5.73)成立即可, 由对称关系, 仅需讨论$x\in[h,2h]$和$x\in[2h,1-2h]$.

若$x\in[h,2h]$ $\left(0<h<\frac{1}{4}\right)$, 则有

$$\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{\varphi(s+t+x)}=\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{(x+s+t)(1-x-s-t)}$$

$$\leqslant\frac{1}{1-x-h}\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{x+s+t}\leqslant\frac{1}{1-x-h}2h\ln 2$$

$$\leqslant\frac{6h^2}{3h(1-x-h)}\leqslant\frac{6h^2}{(x+h)(1-x-h)}\leqslant\frac{12h^2}{x(1-x)}.$$

由于$\varphi(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$是单调增加的, 所以对$x\in[1,2h]$ $\left(0<h<\frac{1}{4}\right)$有

$$\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}\leqslant\frac{1}{1-x-h}\frac{h^2}{x-h}$$

$$\leqslant\frac{h^2}{(x+h)(1-x-h)}\left(1+\frac{2h}{x-h}\right)\leqslant\frac{3h^2}{\varphi(x+h)}$$

其中利用关系$h\leqslant x-h$。

其次, 若$x\in[2h,1-2h]$, 则有$1-x-h\geqslant\frac{1}{2}(1-x)\geqslant\frac{1}{4}(1-x+h)$, 因此有

$$\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)}\leqslant\frac{3h^2}{\varphi(x+h)}\leqslant\frac{6h^2}{\varphi(x)}\leqslant\frac{12h^2}{\varphi(x-h)}$$

故对$x\in[2h,1-2h]$ $\left(0<h<\frac{1}{4}\right)$有

$$\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)} \leqslant \frac{Mh^2}{m(x,h)}$$

于是估计式（5.73）得证。

引理3.16　设$\varphi(x)=x^{\beta}(1-x)^{2\beta}$（$0\leqslant\beta<1$），则对$0<h<\frac{1}{8}$和$x\in[h,1-h]$有

$$\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)} \leqslant \frac{M_{\beta}h^2}{m(x,h)} \tag{5.74}$$

其中M_{β}是正常数，特别应当注意，当$\beta=1$时，上式右端积分是发散的，所以估计式（5.74）不成立。

证明　设$0<h<\frac{1}{8}$。我们分别在$[h,2h]$、$[2h,1-2h]$和$[1-2h,1-h]$中讨论。由于对$x\in[h,2h]$和$x\in[2h,1-2h]$的讨论与引理3.15类似，所以不再重复，这里仅讨论$x\in[1-2h,1-h]$的情况。

首先设$\beta\neq\frac{1}{2}$，则有

$$\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)} \leqslant \frac{1}{(x-h)^{\beta}} \iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{ds\,dt}{(1-x-s-t)^{2\beta}}$$

$$= \frac{(x-h)^{-\beta}}{(2-2\beta)|1-2\beta|}\left|(1-x+h)^{2-2\beta}-2(1-x)^{2-2\beta}+(1-x-h)^{2-2\beta}\right|$$

$$\leqslant \frac{M_{\beta}}{\varphi(x-h)}\left((1-x+h)^2+2(1-x)^{2-2\beta}(1-x+h)^{2\beta}+(1-x-h)^{2-2\beta}(1-x+h)^{2\beta}\right)$$

$$\leqslant \frac{M_{\beta}h^2}{\varphi(x-h)} = \frac{M_{\beta}h^2}{m(x,h)}.$$

其中利用$\varphi(x)$在$[1-2h,1-h]$ $\left(0<h<\frac{1}{8}\right)$内是单调减少的。

其次，设$\beta=\frac{1}{2}$有

$$\iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{ds\,dt}{\varphi(x+s+t)} \leqslant \frac{1}{(x-h)^{\frac{1}{2}}} \iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{ds\,dt}{1-x-s-t}$$

$$\leqslant \frac{1}{(x-h)^{\frac{1}{2}}} \iint_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{ds\,dt}{h-s-t} = \frac{(2\ln 2)h}{(x-h)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leqslant \frac{(7/2)h^2}{\varphi(x-h)} = \frac{M_\beta h^2}{m(x,h)}.$$

因此（5.74）得证。

作为定理3.24的应用，有如下结果

系1 设 $\{B_n\}_{n\in N}$ 是Bernstein算子列，则对每个 $f\in C[0,1]$ 和 $0<\alpha<2$，如下命题是等价的：

i) 对每个 $x\in[0,1]$ 有

$$|B_n(f,x)-f(x)| = O\left(\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \qquad (n\to+\infty),$$

ii) $f\in Lip^*\alpha$，即

$$\sup_{x\in[h,1-h]}|\Delta_h^2(f,x)| = O(h^\alpha) \qquad (h\to0^+)$$

证明 由于对 $x\in[0,1]$，$B_n(1,x)=1$，$B_n(t,x)=x$ 和 $B_n((t-x)^2,x)=\frac{x(1-x)}{n}$，所以对每个 $g\in U_C$ 和 $x\in[0,1]$ 有

$$|B_n(g,x)-g(x)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{x(1-x)}{n}\|g\|_U$$

取 $\phi_n=\frac{1}{n}$、$\varphi(x)=x(1-x)$、并由引理3.15得到(5.67)和(5.70)成立

其次，由于对每个 $g\in U_C$ 有

$$B_n''(g,x) = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\Delta_{\frac{1}{n}}^2\left(g,\frac{k}{n}\right)p_{n-2,k}(x)$$

所以对 $x\in[0,1]$ 有

$$|B_n''(g,x)| \leqslant n^2\sum_{k=0}^{n-2}\left|\Delta_{\frac{1}{n}}^2\left(g,\frac{k}{n}\right)\right|p_{n-2,k}(x)$$

$$\leqslant \|g''\|\sum_{k=0}^{n-2}p_{n-2,k}(x) = \|g\|_U$$

故（5.68）成立。

最后，由于对每个 $f\in C[0,1]$ 有

$$B_n''(f,x) = \left(\frac{n}{x(1-x)}\right)^2\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\gamma_{n,k}(x)p_{n,k}(x)$$

其中 $\gamma_{n,k}(x)=\left(\frac{k}{n}-x\right)^2-(1-2x)\frac{k}{n^2}-\frac{x^2}{n}$。由于对 $x\in[0,1]$ 有 $(1-2x)\frac{k}{n^2}+\frac{x^2}{n^2}\geqslant0$，所以

$$|\gamma_{n,k}(x)| \leqslant \left(\frac{k}{n}-x\right)^2+(1-2x)\frac{k}{n}+\frac{x^2}{n}$$

因此对 $x\in[0,1]$ 有

$$|B_n''(f,x)| \leqslant \|f\|\left(\frac{n}{x(1-x)}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} |\gamma_{nk}(x)| p_{nk}(x)$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{x(1-x)}\right)^2 \|f\| \sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)^2+(1-2x)\frac{k}{n}+\frac{x^2}{n}\right)p_{nk}(x)$$

$$\leqslant 2\|f\|\frac{n}{x(1-x)}.$$

即(5.69)成立，于是由定理3.24导出所需的结论证毕。

系2 设$\{\widetilde{D}_n\}_{n\in N}$是修正的Durrmeyer—Bernstein算子列，则对每个$f\in C[0,1]$和$0<\alpha<2$，如下命题是等价的：

i) 对每个$x\in[0,1]$有

$$\left|\widetilde{D}_n(f,x)-f(x)\right|=O\left(\left(\frac{x(1-x)}{n+1}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right) \qquad (n\to+\infty),$$

ii) $f\in \mathrm{Lip}^*\alpha$，即

$$\sup_{x\in[h,1-h]}|\Delta_h^2(f,x)|=O(h^\alpha) \qquad (h\to0^+).$$

证明 由于对$f\in C[0,1]$有

$$\widetilde{D}_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\phi_{nk}(f)p_{nk}(x) \qquad x\in[0,1],$$

其中

$$\phi_{nk}(f)=\begin{cases} f(0) & k=0\\ (n-1)\int_0^1 f(t)p_{n-2,k-1}(t)dt & 1\leqslant k\leqslant n-1\\ f(1) & k=n\end{cases}$$

所以对$x\in[0,1]$有$\widetilde{D}_n(1,x)=1$，$\widetilde{D}_n(t,x)=x$和

$$\widetilde{D}_n\left((t-x)^2, x\right)=\frac{2x(1-x)}{n+1}$$

因此对每个$g\in U_C$和$x\in[0,1]$有

$$|\widetilde{D}_n(g,x)-g(x)|\leqslant\|g''\|\frac{x(1-x)}{n+1}.$$

取$\varphi(x)=x(1-x)$，$\phi_n=\frac{1}{n}$，由引理3.15得到(5.67)和(5.70)成立。

其次，由于对$f\in C[0,1]$有

$$\widetilde{D}_n''(f,x)=\left(\frac{n}{x(1-x)}\right)^2\sum_{k=0}^{n}\phi_{nk}(f)\gamma_{nk}(x)p_{nk}(x)$$

其中$\gamma_{nk}(x)=\left(\frac{k}{n}-x\right)^2-(1-2x)\frac{k}{n}-\frac{x^2}{n}$。所以对$x\in[0,1]$有

$$|\widetilde{D}_n''(f,x)| \leqslant \|f\| \frac{n}{x(1-x)} \sum_{k=0}^{n} |[illegible](x)| p_{n,k}(x)$$

$$\leqslant 2\frac{n}{x(1-x)}\|f\|,$$

即(5.69)成立。

最后，由于对$g\in U_c$有

$$\widetilde{D}_n''(g,x)=\sum_{k=0}^{n}\phi_{n,k}(g)p_{n,k}''(x)$$

$$=n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\Delta_{n,k}^{(2)}(g)p_{n-2,k}(x)$$

其中

$$\Delta_{n,k}^{(2)}(g)=\phi_{n,k}(g)-2\phi_{n,k+1}(g)+\phi_{n,k+2}(g)$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1 g''(t)p_{n,k+1}(t)dt$$

所以有

$$|\widetilde{D}_n''(g,x)|\leqslant\frac{n-1}{n+1}\|g''\|\sum_{k=0}^{n-2}p_{n-2,k}(x)\leqslant\|g''\|$$

即（5.68）成立，因此由定理3.24导出所需的结论，证毕。

第四章 算子逼近的饱和理论

设Ω是实数集合，ρ_0是Ω的极限点，X是赋范线性空间，$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是X到自身内的一致有界的线性算子列，若对每个$f\in X$有

$$\|L_\rho(f)-f\|_X=o(1)\qquad(\rho\to\rho_0),$$

则说$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是X上的逼近恒等列。

记

$$I(L_\rho)=\{f\mid f\in X且L_\rho(f)=f,\ \rho\in\Omega\},$$

并称集合$I(L_\rho)$为$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的不动元集。

现在设$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是X上的逼近恒等列，若存在$\varphi(\rho)\to0^+$（$\Omega\ni\rho\to\rho_0$）使得如下条件成立：

Ⅰ）对$f\in X$有

$$\varliminf_{\rho\to\rho_0}\frac{\|L_\rho(f)-f\|_X}{\varphi(\rho)}=0\Longleftrightarrow f\in I(L_\rho)$$

Ⅱ）存在$f_0\in X\setminus I(L_\rho)$使得

$$\|L_\rho(f_0)-f_0\|_X=O(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0),$$

则说算子序列$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在X中是饱和的，$\varphi(\rho)$为$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在X的饱和阶，而X中的子集

$$F_X(L_\rho)=\{f_0\mid f_0\notin I(L_\rho)且\|L_\rho(f_0)-f_0\|_X=O(\varphi(\rho))\}$$为$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在X中的饱和类或Favard类

通常称饱和定义中的条件Ⅰ）为小o饱和条件，而满足小o饱和条件的算子序列$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$说成在X中具有小o饱和性质，或$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在X中是小o饱和的。称饱和定义中的条件Ⅱ）为大O饱和条件，而满足大O饱和条件的算子序列$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$说成在X中具有大O饱和性质，或$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在X中是大O饱和的。

自然要问，在X中饱和的算子序列$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$其饱和阶$\varphi(\rho)$是唯一的吗？我们有

引理4·1.（R．A．DeVore）设$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是X上的逼近恒等列，如下断言成立：

Ⅰ）若$\psi(\rho)$，$\varphi(\rho)$都是$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的饱和阶，则有如下弱等阶关系：

$$\varphi(\rho)\asymp\psi(\rho)\qquad(\rho\to\rho_0)$$

Ⅱ）若$\varphi(\rho)$是$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的饱和阶且有弱等阶关系

$$\psi(\rho)\asymp\varphi(\rho)\qquad(\rho\to\rho_0)$$

则$\psi(\rho)$也是$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的饱和阶。

证明　首先设$\varphi(\rho)$，$\psi(\rho)$都是$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在X上的饱和阶，但弱等价关系$\varphi(\rho)\asymp\psi(\rho)$

$(\rho\to\rho_0)$不成立，不妨设 $\lim\limits_{\rho\to\rho_0}\dfrac{\psi(\rho)}{\varphi(\rho)}=0$，即存在$\rho_j\to\rho_0$ $(j\to+\infty)$使得

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\psi(\rho_j)}{\varphi(\rho_j)}=0$$

由于$\psi(\rho)$是$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的饱和阶，所以由大O饱和条件Ⅰ)，存在$f_0\in X\setminus I(L_\rho)$，使得

$$\|L_\rho(f_0)-f_0\|_X=O(\psi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0).$$

于是有

$\|L_{\rho_j}(f_0)-f_0\|_X=O(\psi(\rho_j))=o(\varphi(\rho_j))$ $(j\to+\infty)$因此得到

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{\|L_\rho(f_0)-f_0\|_X}{\varphi(\rho)}=0$$

又因为$\varphi(\rho)$也是$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的饱和阶，所以由小o饱和条件推出$f_0\in I(L_\rho)$，与$f_0\in X\setminus I(L_\rho)$矛盾，因而必有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{\psi(\rho)}{\varphi(\rho)}=C_1>0,$$

即存在$C_1>0$使得

$$\frac{\psi(\rho)}{\varphi(\rho)}\geqslant C_1>0\qquad(\rho\to\rho_0)$$

同样可证，存在$C_2>0$使得

$$\frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}\geqslant C_2>0\qquad(\rho\to\rho_0)$$

因此得到

$$\varphi(\rho)\asymp\psi(\rho)\qquad(\rho\to\rho_0).$$

即1)得证。

其次，设$\varphi(\rho)$是$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在X上的饱和阶且

$$\varphi(\rho)\asymp\psi(\rho)\qquad(\rho\to\rho_0)$$

即存在C_1，$C_2>0$使得

$$0<C_1\leqslant\frac{\psi(\rho)}{\varphi(\rho)}\leqslant C_2<+\infty\qquad(\rho\to\rho_0)$$

于是由小o饱和条件导出，对$f\in X$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{\|L_\rho(f)-f\|_X}{\psi(\rho)}=0\iff\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{\|L_\rho(f)-f\|_X}{\varphi(\rho)}=0$$

$$\iff f\in I(L_\rho)$$

而由大O饱和条件导出，存在$f_0\in X\setminus I(L_\rho)$有

$$\|L_\rho(f_0)-f_0\|_X=O(\varphi(\rho))=O(\psi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0).$$

可见$\psi(\rho)$也是$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在X上的饱和阶.证毕

由引理4·1的断言可见，在弱等价意义下$\{L_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在X上的饱和阶是唯一的，从而方便了对饱和理论的研究。

应当指出，R·A·DeVore首先在小o饱和条件中用下限代替极限，这样才使得饱和阶

的唯一性得到满足。

本章将分别研究周期卷积算子族，一致有界线性算子族的依范数饱和性质和点态饱和性质，并建立一般的饱和定理。

§1 周期函数类的Fourier特征

为了研究周期卷积算子族在 $X_{2\pi}^{p}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上的饱和性质，P·L·Butzer 提出了所谓“Fourier技巧”，因此，首先需要考查周期函数类的Fourier系数的特征

1.1.可微周期函数类的Fourier特征

首先回顾Fourier系数的一些重要性质，设 $f\in L_{2\pi}^{1}$，其Fourier系数为

$$f(\cdot)^{\wedge}(k)=\hat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt\quad(k\in Z),$$

则有

Ⅰ）对每个 $k\in Z$，$|\hat{f}(k)|\leqslant\|f\|_{1}$。

Ⅱ）由于对每个 $k\in Z$，

$$\hat{f}(k)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-f\left(t+\frac{\pi}{k}\right)\right)e^{-ikt}dt$$

所以有

$$\left|\hat{f}(k)\right|\leqslant\frac{1}{2}\omega\left(f,\frac{\pi}{|k|}\right)_{1}$$

因此有 $\hat{f}(k)\to 0\quad(|k|\to+\infty)$

Ⅲ）对任意实数h，有

$$f(\cdot+h)^{\wedge}(k)=e^{ikh}\hat{f}(k)\qquad(k\in Z)\tag{1·1}$$

从而有

$$\begin{aligned}\Delta_{h}^{r}(f,\cdot)^{\wedge}(k)&=\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}f(\cdot+jh)^{\wedge}(k)\\&=\left(\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e^{ihkj}\right)\hat{f}(k)\\&=\left(e^{jkh}-1\right)^{r}\hat{f}(k)\end{aligned}$$

Ⅳ）若 $f\in L_{2\pi}^{1}$ 且 $\hat{f}(k)=0$（$k\in Z$），则有 $f(x)=0$（a.e）。若 $\hat{f}(k)=0$（$k\in Z$ 且 $k\neq0$），则 $f(x)=\hat{f}(0)$（a.e）。

设 $C=\{C_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ 是一复数列，令

$$\|C\|_p=\begin{cases}(\sum\limits_{k\in Z}|C_k|^p)^{\frac{1}{p}} & (1\leq p<+\infty),\\ \sup\limits_{k\in Z}|C_k| & (p=+\infty).\end{cases}$$

$$l_p=\left\{C=\{C_k\}_{k\in Z},\text{且}\|C\|_p<+\infty\right\}$$

$$l_\infty^0=\left\{C\,\middle|\,C\in l_\infty\ \text{且}C_k\to 0(|k|\to+\infty)\right\}$$

V)若 $f\in L_{2\pi}^1$，记 $\hat{f}=\left\{\hat{f}(k)\right\}_{k\in Z}$，则 $\hat{f}\in l_\infty^0$，从而有

$$L_1^{\wedge}=\left\{\hat{f}\,\middle|\,f\in L_{2\pi}^1\right\}\subset l_\infty^0 \qquad (1\cdot 3)$$

包含关系（1·3）是真包含，例如三角级数 $g(x)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{\ln k}$，对x点点收敛，但由于

$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}=+\infty$，所以 三角级数 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{\ln k}$ 不是 $L_{2\pi}^1$ 中某个函数的Fourier级数。因此取

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{\ln k} & k\geq 2\\ 0 & k<2\end{cases},\qquad a=\{a_k\}_{k\in Z}$$

则有 $a\in l_\infty^0$，但 $a\notin L_1^{\wedge}$。

为了讨论可微的周期函数类的Fourier特征，我们还需要如下引理

引理4.2 设 $r\in N$，$X_p^r=\left\{f\,|\,f\in X_{2\pi}^p\text{且}f^{(r)}\in X_{2\pi}^p\right\}$ 如下断言成立

Ⅰ)若 $f\in X_p^r$（$1\leq p<+\infty$），则对每个 $k\in Z$ 有

$$f^{(r)\wedge}(k)=(ik)^r\hat{f}(k), \qquad (1\cdot 4)$$

Ⅱ)设 $f\in X_{2\pi}^p$，若存在 $g\in X_{2\pi}^p$ 使得对 $k\in Z$ 有

$$\hat{g}(k)=(ik)^r\hat{f}(k), \qquad (1\cdot 5)$$

则 $f\in X_p^r$。

证明 首先设 $f\in X_p^r$ 我们只证明 $r=1$ 的情况，对一般的 $r\in N$，可应用归纳法证得由于 $f\in X_{2\pi}^p$，所以有

$$(f')^{\wedge}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}dt$$

利用分部积分法得

$$(f')^{\wedge}(k)=\frac{1}{2\pi}\left[f(t)e^{-ikt}\Big|_{-\pi}^{\pi}+ik\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt\right]$$

$$=ik\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt=(ik)\hat{f}(k)$$

即对$k\in Z$有

$$(f')^{\wedge}(k)=(ik)\hat{f}(k),$$

(1·4) 得证。

其次，设存在$g\in X_{2\pi}^{p}$ 使得对每个$k\in Z$有

$$\hat{g}(k)=(ik)^{r}\hat{f}(k).$$

令

$$G_0(x)=g(x),$$

$$G_1(x)=\int_{-\pi}^{x}\left[G_0(x_r)-\hat{G}_0(0)\right]dx_r,$$

$$G_2(x)=\int_{-\pi}^{x}\left[G_1(x_{r-1})-\hat{G}_1(0)\right]dx_{r-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_r(x)=\int_{-\pi}^{x}\left[G_{r-1}(x_1)-\hat{G}_{r-1}(0)\right]dx_1$$

则$G_r(x)\in X_p^r$ 且 $G_r^{(r)}(x)=g(x)$ (a.e)，因此由(1.4)导出

$$\hat{g}(k)=G_r^{(r)\wedge}(k)=(ik)^r\hat{G}_r(k),$$

于是由条件(1.5)得到对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\hat{G}_r(k)=\hat{f}(k)$$

利用上述的 iv) 导出

$$f(x)-G_r(x)=\hat{f}(0)-\hat{G}_r(0)\quad(a.e)$$

因此得到

$$f(x)=G_r(x)+\hat{f}(0)-\hat{G}_r(0)\in X_p^r.$$

证毕

现在设 $\{\psi_k\}_{k\in Z}$ 是已知的复数列，记

$$W_p(\psi_k)=\left\{f\mid f\in X_{2\pi}^p \text{且存在} g\in X_{2\pi}^p \text{使得} \psi_k\hat{f}(k)=\hat{g}(k),\ k\in Z\right\}.$$

于是引理4.2导出，设 $f\in X_{2\pi}^p$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，则有

$$f\in X_p^r \Longleftrightarrow f\in W_p\left\{(ik)^r\right\} \qquad (1.6)$$

其中 $r\in N$。

更一般地，记

$$V_p^r=\begin{cases}\left\{f\mid f\in C_{2\pi},\ f^{(r-1)}\in AC_{2\pi}\text{且} f^{(r)}\in L_{2\pi}^{\infty}\right\}, & (p=\infty).\\ \left\{f\mid f\in L_{2\pi}^p,\text{存在}\phi=f(a,e)\text{且}\phi\in L_p^r\right\}, & (1<p<+\infty).\\ \left\{f\mid f\in L_{2\pi}^1,\text{存在}\phi=f(a,e),\phi^{(r-2)}\in AC_{2\pi},\ \dot\phi^{(r-1)}\in BV_{2\pi}\right\}, & (p=1.)\end{cases}$$

明显地，$X_p^r\subset V_p^r(1\leqslant p\leqslant+\infty,\ r\in N)$。又记

$$V_p\{\psi_k\}=\begin{cases}\{f\mid f\in X_{2\pi}^p,\text{存在} g\in L_{2\pi}^p \text{使得} \hat{g}(k)=\psi_k\hat{f}(k)\}; & (1<p\leqslant+\infty,\ )\\ \{f\mid f\in L_{2\pi}^1,\text{存在}\mu\in BV_{2\pi}\text{使得}\ \mu^{\vee}(k)=\psi_k\hat{f}(k)\}; & (p=1).\end{cases}$$

明显地，$W_p\{\psi_k\}=V_p\{\psi_k\}$ $(1<p<+\infty)$

关于 V_p^r 类函数的Fourier特征有

引理4·3 设 $f\in X_{2\pi}^p$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$r\in N$，则有

$$f\in V_p^r \Longleftrightarrow f\in V_p\left\{(ik)^r\right\}. \qquad (1\cdot7)$$

证明 当 $1<p\leqslant+\infty$ 时，等价关系（1·7）的证明与引理4·2的证明相同，我们仅需证明 $p=1$ 时等价关系（1·7）成立。

$\Longrightarrow$)．设 $f\in V_1^r$，即存在 $\phi=f(a,e)$ 且 $\phi^{(r-2)}\in AC_{2\pi}$，$\phi^{(r-1)}\in BV_{2\pi}$，因此有

$$\phi^{(r-1)\vee}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}d\phi^{(r-1)}(t)$$

利用分部积分法和（1·4）得到，对每个 $k\in Z$ 有

$$\phi^{(r-1)\vee}(k)=ik\phi^{(r-1)\wedge}(k)=(ik)^r\phi^{\wedge}(k)=(ik)^r\hat{f}(k).$$

取 $d\mu=d\phi^{(r-1)}$ 得到

$$\mu^{\vee}(k)=(ik)^r\ \hat{f}(k) \qquad (k\in Z),$$

即 $\in V_1\{(ik)^r\}$。

$\Longleftarrow$)．设 $f\in V_1\{(ik)^r\}$，即存在 $\mu\in BV_{2\pi}$ 使得对 $k\in Z$，有

$$\mu^{\vee}(k)=(ik)^{r}\hat{f}(k) \tag{1.8}$$

令

$$G(x)=\int_{-\pi}^{x}d\mu(t)-\mu^{\vee}(0)\int_{-\pi}^{x}dt$$

$$G_1(x)=\int_{-\pi}^{x}(G(x_{r-1})-\hat{G}(0))dx_{r-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_{r-1}(x)=\int_{-\pi}^{x}(G_{r-2}(x_1)-\widehat{G_{r-2}}(0))dx_1$$

则 $G_{r-1}(x)\in AC_{2\pi}^{r-2}$ 且 $dG_{r-1}^{(r-1)}(x)=d\mu(x)$ (a.e)，于是对每个$k\in Z$有

$$\mu^{\vee}(k)=G_{r-1}^{(r-1)\vee}(k)=(ik)^{r}\widehat{G_{r-1}}(k)$$

由（1.8）得到，对$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\widehat{G_{r-1}}(k)=\hat{f}(k),$$

从而由IV）导出

$$f(x)=G_{r-1}(x)+\hat{f}(0)-\widehat{G_{r-1}}(0)\in V_1^r.$$

证毕

引理4.4. 设$f\in X_{2\pi}^{p}(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$r\in N$，则

$$f\in V_p^r\Longleftrightarrow W_r(f,t)_p=O(t^r)\quad(t\to0^+). \tag{1.9}$$

证明 ⟹）. 设$f\in V_p^r$，若$p=\infty$，则对$h>0$有

$$\Delta_h^r(f,x)=\int_0^h\int_0^h\cdots\int_0^h f^{(r)}(x+u_1+\cdots+u_r)du_1du_2\cdots du_r$$

因此有

$$\|\Delta_h^r(f)\|_{C_{2\pi}}\leqslant\|f^{(r)}\|_\infty h^r \tag{1.10}$$

若 $1<p<+\infty$，则对$h>0$有

$$\Delta_h^r(f,x)=\int_0^h\int_0^h\cdots\int_0^h\phi^{(r)}(x+u_1+\cdots u_r)du_1du_2\cdots du_r,$$

因此由Minkowski 不等式导出

$$\|\Delta_h^r(f)\|_p\leqslant\|\phi^{(r)}\|_p h^r \tag{1.11}$$

若$p=1$，由于对$h>0$有

$$\Delta_h^r(f,x)=\Delta_h(\Delta_h^{r-1}(f),x)=\Delta_h^{r-1}(f,x+h)-\Delta_h^{r-1}(f,x)$$

$$=h^{r-1}\int_0^1\cdots\int_0^1\Big[\phi^{(r-1)}(x+h+hu_1+\cdots+hu_{r-1})$$

$$-\phi^{(r-1)}(x+hu_1+\cdots+hu_{r-1})\Big]du_1du_2\cdots du_{r-1}$$

所以

$$\|\Delta_h^r(f)\|_1\leqslant h^{r-1}\|\phi^{(r-1)}(\cdot+h)-\phi^{(r-1)}(\cdot)\|_1$$

因为$\phi^{(r-1)}\in BV_{2\pi}$，所以不妨设$\phi^{(r-1)}$是单调增加的，于是对$h>0$有

$$\|\phi^{(r-1)}(\cdot+h)-\phi^{(r-1)}(\cdot)\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\phi^{(r-1)}(x+h)-\phi^{(r-1)}(x)\Big]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}\phi^{(r-1)}(x)dx-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi^{(r-1)}(x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi+h}\phi^{(r-1)}(x)\,dx-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi+h}\phi^{(r-1)}(x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi+h}\Big[\phi^{(r-1)}(x)-\phi^{(r-1)}(x-2\pi)\Big]dx$$

$$=\frac{h}{2\pi}(\phi^{(r-1)}(\pi)-\phi^{(r-1)}(-\pi))=h\|\phi^{(r-1)}\|_{BV_{2\pi}}$$

从而得到

$$\|\Delta(f)\|_1\leqslant h^r\|\phi^{(r-1)}\|_{BV_{2\pi}} \tag{2.12}$$

由(1.11)—(1.12)即得$\omega_r(f,t)_p=O(t^r)\quad(t\to0^+)$。

"$\Leftarrow$"，设$f\in X_{2\pi}^p$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$且

$$\omega_r(f,t)_p=O(t^r)\qquad(t\to0^+).$$

即对$h\to0^+$有

$$\frac{\|\Delta_h^r(f)\|_p}{h^r}=O(1) \tag{1.13}$$

若$p=\infty$，由(1.13)和$L_{2\pi}^{\infty}$的弱紧密性导出，存在$h_j\to0^+(j\to+\infty)$和$g\in L_{2\pi}^{\infty}$使得对$\forall S(x)\in L_{2\pi}^1$有

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_{h_j}^r(f,x)}{h_j^r}S(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)S(x)dx.$$

特别取$S_k(x)=e^{-ikx}(k\in Z)$，由(1.2)导出

$$\lim_{j\to+\infty}\left(\frac{e^{ikh_j}-1}{h_j}\right)^r\hat{f}(k)=\hat{g}(k)$$

或对每个$k\in Z$有

$$\hat{g}(k)=(ik)^r\hat{f}(k)$$

所以有$f\in V_\infty^r$。

若$1<p<+\infty$，由(1.3)和$L_{2\pi}^p$的弱致密性导出，存在$h_j\to0^+(j\to+\infty)$和$g\in L_{2\pi}^p$使得对$\forall S(x)\in L_{2\pi}^q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$有

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_{h_j}^r(f,x)}{h_j^r}S(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)S(x)dx.$$

同样地讨论得到，对每个$k\in Z$有

$$(ik)^r\hat{f}(k)=\hat{g}(k)$$

即$f\in V_p^r$ $(1<p<+\infty)$。

最后，若$p=1$令

$$\mu_h(x)=\int_{-\pi}^{x}\frac{\Delta_h^r(f,u)}{h^r}du$$

则$\mu_h\in AC_{2\pi}$，且

$$\|\mu_h\|_{BV_{2\pi}}=\frac{\|\Delta_h^r(f)\|_1}{h^r}=O(1)$$

于是利用Helly－Bary选择原理，存在$h_j\to0^+(j\to+\infty)$和$\mu\in BV_{2\pi}$使得对每个$S(x)\in C_{2\pi}$有

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(u)\frac{\Delta_{h_j}^r(f,u)}{h_j^r}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\,d\mu(x)$$

同样地取$S(u)=e^{-iku}$（$k\in Z$）导出

$$\check{\mu}(k)=(ik)^r\hat{f}(k)$$

即 $f\in V_1^r$证毕。

由引理2.3得到，设$f\in X_{2\pi}^p$（$1\le p\le\infty$），$r\in N$则

$$\omega_r(f,t)_p=O(t^r)\ (t\to0^+)\Longleftrightarrow\omega(f^{(r-1)},t)_p=O(t)\ (t\to0^+)\qquad(1.14)$$

因此由引理4.2——4.4导出可微周期函数类的如下特征定理。

定理4.1 设$f\in X_{2\pi}^p$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$r\in N$，则如下命题是等价的：

Ⅰ）$f\in V_p^r$，

Ⅱ）$f\in V_p\{(ik)^r\}$，

Ⅲ）$\omega_r(f,t)_p=O(t^r)\quad(t\to0^+)$。

Ⅳ）$\omega(f^{(r-1)},t)_p=O(t)\quad(t\to0^+)$。

特别地，有

推论4.1 设$f\in X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，则如下命题是等价的：

Ⅰ）$f\in V_p^2$，

Ⅱ）$f\in V_p\{k^2\}$，

Ⅲ）$\omega_2(f,t)_p=O(t^2)\qquad(t\to0^+)$。

Ⅳ）$\omega(f',t)_p=O(t)\qquad(t\to0^+)$。

1.2．共轭函数类的Fourier特征

设$f\in X_{2\pi}^p$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，称

$$\tilde f(x)=P.V.\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt\qquad(1.15)$$

为的f共轭函数，其中Cauchy主值

$$P.V.\frac{1}{2\pi}\int f(x-t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt=\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}f(x-t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt$$

$$\overset{(记)}{=\!=}\lim_{\delta\to0^+}f_\delta(x).$$

关于共轭函数Lusin－Privalov得到如下结果，若$f\in X_p^{2\pi}(1\leqslant p\leqslant\infty)$，则$\tilde f$几乎处处存在，且有

Ⅰ）当$1<p<+\infty$时，有$\tilde f\in L_{2\pi}^p$且

$$\|f_\delta\|_p\leqslant M_p\|f\|_p,\ \|\tilde f\|_p\leqslant M_p\|f\|_p\qquad(1.16)$$

通称(1.16)为Riesz不等式。

Ⅱ）当$p=1$时，存在正常数M使得

$$\text{mes}\left\{x \mid x\in(-\pi,\pi) \text{ 且 } |\tilde{f}(x)|\geqslant y>0\right\}\leqslant\frac{M}{y}\|f\|_1$$ (1.7)特别应当指出，

当$f\in L^1_{2\pi}$(或$C_{2\pi}$)时，其共轭函数$\tilde{f}(x)$虽然几乎处处存在，但并不一定属于$L^1_{2\pi}$(或$C_{2\pi}$)。

为研究共轭函数类的Fourier特征，需要如下一些引理。

引理4.5 对每个$k\in Z$，有

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\text{ctg}\frac{t}{2}e^{-ikt}dt=-i\,\text{sgn}k \tag{1.18}$$

证明．$k=0$是明显的，现设$K\in N\setminus\{0\}$。由于

$$\frac{1}{2}\text{ctg}\frac{t}{2}=\frac{1}{t}+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{t-2\pi j}+\frac{1}{2\pi j}\right),$$

且对$\delta\leqslant|t|\leqslant\pi$一致收敛，所以有

$$\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\text{ctg}\frac{t}{2}e^{-ikt}dt$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{e^{-ikt}}{t}dt\right)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{t-2\pi j}+\frac{1}{2\pi j}\right)e^{-ikt}dt$$

$$=\lim_{\delta\to0^+}\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|<\infty}\frac{e^{-ikt}}{t}dt$$

$$=\frac{2}{\pi}(-i\,\text{sgn}k)\lim_{\delta\to0^+}\lim_{\eta\to+\infty}\int_{\delta|k|}^{\eta|k|}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$=-i\,\text{sgn}k.$$

证毕

由（1·18）导出，对每个$k\in Z$有

$$\hat{f}_\delta(k)=\hat{f}(k)\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\text{ctg}\frac{t}{2}e^{-ikt}dt$$

因此，若$\tilde{f}\in L^1_{2\pi}$，则其Fourier系数有

$$\hat{\tilde{f}}(k)=\lim_{\delta\to0^+}\hat{f}_\delta(k)=(-i\,\text{sgn}k)\hat{f}(k) \tag{1.19}$$

因而，若$f\in L^p_{2\pi}(1<p<+\infty)$，或$f\in L^1_{2\pi}$且$\tilde{f}\in L^1_{2\pi}$或$f\in C_{2\pi}$且$\tilde{f}\in C_{2\pi}$，我们有

$$\tilde{f}\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{\tilde{f}}(k)e^{ikx}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-i\,\text{sgn}k)\hat{f}(k)e^{ikx}.$$

记

$$\widetilde{V}_p^r=\left\{f: f\in X_{2\pi}^p 且 \tilde{f}\in V_p^r\right\}.$$

由定理4.1导出，若$f\in X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，则

$$f\in\widetilde{V}_p^r \Longleftrightarrow \omega_r(\tilde{f},t)_p=O(t^r) \qquad (t\to0^+)$$

$$\Longleftrightarrow \omega\left(\tilde{f}^{(r-1)},\ t\right)_p=O(t) \qquad (t\to0^+)$$

关于 $\widetilde{V}_p^r$ 的Fourier特征有如下结果。

引理4·6 $f\in X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$r\in N$，则

$$f\in\widetilde{V}_p^r \Longleftrightarrow f\in V_p\left\{(-i\operatorname{sgn}k)(ik)^r\right\} \tag{1.20}$$

证明． 由于$f\in X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$则由定理4.1得到

$$f\in\widetilde{V}_p^r \Longleftrightarrow \tilde{f}\in V_p^r \Longleftrightarrow \tilde{f}\in V_p\left\{(ik)^r\right\} \tag{1.21}$$

因此，若$1<p\leqslant+\infty$，则由(1.21)成立当且仅当存在$g\in L_{2\pi}^p$使得对每个$k\in Z$有

$$\hat{g}(k)=(ik)^r\,\tilde{f}^{\wedge}(k)$$

又由(1.19)导出，对每个$k\in Z$有

$$\hat{g}(k)=(ik)^r(-i\operatorname{sgn}k)\hat{f}(k),$$

即$f\in V_p\left\{(-i\operatorname{sgn}k)(ik)^r\right\}(1<p\leqslant+\infty)$。若$p=1$时，则(1.21)成立，当且仅当存在$\mu\in BV_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$$\mu^{\vee}(k)=(ik)^r\,\tilde{f}^{\wedge}(k)$$

同样地，由(1.19)导出，对每个$k\in Z$有

$$\mu^{\vee}(k)=(-i\operatorname{sgn}k)(ik)^r\hat{f}(k),$$

即$f\in V_1\left\{(-i\operatorname{sgn}k)(ik)^r\right\}$。引理证毕

由上述的结论导出，函数类$\widetilde{V}_p^r$的如下特征定理。

定理4·2 设$f\in X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$r\in Z$，则如命题是等价的：

Ⅰ) $f\in V_p^r$,

Ⅱ) $f\in V_p\left\{(-i\operatorname{sgn}k)(ik)^r\right\}$,

Ⅲ) $\omega_2(f,t)_p=O(t^r)$　　$(t\to0^+)$,

Ⅳ) $\omega(\widetilde{f}^{(r-1)},t)_p=O(t)$　　$(t\to0^+)$.

特别地，有

推论1·2　设 $f\in X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，则如下命题是等价的：

Ⅰ) $f\in\widetilde{V}_p^1$

Ⅱ) $f\in V_p\left\{(i\operatorname{sgn}k)\,k^1\right\}$,

Ⅲ) $\omega_2(\widetilde{f},t)_p=O(t^1)$　　$(t\to0^+)$,

Ⅳ) $\omega(\widetilde{f}',t)_p=O(t)$　$(t\to0^+)$.

1·3复数列为Fourier系数列的充要条件.

设 $\widehat{f}=\left\{\widehat{f}(k)\right\}_{k\in Z}$为Fourier系数列．记

$$L_p^{\wedge}=\left\{\widehat{f}\mid\widehat{f}=\{f^{\wedge}(k)\}_{k\in Z}\text{且}f\in L_{2\pi}^p\right\}\quad(1\leqslant p\leqslant+\infty),$$

$$C_{2\pi}^{\wedge}=\left\{\widehat{f}\mid\widehat{f}=\{\widehat{f}(k)\}_{k\in Z}\text{且}f\in C_{2\pi}\right\}.$$

由于$\widehat{C_{2\pi}}\subset\widehat{L_p}\subset\widehat{L_1}\subset l_\infty^0$．因此自然要研究复数列$\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}\in l_\infty^0$应具有怎样的条件才能使得$\lambda\in\widehat{L_p}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）或$\lambda\in\widehat{C_{2\pi}}$呢？准确地说，复数列$\lambda$应具有怎样的条件才能确保存在$g\in L_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）或$g\in C_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有$\widehat{g}(k)=\lambda_k$呢？令

$$\sigma_n^{(\lambda)}(x)=\sum_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\lambda_k e^{ikx}\tag{1·22}$$

我们有

定理4·3　设$\lambda=\left\{\lambda_k\right\}_{k\in Z}\in l_\infty^0$，则

Ⅰ) $\lambda\in\widehat{C_{2\pi}}\Longleftrightarrow\|\sigma_n^{(\lambda)}-\sigma_m^{(\lambda)}\|_{C_{2\pi}}=o(1)$　$(m、n\to\infty)$.

Ⅰ) $\lambda\in L\hat{_1}\Longleftrightarrow \|\sigma_m^{(\lambda)}-\sigma_m^{(\lambda)}\|_1=o(1)\quad (m,n\to+\infty)$。

Ⅱ) $\lambda\in L\hat{_p}\Longleftrightarrow \|\sigma_n^{(\lambda)}\|_p=O(1)\qquad (1<p\leqslant+\infty)$。

证明 $\Longrightarrow$). 设 $\lambda\in \hat{C_{2\pi}}$ 或 $\lambda\in L\hat{_p}$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，即存在 $g\in X_{2\pi}^p$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 使得 $\hat{g}(k)=\lambda_k\quad(k\in Z)$，于是由卷积运算性质，有

$$\sigma_n^{(\lambda)}(x)=\sum_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\lambda_k e^{ikx}$$

$$=\sum_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\hat{g}(k)e^{ikx}=\sigma_n(g,x)$$

其中σ_n是Fe'jer算子，由卷积算子的逼近定理得到，当$n\to+\infty$时有

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}(\cdot)-g(\cdot)\|_{X_{2\pi}^p}=o(1)$$

因此有

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}-\sigma_m^{(\lambda)}\|_{C_{2\pi}}=o(1),\qquad (m,n\to+\infty),$$

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}-\sigma_m^{(\lambda)}\|_1=o(1),\qquad (m,n\to+\infty),$$

以及

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_p=O(1)\qquad (1<p<+\infty)$$

其次，设 $\lambda\in L\hat{_\infty}$，即存在 $g\in L_{2\pi}^\infty$ 使得对每个 $k\in Z$ 有 $\hat{g}(k)=\lambda_k$，从而有

$$\sigma_n^{(\lambda)}(x)=\sigma_n(g,x)$$

由于对 $g\in L_{2\pi}^\infty$，$\sigma_n(g,x)\xrightarrow{w^*}g(x)\ (n\to+\infty)$，即对 $\forall S(x)\in L_{2\pi}^1$ 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sigma_n^{(\lambda)}(x)-g(x)\right)S(x)dx=o(1)\qquad (n\to+\infty)$$

从而导出，当$n\to+\infty$时，有

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}-g\|_\infty=O(1)$$

故

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_\infty=O(1).$$

$\Longleftarrow$)，由于当$n>|m|$时有

$$\sigma_n^{(\lambda)\wedge}(m)=\left(1-\frac{|m|}{n+1}\right)\lambda_m$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-imx}\sigma_n^{(\lambda)}(x)dx=\lambda_m \qquad (1\cdot 23)$$

若 $\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_p=O(1)$ $(1<p\leqslant+\infty)$，不妨设 $\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_p\leqslant 1$，由 $L_{2\pi}^p$ 的弱致密性，存在 $\sigma_{n_j}^{(\lambda)}(x)$ 和 $g\in L_{2\pi}^p$ 使得对 $\forall S(x)\in L_{2\pi}^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 有

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{n_j}^{(\lambda)}(x)S(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)S(x)dx$$

特别取 $S(x)=e^{-ikx}(k\in Z)$，由（1·23）得到

$$\lambda_k=\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_{n_j}^{(\lambda)}(x)e^{-ikx}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-ikx}dx=\hat{g}(k).$$

即 $\lambda\in L_p^{\wedge}$（$1<p\leqslant+\infty$）。

其次，设 $\|\sigma_n^{(\lambda)}-\sigma_m^{(\lambda)}\|_1=o(1)$ $(m,\ n\to+\infty)$，由于 $L_{2\pi}^1$ 是完备的，所以存在 $g\in L_{2\pi}^1$ 使得

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}-g\|_1=o(1) \qquad (n\to+\infty)$$

又因为

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(x)-\sigma_n^{(\lambda)}(x)\right)e^{-ikx}dx\right|\leqslant\|g-\sigma_n^{(\lambda)}\|_1$$

所以得到 $\lambda_k=\hat{g}(k)$ $(k\in Z)$，即 $\lambda\in L_1^{\wedge}$。

同样地，若 $\|\sigma_n^{(\lambda)}-\sigma_m^{(\lambda)}\|_{C_{2\pi}}=o(1)$（$m,\ n\to+\infty$），则由完备性和（1·23）导出，存在 $g\in C_{2\pi}$ 使得

$$\lambda_k=\hat{g}(k) \qquad (k\in Z)$$

即 $\lambda\in C_{2\pi}^{\wedge}$。证毕

现在记

$$BV_{2\pi}^{\wedge}=\left\{\mu^{\vee}\mid\mu^{\vee}=\{\mu^{\vee}(k)\}_{k\in Z}\text{且}\mu\in BV_{2\pi}\right\}$$

定理4·4 设 $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$，则

$$\lambda\in BV_{2\pi}^{\wedge}\Longleftrightarrow\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_1=O(1).$$

证明 $\Longrightarrow$）设 $\lambda\in BV_{2\pi}^{\wedge}$，即存在 $\mu\in BV_{2\pi}$ 使得

$$\mu^{\vee}(k)=\lambda_k \qquad (k\in Z)$$

则

$$\sigma_n^{(\lambda)}(x)=\sum_{|k|\leq n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\lambda_k e^{ikx}$$

$$=\sum_{|k|\leq n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\mu^{\vee}(k)e^{ikx}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x-t)d\mu(t)$$

其中F_n是Feje'r核函数，所以有

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_1\leq\|\mu\|_{BV}<+\infty.$$

$\Longleftarrow$）设 $\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_1=O(1)$，不妨设 $\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_1\leq 1$，令

$$\mu_n(x)=\int_{-\pi}^{x}\sigma_n^{(\lambda)}(t)dt$$

则 $\mu_n\in BV_{2\pi}$且$\|\mu_n\|_{BV}\leq 2\pi$，于是由Helly－Bary选择原理，存在$d\mu\in BV_{2\pi}$和子列$\{d\mu_{n_j}\}$使，对$\forall h(x)\in C_{2\pi}$有

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)d\mu_{n_j}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)d\mu(x)$$

特别取$h(x)=e^{-ikx}(k\in Z)$，由（1·23）得到

$$\lambda_k=\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}\sigma_{n_j}^{(\lambda)}(x)dx=\mu^{\vee}(k)$$

即$\lambda\in BV_{2\pi}^{\wedge}$，证毕。

由定理4·3—4·4直接导出如下结果。

推论4·3 设 $f\in X_{2\pi}^{p}$（$1\leq p\leq+\infty$），则

$$f\in W_p\{\psi_k\}\Longleftrightarrow\|\sigma_n^{(\lambda)}-\sigma_m^{(\lambda)}\|_p=o(1) \qquad (m,n\to+\infty)$$

其中$\lambda=\{\psi_k\hat{f}(k)\}_{k\in Z}$。

推论4·4 设 $f\in X_{2\pi}^{p}$（$1\leq p\leq+\infty$），则

$$f\in V_p\{\psi_k\}\Longleftrightarrow\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_p=O(1) \qquad (n\to+\infty).$$

其中$\lambda=\{\psi_k\hat{f}(k)\}_{k\in Z}$。

特别地有

$$f\in V_p\{(ik)^r\}\Longleftrightarrow\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_p=O(1)\qquad(n\to+\infty).$$

其中$\lambda=\{(ik)^r\hat{f}(k)\}_{k\in Z}$。

现在讨论实数列$\lambda\in L_1^{\wedge}$的充分条件，设$\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$是已知的实数列，若对每个$k\in N$有$\lambda_{-k}=\lambda_k$则说$\lambda$是偶型实数列，记作$\lambda=\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$。令

$$\Delta\lambda_k=\lambda_{k+1}-\lambda_k$$

$$\Delta^2\lambda_k=\Delta(\Delta\lambda_k)=\Delta\lambda_{k+1}-\Delta\lambda_k$$

$$=\lambda_{k+2}-2\lambda_{k+1}+\lambda_k,\quad(k=0,1,2\cdots)$$

若对每个$k\geqslant 0$有$\Delta^2\lambda_k\geqslant 0$，则说$\lambda=\{\lambda_k\}_{k=0}^{+\infty}$是凸的。若

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k|<+\infty$$

则说$\lambda=\{\lambda k\}_{k=0}^{\infty}$是拟凸的。

关于凸和拟凸的实数列具有如下性质。

引理4·7　设$\lambda=\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$是有界凸列。则

Ⅰ)　$\Delta\lambda_k\leqslant 0\qquad(k=0,1,2,\cdots)$,

Ⅱ)　$k\Delta\lambda_k\to 0\qquad(k\to+\infty)$,　　　(1·24)

Ⅲ)　$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k<+\infty$。

证明　Ⅰ)利用反证法，设对某个$k_0\in N$，有$\alpha=\Delta\lambda_{k_0}>0$、由于$\lambda$是凸的，即$\Delta^2\lambda_k=\Delta\lambda_{k+1}-\Delta\lambda_k\geqslant 0$或$\{\Delta\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$是增加数列，从而当$k\geqslant k_0$时有

$$\Delta\lambda_k\geqslant\Delta\lambda k_0=a$$

因此得到，当$k\geqslant k_0$时有

$$\lambda_k-\lambda_{k_0}=\sum_{j=k_0}^{k-1}\Delta\lambda_j\geqslant(k-k_0)a$$

或当$k\geqslant k_0$时，有

$$\lambda_k\geqslant\lambda_{k_0}+(k-k_0)a,$$

可见$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$是无界数列，与假设矛盾，故Ⅰ)得证。

Ⅱ)，由Ⅰ)对$k=0,1,2,\cdots$有$\Delta\lambda_k\leqslant 0$,所以$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$是单调下降的，又$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$

是有界的，故有

$$\lim_{k\to+\infty}\lambda_k=\lambda_\infty$$

由于

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k=\lambda_{n+1}-\lambda_0\to\lambda_\infty-\lambda_0\qquad(n\to+\infty),$$

即级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\Delta\lambda_k$ 是收敛的，又因 $\{-\Delta\lambda_k\}$ 是单调下降的，所以由Cauchy定理导出

$$\lim_{n\to+\infty}k\Delta\lambda_k=0.$$

Ⅰ)得证。

最后证Ⅱ)，应用Abel求和法得到

$$\lambda_{n+1}-\lambda_0=\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k=-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta^2\lambda_k+(n+1)\Delta\lambda_n$$

或

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\Delta^2\lambda_k=(n+1)\Delta\lambda_n+\lambda_0-\lambda_{n+1}$$

$$\to\lambda_0-\lambda_\infty\qquad(n\to+\infty)$$

即 $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k<+\infty$，证毕。

由引理4·7得到，有界凸的实数列必是拟凸的，但反之未必成立，例如对每个固定 $n\in N$，令

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1 & k\geqslant n+1\\ \dfrac{n+1}{k} & k\leqslant n+1,\end{cases}$$

则实数列 $\lambda^{(n)}=\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$ 是拟凸的，但非凸的，事实上

$$\Delta^2\lambda_k^{(n)}=\lambda_k^{(n)}-2\lambda_{k+1}^{(n)}+\lambda_k^{(n)}$$

$$=\begin{cases}0 & k\leqslant n-1\\ -\dfrac{1}{n+2} & k=n\\ \dfrac{2(n+1)}{k(k+1)(k+2)} & k\geqslant n+1,\end{cases}$$

可见对每个固定 $n\in N$，实数列 $\lambda^{(n)}=\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=0}^{\infty}$ 是非凸的，但是

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k^{(n)}| = \frac{n+1}{n+2} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2(n+1)}{k(k+2)}$$

$$\leqslant 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=nj+1}^{n(j+1)}\frac{2(n+1)}{k^2}\right) \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{(nj)^2}$$

$$\leqslant 1 + 4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} < +\infty.$$

可见，对每个固定$n\in N$，实数列$\lambda^{(n)}$是拟凸的。

引理4·8 若$\lambda=\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$是拟凸的，则

$$n\Delta\lambda_n \to 0 \qquad (n\to+\infty). \tag{1.25}$$

证明 因为$\lambda=\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$是拟凸的，即

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k| < +\infty.$$

所以

$$\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k| = o(1) \qquad (n\to+\infty)$$

由于$-\Delta\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty}\Delta^2\lambda_k$，故有

$$n|\Delta\lambda_n| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{k}{n+1}\right)(k+1)|\Delta^2\lambda_k|$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k| = o(1) \qquad (n\to+\infty).$$

引理得证。

定理4·5 设$\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$是偶型拟凸数列，且$\lambda\in l_{\infty}^{0}$则存在偶函数$g\in L_{2\pi}^{1}$，使得对每个$k\in Z$有

$$g^{\wedge}(k)=\lambda_k$$

特别当λ是偶型凸数列，则$g(x)\geqslant 0$。

证明 对$|x|\in(0,\pi)$，令

$$S_n(x)=\sum_{|k|\leqslant n}\lambda_k e^{ikx}=\lambda_0+2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos kx$$

连续两次利用Abel求和公式得到

$$S_n(x) = -\sum_{k=0}^{n+1} D_k(x)\Delta\lambda_k + \lambda_n D_n(x)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\Delta^2\lambda_k F_k(x) - 2n\Delta\lambda_{n-1}F_{n-1}(x) + \lambda_n D_n(x)$$

其中$D_n(x)$为Dirichlet核，而$F_n(x)$为Feje'r核，且对$|x|\in(0,\pi)$有

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \qquad F_n(x) \leqslant \frac{1}{2(n+1)\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

因为$\{\lambda_k\}_{k\in Z}\in l^0_\infty$是偶型拟凸的，所以由引理4·8有$n\Delta\lambda_{n-1}=o(1)$、$\lambda_n=o(1)$、$(n\to+\infty)$

因此$S_n(x)$在$(0,\pi)$上绝对收敛且内闭一致收敛，其极限函数记作$g(x)$，即

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k F_k(x).$$

明显地$g(x)$是偶函数，特别当$\{\lambda_k\}_{k\in Z}$是偶型凸列时，则$g(x)\geqslant 0$。

现在证明$g\in L^1_{2\pi}$，由于对$0<|x|\leqslant\pi$有

$$|g(x)| \leqslant 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k|F_k(x)$$

因此由Lebesgue定理导出

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|dx \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_k(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot|\Delta^2\lambda_k| < +\infty \qquad (1.26)$$

最后证明对每个$k\in Z$，有$\hat{g}(k)=\lambda_k$、由于对任何$j\in N$，

$$\lambda_0(1-\cos jx) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(1-\cos jx)\cos kx = g(x)(1-\cos jx)$$

在$(-\pi,\pi)$上一致成立。事实上，当$0<|x|\leqslant\pi$、$m<n$时，有

$$\left|2\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\cos kx(1-\cos jx)\right| \leqslant \frac{(jx)^2}{2}\left|2\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\cos kx\right|$$

$$= \frac{(jx)^2}{2}\left|2\sum_{k=m-1}^{n-2}(k+1)\Delta^2\lambda_k F_k(x) - n\Delta\lambda_{n-1}F_{n-1}(x) + \right.$$

$$\left. + m\Delta\lambda_{m-1}F_{m-1}(x) + \lambda_n D_n(x) - \lambda_m D_m(x)\right|$$

$$\leqslant \frac{j^2\pi^2}{2}\left(\sum_{k=m-1}^{n-2}(k+1)|\Delta^2\lambda_k| + n|\Delta\lambda_{n-1}| + m|\Delta\lambda_{m-1}| + |\lambda_n| + |\lambda_m|\right)$$

$$=o(1) \qquad (n>m\to+\infty).$$

其中利用如下不等式：

$$\sin\frac{x}{2}\geqslant\frac{x}{\pi}; \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi)$$

于是由逐项积分得到，对每个$j\in N$有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)(1-\cos jx)\,dx$$

$$=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx(1-\cos jx)\,dx$$

或

$$\hat{g}(0)-\hat{g}(j)=\lambda_0-\lambda_j,$$

令$j\to+\infty$得到$\hat{g}(0)=\hat{\lambda}_0$，所以对每个$j\in N$有

$$\hat{g}(j)=\lambda_j$$

证毕。

设对每个$\rho\in\Omega$，$\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}_{k\in Z}$是偶型实数列，若存在与$\rho$无关的正数M，使得对$\rho\in\Omega$有

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_{k\rho}|\leqslant M<+\infty$$

则说$\left\{\lambda_\rho\right\}_{\rho\in\Omega}$是一致拟凸的。

从定理4·5和（1·26）推出如下重要的结论。

推论4·5 设$\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}_{k\in Z}(\rho\in\Omega)$是偶型的实数列，若$\{\lambda_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是一致拟凸的，则对每个$\rho\in\Omega$存在偶函数$g_\rho\in L^1_{2\pi}$使得

$$g_\rho\hat{}(k)=\lambda_{k\rho} \qquad (k\in Z)$$

并且$\{g_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是$L^1_{2\pi}$中一致有界的函数列。

1·4乘子表示定理

设X，Y表示$X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）或$L^\infty_{2\pi}$空间，$\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$是已知的复数列，若对每个$f\in X$，存在$g\in Y$使得对每个$k\in Z$有

$$\hat{g}(k)=\lambda_k\hat{f}(k), \qquad (1\cdot27)$$

则说λ是X→Y内的乘子序列，记作$\lambda\in(X,Y)$。

若$\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}\in(X,Y)$，则对每个$f\in X$，适合（1.27）的$g\in Y$是唯一的（在几

乎处处意义下），记

$$g(x)=U_\lambda(f,x),$$

通常称U_λ为$X\to Y$内的乘子，易证U_λ是平移不变的，即对任何复数h有

$$U_\lambda(f(t+h),x)=U_\lambda(f(t),x+h) \qquad (1\cdot28)$$

事实上，利用关系式：

$$f(\cdot+h)^\wedge(k)=e^{ikh}\hat{f}(k) \qquad (k\in Z)$$

由（1.27）导出

$$U_\lambda(f(t+h),\cdot)^\wedge(k)=\lambda_k f(\cdot+h)^\wedge(k)$$

$$=\lambda_k e^{ikh}\hat{f}(k)=e^{ikh}U_\lambda(f,\cdot)^\wedge(k)=U_\lambda(f,\cdot+h)^\wedge(k),$$

因此由唯一性定理得到（1.28）．此外有

引理4·9 乘子U_λ是X上有界线性算子．

证明 由定义容易验证乘子U_λ是线性的，即

$$U_\lambda(f_1+f_2)=U_\lambda(f_1)+U_\lambda(f_2),$$

$$U_\lambda(\alpha f)=\alpha U_\lambda(f),$$

其中α是复数．因此剩下只要证明U_λ是有界的．利用闭图象定理，只要证明：若$\|f_n-f\|_X\to 0$且$\|U_\lambda(f_n)-g\|_Y\to 0$（$n\to+\infty$），则有$g=U_\lambda(f)$。事实上，由于$\|f_n-f\|_X\to 0$（$n\to+\infty$），所以对每个$k\in Z$有

$$\hat{f}_n(k)\to\hat{f}(k) \qquad (n\to+\infty)．$$

又因为$\|U_\lambda(f_n)-g\|_Y\to 0$ （$n\to+\infty$）所以对每个$k\in Z$有

$$U_\lambda(f_n)^\wedge(k)=\lambda_k\hat{f}_n(k)\to\hat{g}(k) \qquad (n\to+\infty)．$$

因此得到，对每个$k\in Z$，有

$$\lambda_k\hat{f}(k)=g^\wedge(k),$$

即$g=U_\lambda(f)$，证毕．

现在讨论一些乘子的表示，我们有

定理4·6 设$\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$，则$\lambda\in(C_{2\pi},C_{2\pi})$当且仅当存在$\mu_\lambda\in BV_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$$\check{\mu}_\lambda(k)=\lambda_k \qquad (1\cdot29)$$

从而有

$$U_\lambda(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)d\mu_\lambda(t) \qquad (1\cdot30)$$

且$\|U_\lambda\|=\|\mu_\lambda\|_{BV}$．

证明 $\Longrightarrow$）．设$\lambda\in(C_{2\pi},C_{2\pi})$，即对每个$f\in C_{2\pi}$，存在$g\in C_{2\pi}$使得

$$\hat{g}(k)=\lambda_k\hat{f}(k) \qquad (k\in Z)$$

令

$$\sigma_n^{(\lambda)}(x)=\sum_{|k|\le n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\lambda_k e^{ikx},$$

$$\pi_n^{(\lambda)}(f,x)=\sum_{|k|\le n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\lambda_k\hat{f}(k)e^{ikx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\sigma_n^{(\lambda)}(t)dt$$

$$=\sigma_n(g,x).$$

因此，对每个$f\in C_{2\pi}$有

$$\|\pi_n^{(\lambda)}(f)\|_{C_{2\pi}}=\|\sigma_n(g)\|_{C_{2\pi}}\le\|g\|_{C_{2\pi}}<+\infty,$$

于是由共鸣定理导出

$$\|\pi_n^{(\lambda)}\|_{(C_{2\pi},\ C_{2\pi})}\le M<+\infty.$$

又由（1·31）得到

$$\|\pi_n^{(\lambda)}\|=\|\sigma\|_1$$

所以有

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}\|=O(1).$$

由定理4·4得到 $\lambda\in BV\hat{}_{2\pi}$，即存在$\mu_\lambda\in BV_{2\pi}$使得对每个 $k\in Z$有$\check{\mu}_\lambda(k)=\lambda_k$。于是，对每个$f\in C_{2\pi}$有

$$U_\lambda(f)^\wedge(k)=g^\wedge(k)=\check{\mu}_\lambda(k)\hat{f}(k)$$

$$=\frac{1}{2\pi}(f*d\mu_\lambda)^\wedge(k)\qquad(k\in Z)$$

因此对每个$f\in C_{2\pi}$有

$$U_\lambda(f,\ x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)d\mu_\lambda(t).$$

$\Leftarrow$). 设 $\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$，设存在$\mu_\lambda\in BV_{2\pi}$使得对每有 $k\in Z$有

$$\check{\mu}_\lambda(k)=\lambda_k.$$

于是，对每个$f\in C_{2\pi}$有

$$\pi_n^{(\lambda)}(f,\ x)=\sum_{|k|\le n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\lambda_k\hat{f}(k)e^{ikx}$$

$$=\sum_{|k|\le n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\check{\mu}_\lambda(k)\hat{f}(k)e^{ikx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(f,x-t)d\mu_\lambda(t)\qquad(1·32)$$

由于对每个$f\in C_{2\pi}$有$\|\sigma_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=o(1)$　$(n\to+\infty)$，所以

$$\|\sigma(f)-\sigma_n(f)\|_{C_{2\pi}}=o(1)\qquad(m,n\to+\infty).$$

利用（1·32）导出

$$\|\pi_n^{(\lambda)}(f)-\pi_m^{(\lambda)}(f)\|_{C_{2\pi}}\leqslant\|\sigma_n(f)-\sigma_m(f)\|_{C_{2\pi}}$$

因此得到

$$\|\pi_n^{(\lambda)}(f)-\pi_m^{(\lambda)}(f)\|_{C_{2\pi}}=o(1)\qquad(m,\ n\to+\infty).$$

于是由推论4·3导出，存在$g\in C_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$$\hat{g}(k)=\lambda_k\hat{f}(k),$$

即$\lambda\in(C_{2\pi},\ C_{2\pi})$。证毕

定理4·7. 设$\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$是偶型拟凸列，且$\lambda\in l_\infty^0$，则$\lambda\in\left(X_{2\pi}^p,\ X_{2\pi}^p\right)(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$(BV_{2\pi},\ BV_{2\pi})$和$\left(L_{2\pi}^\infty,\ L_{2\pi}^\infty\right)$，且存在$g_\lambda$分别属于$X_{2\pi}^p$、$L_{2\pi}^1$和$L_{2\pi}^\infty$使得对每个$f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）和$f\in L_{2\pi}^\infty$有

$$U_\lambda(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g_\lambda(t)dt\tag{1·33}$$

或对每个$\mu\in BV_{2\pi}$有

$$U_\lambda(d\mu,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_\lambda(x-t)d\mu(t)\tag{1·34}$$

证明　因为$\lambda=\{\lambda_k\}_{k\in Z}$是偶型拟凸列且$\lambda\in l_\infty^0$，所以由定理4·5存在$g\in L_{2\pi}^1$使得对每个$k\in Z$有

$$\hat{g}(k)=\lambda_k.$$

因而由定理4·3得到

$$\|\sigma_n^{(\lambda)}-\sigma_m^{(\lambda)}\|_1=o(1),\qquad(m,n\to+\infty),$$

其中

$$\sigma_n^{(\lambda)}(x)=\sum_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\lambda_k e^{ikx}.$$

对每个$f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）或$f\in L_{2\pi}^\infty$，记

$$\sigma_n^{(\Lambda)}(x)=\sum_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\lambda_k\hat{f}(k)e^{ikx}$$

其中数列$\Lambda=\{\lambda_k\hat{f}(k)\}_{k\in Z}$，于是有

$$\sigma_n^{(\Lambda)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\sigma_n^{(\lambda)}(t)dt.$$

由此导出

$$\|\sigma_n^{(\Lambda)}-\sigma_m^{(\Lambda)}\|_{X^p_{2\pi}}=o(1), \qquad (m,n\to+\infty),$$

和

$$\|\sigma_m^{(\Lambda)}-\sigma_n^{(\Lambda)}\|_{\infty}=o(1), \qquad (m,n\to+\infty).$$

由定理1·3得到，存在g_λ分别属于$X^p_{2\pi}$和$L^\infty_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$$\hat{g_\lambda}(k)=\lambda_k\hat{f}(k),$$

即$\lambda\in(X^p_{2\pi}, X^p_{2\pi})(1\leqslant p\leqslant+\infty)$和$\lambda\in(L^\infty_{2\pi}, L^\infty_{2\pi})$，从而对每个$f\in X^p_{2\pi}$和$f\in L^\infty_{2\pi}$有

$$U_\lambda(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g_\lambda(t)dt.$$

其次，对每个$\mu\in BV_{2\pi}$，记

$$\sigma_n^{(\Lambda)}(x)=\sum_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\lambda_k\check{\mu}(k)e^{ikx}$$

其中$\Lambda=\{\lambda_k\check{\mu}(k)\}_{k\in Z}$。于是有

$$\sigma_n^{(\Lambda)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n^{(\lambda)}(x-t)d\mu(t),$$

从而

$$\|\sigma_n^{(\Lambda)}\|_1\leqslant\|\sigma_n^{(\lambda)}\|_1\|\mu\|_{BV}=O(1).$$

因而由定理1·1存在$\nu_\lambda\in BV_{2\pi}$，使得对每个$k\in Z$，有

$$\check{\nu_\lambda}(k)=\lambda_k\check{\mu}(k)$$

即$\lambda\in(BV_{2\pi}, BV_{2\pi})$，从而有

$$U_\lambda(d\mu, x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_\lambda(x-t)d\mu(t)$$

证毕。

特别有

推论4·6 设$\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}_{k\in Z}$ $(\rho\in\Omega)$是偶型实数列，若λ_ρ关于$\rho\in\Omega$是一致拟凸的，且$\lambda_\rho\in l^0_\infty$，则对每个$\rho\in\Omega$有$\lambda_\rho\in(X^p_{2\pi}, X^p_{2\pi})(1\leqslant p\leqslant+\infty)$和$\lambda_\rho\in(L^\infty_{2\pi}, L^\infty_{2\pi})$,

且存在g_ρ分别属于$X^p_{2\pi}$和$L^\infty_{2\pi}$使得对每个$f\in X^p_{2\pi}$和$L^\infty_{2\pi}$有

$$U_{\lambda_\rho}(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g_\rho(t)dt$$

其中$|g_\rho|\leqslant M<+\infty$，M是与$\rho$无关的，即$\{U_{\lambda_\rho}\}_{\rho\in\Omega}$是一致有界的乘子序列。

§2 周期卷积算子的饱和理论

设Ω是实数集，ρ_0是Ω的极限点，$d\mu_\rho$是$[-\pi,\pi]$上Borel测度，且

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\mu_\rho(t)=1,$$

则$X^p_{2\pi}$($1\leqslant p\leqslant+\infty$)上的卷积算子为

$$I_\rho(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)d\mu_\rho(t) \qquad (2\cdot1)$$

我们已经证明：若$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是一致有界卷积算子族，则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是逼近恒等列当且仅当对每个$k\in Z$，有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}2\mu^\vee_\rho(k)=1 \qquad (2\cdot2)$$

因此研究卷积算子的饱和问题时，总认为

$$1-2\mu_\rho(k)=o(1) \qquad (\rho\to\rho_0,\ k\in Z)$$

2·1饱和阶的确定.

为了轮廓地了解P. L. Butzer创立的Fourier技巧，我们首先考查二个例子。

例1. 设

$$d\alpha_n(t)=\frac{\pi}{2}\left(d\delta_{-\frac{1}{n}}(t)+d\delta_{\frac{1}{n}}(t)\right)$$

其中$d\delta_{x_0}(t)$是Draic测度.对$f\in C_{2\pi}$引入卷积算子

$$A_n(f,x)=(f*d\alpha_n)(x).$$

若取不动元集$I(A_n)=\{C|C为常数\}$，则A_n在$C_{2\pi}$上关于n^{-2}是饱和的。

证明　由于测度$d\alpha_n$是偶的，所以

$$2\alpha^\vee_n(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}d\alpha_n(t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,d\alpha_n(t)$$

$$= \cos\frac{k}{n} = \alpha_{nk}\text{（记）}$$

故得

$$1-2\alpha_n^{\vee}(k) = 1-\alpha_{nk} = 1-\cos\frac{k}{n} = 2\sin^2\frac{k}{n}$$

因此有

$$\lim_{n\to+\infty} n^2(1-\alpha_{nk}) = \frac{k^2}{2} \tag{2·3}$$

现在验证小O饱和条件成立，即对$f\in C_{2\pi}$有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\|A_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}}{n^{-2}} = 0 \Longleftrightarrow f = \text{const}.$$

事实上，$\Longleftarrow$）是明显的。

$\Longrightarrow$）。由于

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\|A_n(f)-f\|_{C_{2\pi}} = 0,$$

所以存在$n_j\to\infty(j\to+\infty)$，使得

$$\lim_{j\to+\infty} n_j^2\|f-A_{n_j}(f)\|_{C_{2\pi}} = 0,$$

从而导出对每个$k\in Z$有

$$(f-A_{n_j}(f))^{\wedge}(k) = o(n_j^{-2}) \qquad (j\to+\infty)$$

因为

$$(f-A_{n_j}(f))^{\wedge}(k) = \hat{f}(k)\left(1-\alpha_{n_j}^{\vee}(k)\right)$$
$$= \hat{f}(k)(1-\alpha_{n_jk})$$

故得

$$\hat{f}(k)(1-\alpha_{n_jk}) = o\left(n_j^{-2}\right) \qquad (j\to+\infty).$$

利用（2·3）导出，对每个$k\in Z$有

$$\hat{f}(k)\frac{k^2}{2} = 0$$

因此对 $k\in Z\setminus\{0\}$ 有$\hat{f}(k)=0$，由唯一性定理导出$f\equiv$const。

最后验证大O饱和条件成立，事实上，取$f_0(x)=\cos x\in I(A_n)$，且有

$$\|A_n(f_0)-f_0\|_{C_{2\pi}} = \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x-\cos(x+t))\,d\alpha_n(t)\right\|_{C_{2\pi}}$$

$$= \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x(1-\cos t)\,d\alpha_n(t) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin t\,d\alpha_n(t)\right\|_{C_{2\pi}}$$

$$= (1-\alpha_{1n})\|\cos x\|_{C_{2\pi}} = 1-\alpha_{1n} = 2\sin^2\frac{1}{2n}$$

因此有

$$\|A_n(f_0)-f_0\|_{C_{2\pi}}=O(n^{-2})。$$

可见 $\{A_n\}_{n\in N}$ 在 $C_{2\pi}$ 上关于 n^{-2} 是饱和的。

例2. 设

$$d\bar{\alpha}_n(t)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(d\delta_{-\frac{1}{n}}(t)+d\delta_{\frac{1}{n}}(t)\right)+\frac{\pi}{2n}\left(d\delta_{-\pi}+d\delta_{\pi}\right).$$

对 $f\in C_{2\pi}$ 引入卷积算子

$$A_n(f,x)=(f*d\bar{\alpha}_n)(x)$$

若取不动元集 $I(A_n)=\{C|C$ 为常数$\}$，则 $\{A_n\}$ 在 $C_{2\pi}$ 上关于 n^{-2} 是饱和的。

证明 由于 $d\alpha_n$ 是偶的，所以有

$$1-2\alpha_n^{\vee}(k)=1-\bar{\alpha}_{nk}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos kt)d\bar{\alpha}_n(t)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{k}{2n}+\frac{2}{n}\sin\frac{k\pi}{2}$$

因此对每个 $k\in Z$ 有

$$1-\bar{\alpha}_{n,2k}=2\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{k}{n}\sim2\frac{k^2}{n^2}\qquad(n\to+\infty),$$

$$1-\bar{\alpha}_{n,2k+1}=\frac{2}{n}+2\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{2k+1}{2n}\sim\frac{1}{n}\qquad(n\to+\infty).$$

于是有

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\left(1-\bar{\alpha}_{n,l}\right)=\begin{cases}2k^2 & l=2k\\ +\infty & l=2k+1\end{cases}\qquad(2\cdot4)$$

现在验证小o饱和条件成立，即对每个 $f\in C_{2\pi}$ 有

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\|f-A_n(f)\|_{C_{2\pi}}}{n^{-2}}=0\Longleftrightarrow f=\text{const}$$

事实上，$\Longleftarrow$）是明显的。

$\Longrightarrow$）类似于例1的处理，存在 $n_j\to+\infty$（$j\to+\infty$），使得对每个 $k\in Z$ 有

$$\left(f-\bar{A}_{n_j}(f)\right)^{\wedge}(k)=o\left(n_j^{-2}\right)\qquad(j\to+\infty)$$

从而得到，对每个 $l\in Z$ 有

$$\hat{f}(l)\left(1-\bar{\alpha}_{n_j l}\right)=o\left(n_j^{-2}\right)\qquad(j\to+\infty)$$

因此由（2·4）得到，对每个 $l\in Z\setminus\{0\}$ 有 $\hat{f}(l)=0$，由唯一性定理得到 $f=\text{const}$。

最后，验证大O饱和条件，事实上，取 $f_0(t)=\cos2t$，则有

$$\|f_0-\widetilde{A}_n(f_0)\|C_{2\pi}=O(n^{-2})$$

可见{$\widetilde{A}_n$}$_{n\in N}$在$C_{2\pi}$上关于n^{-2}是饱和的，证毕。

利用例1和例2所揭示的Fourier技巧，我们可以一般地研究卷积算子的饱和性质。

引理4·10 设$\varphi(\rho)\to 0^+$ ($\rho\to\rho_0$)，且对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{|2\overset{\vee}{\mu}_\rho(k)-1|}{\varphi(\rho)}=\psi_k>0 \tag{2·5}$$

则{I_ρ}$_{\rho\in\Omega}$的不动元集$I(I_\rho)=\{C|C为常数\}$。

证明　由于$f\in I(I_\rho)$，则对$\forall\rho\in\Omega$（或$\rho\to\rho_0$）有

$$I_\rho(f,x)=f(x)\quad(\text{或}a.e)$$

所以，对每个$k\in Z$有

$$\hat{f}(k)=I_\rho(f)^\wedge(k)=2\overset{\vee}{\mu}_\rho(k)\hat{f}(k)$$

或

$$\left(2\overset{\vee}{\mu}_\rho(k)-1\right)\hat{f}(k)=0$$

因此由（2·5）导出，对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\psi_k|\hat{f}(k)|=0$$

从而对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有$\hat{f}(k)=0$，由唯一性定理可得$f=$常数、证毕

现在给出卷积算子的饱和定理。

定理4·8 设$\varphi(\rho)\to 0^+$ ($\rho\to\rho_0$)使得

Ⅰ)对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{|2\overset{\vee}{\mu}_\rho(k)-1|}{\varphi(\rho)}=\psi_k>0 \tag{2·6}$$

Ⅱ)对某个$m\in Z\setminus\{0\}$，有

$$|1-2\overset{\vee}{\mu}_\rho(m)|=O(\varphi(\rho)) \tag{2·7}$$

则{I_ρ}$_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p$上是饱和的，其饱和阶为$\varphi(\rho)$或说{I_ρ}$_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p$上关于$\varphi(\rho)$是饱和的。

证明　由引理4·9得到，此时$I(I_\rho)=\{C|C为常数\}$。首先验证小o饱和条件成立，即对每个$f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{\|I_\rho(f)-f\|_p}{\varphi(\rho)}=0\Longleftrightarrow f\in I(I_\rho).$$

事实上，$\Longleftarrow$)是明显的。现在证明$\Longrightarrow$)。由于

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{\|I_\rho(f)-f\|_p}{\varphi(\rho)}=0$$

所以存在$\rho_j \to \rho_0$（$j\to+\infty$）使得

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\|I_{\rho_j}(f)-f\|_p}{\varphi(\rho_j)}=0$$

应用Fourier技巧得到，对每个$k\in Z$有

$$\left|2\check{\mu}_{\rho_j}(k)-1\right|\left|\hat{f}(k)\right|=O(\varphi(\rho_j)) \qquad (j\to+\infty)$$

从而由（2·6）导出，对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\psi_k|\hat{f}(k)|\leqslant \lim_{j\to+\infty}\left|\frac{2\check{\mu}_{\rho_j}(k)-1}{\varphi(\rho_j)}\right||\hat{f}(k)|=0$$

或对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\psi_k|\hat{f}(k)|=0$$

因此由唯一性定理导出$f=$常数。

其次验证大O饱和条件成立，为此取$f_0(x)=e^{imx}$，则$f_0\notin I(I_\rho)$且有

$$I_\rho(f_0,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{im(x-t)}d\mu_\rho(t)=2\check{\mu}_\rho(m)f_0(x)$$

所以由（2·7）得到

$$\|I_\rho(f_0)-f_0\|_p=|2\check{\mu}_\rho(m)-1|=O(\varphi(\rho)).$$

因此由定义可知，$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上是饱和的，其饱和阶为$\varphi(\rho)$，证毕。

由条件(2·6)—(2·7)导出，存在$m\in Z\setminus\{0\}$使得

$$|1-2\check{\mu}_\rho(m)|\asymp\varphi(\rho) \qquad (\rho\to\rho_0)$$

因此由引理4·1和定理4·6导出。

推论4·7 若存在$m\in Z\setminus\{0\}$使得对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\left|\frac{1-2\check{\mu}_\rho(k)}{1-2\check{\mu}_\rho(m)}\right|=\psi_{km}>0 \qquad (2\cdot8)$$

则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上饱和，其饱和阶为$|2\check{\mu}_\rho(m)-1|$。

我们要问推论4·7中条件(2·8)对于$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上饱和是否必要呢？回答是肯定的，我们有

定理4·8 设$I(I_\rho)=\{C|C$为常数$\}$，若$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上是饱和的，其饱和阶为$\varphi(\rho)$，则存在$m_0\in Z\setminus\{0\}$使得对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\left|\frac{1-2\check{\mu}_\rho(k)}{1-2\check{\mu}_\rho(m_0)}\right|=\psi_{k m_0}>0,$$

且$\varphi(\rho)\asymp\left|1-2\check{\mu}_\rho(m_0)\right|\quad(\rho\to\rho_0)$

证明　由于$\varphi(\rho)$是$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上的饱和阶，所以对$k\in Z\setminus\{0\}$和任何子例$\rho_j\to\rho_0(j\to+\infty)$有

$$\left|1-2\check{\mu}_{\rho_j}(k)\right|\neq o(\varphi(\rho_j))\qquad(j\to+\infty).$$

若不然存在$k_0\in Z\setminus\{0\}$和子列$\rho_j'\to\rho_0$（$j'\to+\infty$）使得

$$\left|1-2\check{\mu}_{\rho_j'}(k)\right|=o(\varphi(\rho_j')),\quad(j'\to+\infty),$$

从而有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{\|I_\rho(f_{k_0})-f_{k_0}\|_p}{\varphi(\rho)}=0$$

但$f_{k_0}\notin I(I_\rho)$这是不可能的，因此对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\eta_k=\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{|1-2\check{\mu}_\rho(k)|}{\varphi(\rho)}>0$$

所以对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\varphi(\rho)=O\left(\left|1-2\check{\mu}_\rho(k)\right|\right)\qquad(\rho\to\rho_0).$$

其次证明存在$m_0\in Z\setminus\{0\}$使得

$$\left|1-2\check{\mu}_\rho(m_0)\right|=O(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0).$$

事实上，由大O饱和条件，存在$f_0\notin I(I_\rho)$使得

$$\|I_\rho(f_0)-f_0\|_p=O(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0).$$

于是由Fourier技巧有

$$\left|\hat{f}_0(k)\left(1-2\check{\mu}_\rho(k)\right)\right|=O(\varphi(\rho))\qquad(k\in Z).$$

因为$f_0\neq$常数，所以存在$m_0\in Z\setminus\{0\}$使得$\hat{f}_0(m_0)\neq0$因此从上式导出，

$$\left|1-2\check{\mu}_\rho(m_0)\right|=O(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0).$$

从而有

$$1-2\check{\mu}_\rho(m_0)\asymp\varphi(\rho)\qquad(\rho\to\rho_0).$$

且对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\psi_{k,m_0}=\lim_{\rho\to\rho_0}\left|\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{1-2\mu_\rho^\vee(m_0)}\right|$$

$$\psi_{k,m_0}=\lim_{\rho\to\rho_0}\left|\frac{2\mu^\vee(k)-1}{\varphi(\rho)}\right|\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{\varphi(\rho)}{|2\mu_\rho^\vee(m_0)-1|}\geqslant\eta_k C>0.$$

证毕。

综合定理4·8—4·9得到

定理4·10 设$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是$X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$上的奇异积分算子族，且不动元集$I(I_\rho)=\{C|C为常数\}$，则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p$上饱和的充要条件是存在$m\in Z\setminus\{0\}$使得对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\left|\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{1-2\mu_\rho^\vee(m)}\right|=\psi_{k,m}>0.$$

且其饱和阶为$|1-2\mu_\rho^\vee(m)|$。

特别地，当$d\mu_\rho$是正、偶Borel测度核，则对每个$\rho\in\Omega$有

$$1-2\mu_\rho^\vee(k)=1-\alpha_{k\rho}$$

其中

$$\alpha_{k\rho}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,d\mu_\rho(t),$$

所以对$k\in Z\setminus\{0\}$有$1-\alpha_{k\rho}>0$，因此，若$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶卷积算子族，由引理4·7导出，其不动元集$I(I_\rho)=\{C|C为常数\}$，于是由定理4·10直接得到如下推论

推论4·8 设$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是$X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$上正、偶卷积算子族，则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p$上饱和的充要条件是存在$m\in Z\setminus\{0\}$使得对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{m\rho}}=\psi_{k,m}>0$$

且其饱和阶为$1-\alpha_{m\rho}$。

人们要问，是否正卷积算子族在$X_{2\pi}^p$上的逼近都是饱和的，回答是否定的。

例3. 对$n\in N$，令

$$d\mu_n^*(t)=a_n\Big(d\delta_0(t)+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{-2}n^{-2+\frac{1}{k+1}}\big(d\delta_{-\frac{\pi}{2^k}}+d\delta_{\frac{\pi}{2^k}}\big)\Big)$$

其中α_n使得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\mu_n^*(t)=1.$$

对$f\in C_{2\pi}$，令

$$A_n^*(f,x)=\left(f*d\mu_n^*\right)(x)$$

它在$C_{2\pi}$上是非饱和的。

证明 取$m=2^\beta m_0$，其中β是非负整数，而$m_0\in N$是不被2整除，则有

$$1-\alpha_{m,n}^*=a_n\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{-2}n^{-2+\frac{1}{k+1}}\sin^2(2^{\beta-k-1}m_0\pi)$$

$$=\frac{4\alpha_n}{\pi}\sum_{k=\beta}^{\infty}(k+1)^{-2}n^{-2+\frac{1}{k+1}}\sin^2(2^{\beta-k-1}m_0\pi).$$

$$=\frac{4a_n}{\pi}(\beta+1)^{-2}n^{-2+\frac{1}{\beta+1}}\sin^2\frac{m_0\pi}{2}+o\left(a_n n^{-2+\frac{1}{\beta+1}}\right).$$

类似地有

$$1-\alpha_{2m,n}^*=\frac{4a_n}{\pi}\left((\beta+2)^{-2}n^{-2+\frac{1}{\beta+2}}\sin^2\frac{m_0\pi}{2}\right)+o\left(a_n n^{-2+\frac{1}{\beta+2}}\right)$$

所以对$\forall m\in N$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\alpha_{2m,n}^*}{1-\alpha_{m,n}^*}=0.$$

因此由推论4·8断定正卷积算子列$\{A_n^*\}_{n\in N}$在$C_{2\pi}$上是非饱和的。

2·2. 饱和类的逆定理

确定一类卷积算子的饱和类，包含如下两方面的命题，第一是确定属于饱和类的充分条件，通称为饱和类的正定理，第二是确定属于饱和类的必要条件，通称为饱和类的逆定理。

本节研究饱和类的逆定理，得到

定理4·11 设$\varphi(\rho)\to0^+$（$\rho\to\rho_0$）使得对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{2\mu_\rho^\vee(k)-1}{\varphi(\rho)}=\psi_k\neq0 \tag{2·9}$$

则$\{I_\rho\}$在$X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上饱和，其饱和阶为$\varphi(\rho)$，而饱和类

$$F_p(I_\rho)\subset V_p\left\{\psi_k\right\} \tag{2.10}$$

证明　由定理4.8可知，条件(2.9)确保$\{I_\rho\}$在$X^p_{2\pi}(1\leqslant p\leqslant+\infty)$上饱和，其饱和阶为$\varphi(\rho)$，因此只要证明$f\in F_p(I_\rho)$必有$f\in \mathring{V}_p\{\psi_k\}$。

我们分两种情况讨论。

Ⅰ)当$1<p\leqslant+\infty$时，需证对每个$f\in F_p(I_\rho)$，存在$g\in L^p_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$$g^\wedge(k)=\psi_k f^\wedge(k).$$

记

$$\phi_\rho(f,x)=\frac{I_\rho(f,x)-f(x)}{\varphi(\rho)},$$

则有

$$\|\phi_\rho(f)\|_p\leqslant M_p<+\infty\qquad(\rho\in\Omega).$$

因此由弱紧密定理，存在$\rho_j\to\rho_0\ (j\to+\infty)$和$g\in L^p_{2\pi}(1<p\leqslant+\infty)$使得

$$\phi_{\rho_j}\xrightarrow{w^*}g\qquad(j\to+\infty).$$

于是对每个$k\in Z$有

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_{\rho_j}(f,x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-ikx}dx\qquad(2.11)$$

由于对每个$k\in Z$有

$$\phi_{\rho_j}^\wedge(k)=\frac{I_{\rho_j}(f)^\wedge(k)-f^\wedge(k)}{\varphi(\rho_j)}$$

$$=f^\wedge(k)\frac{2\mu_{\rho_j}^\vee(k)-1}{\varphi(\rho_j)}$$

因此由(2·9)和(2·11)导出，对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$g^\wedge(k)=\psi_k f^\wedge(k)$$

即$f\in \mathring{V}_p\{\psi_k\}\ (1<p\leqslant+\infty)$。

Ⅱ)当$p=1$时，需证存在$\mu\in BV_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$$\mu^\vee(k)=\psi_k f^\wedge(k)$$

令

$$v_\rho(x)=\int_{-\pi}^{x}\phi_\rho(f,t)dt$$

则$v_\rho\in AC_{2\pi}$，且

$$\|v_\rho\|_{BV_{2\pi}}=\|\phi\|_1=\frac{\|I_\rho(f)-f\|_1}{\varphi(\rho)}=O(1),$$

因此，由Helly－Bary选择原理，存在$\rho_j\to\rho_0$（$j\to+\infty$）和$\mu\in BV_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}dv_{\rho_j}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikx}d\mu(x) \qquad (2\cdot 12)$$

由于对每个$k\in Z$有

$$v^{\vee}_{\rho_j}(k)=\phi_{\rho_j}(f)^{\wedge}(k)=\hat{f}(k)\frac{2\mu^{\vee}_{\rho_j}(k)-1}{\varphi(\rho_j)}$$

所以由（2·12）导出，对每个$k\in Z$有

$$\mu^{\vee}(k)=\psi_k\hat{f}(k),$$

即$f\in V_1\{\psi_k\}$。证毕。

特别地有如下推论

推论4.8 若对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-2\mu_\rho^{\vee}(k)}{1-2\mu_\rho^{\vee}(1)}=\psi_k\neq 0 \qquad (2\cdot 13)$$

则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X^p_{2\pi}$上的饱和阶为$|1-2\mu_\rho^{\vee}(1)|$且其饱和类$F_p(I_\rho)\subset V_p\{\psi_k\}$。

推论4·10 若$d\mu_\rho$（$\rho\in\Omega$）是正、偶Borel测度，且对每个$k\in N$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=\psi_k>0 \qquad (2\cdot 14)$$

则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X^p_{2\pi}(1\leqslant p\leqslant+\infty)$上饱和，其饱和阶为$1-\alpha_{1\rho}$且$F_p(I_\rho)\subset V_p\{\psi_k\}$

关于正卷积算子的饱和类还有如下常用的逆定理。

定理4·12 设$d\mu_\rho$（$\rho\in\Omega$）是正、偶Borel测度核，若存在$\varphi(\rho)\to 0^+$（$\rho\to\rho_0$）使得当$\rho\to\rho_0$时，有

$$1-\alpha_{1\rho}\sim\psi_1\varphi(\rho) \qquad (2\cdot 15)$$

且

$$I_\rho\left(\sin^4\frac{t}{2},\ 0\right)=o(\varphi(\rho)) \qquad (1\cdot 16)$$

则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上饱和，其饱和阶为$\varphi(\rho)$且

$$F_p(I_\rho)\subset V_p\{(ik)^2\}.$$

证明 由（2·15）可知$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是逼近恒等列，令

$$h(t)=k^2(1-\cos t)-(1-\cos kt).$$

则对每个$k\in Z$有

$$h(t)\leqslant\frac{k^4t^4}{4!}\leqslant\frac{k^4}{4!}\pi^4\sin^4\frac{t}{2}$$

所以由（2·16）导出，当$\rho\to\rho_0$时有

$$I_\rho(h,0)\leqslant\frac{k^4\pi^4}{4!}I_\rho\left(\sin^4\frac{t}{2},\ 0\right)=o(\varphi(\rho)),$$

注意到

$$I_\rho(h,0)=k^2(1-\alpha_{1\rho})-(1-\alpha_{1\rho})$$

因此由（2·15）得到，对每个$k\in N$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{k\rho}}{\varphi(\rho)}=\psi_1 k^2$$

于是由推论4·10得到

$$F_\rho(I_\rho)\subset V_\rho\{(ik)^2\}.$$

证毕.

特别有

推论4·11 设μ（$\rho\in\Omega$）是正、偶Borel测度核且$\lim_{\rho\to\rho_0}\mu_\rho^\vee(1)-\frac{1}{2}$，若当$\rho\to\rho_0$时，

$$I_\rho\left(\sin^4\frac{t}{2},\ 0\right)c=o(1-\alpha_{1\rho}) \qquad (2·17)$$

则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上饱和，其饱和阶为$1-\alpha_{1\rho}$且

$$F_\rho(I_\rho)\subset V_\rho\{(ik)^2\}.$$

顾及到Turesky等价条件，若$d\mu_\rho$（$\rho\in\Omega$）是正、偶 Borel 测度，则如下命题是等价的：

Ⅰ）对每个$k\in N$有$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=k^2$，

Ⅱ）对每个$k\in N$有$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{2\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=4$，

Ⅲ）$I_\rho\left(\sin^4\frac{t}{2},\ 0\right)=o(1-\alpha_{1\rho})$， （$\rho\to\rho_0$），

Ⅳ）对每个$\delta\in(0,\ \pi)$有$\int_\delta^\pi d\mu_\rho(t)=o(1-\alpha_{1\rho})$（$\rho\to\rho_0$）.

因而有

推论4·12 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核且$1-\alpha_{1\rho}=o(1)$（$\rho\to\rho_0$），若适合Turesky等价条件之一，则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X^p_{2\pi}$上关于$1-\alpha_{1\rho}$是饱和的，且

$$F_\rho(I_\rho)\subset V_\rho\{(ik)^2\}.$$

2·3 饱和类的正定理与等价定理

现在讨论$X^p_{2\pi}$中元素属于饱和类的充分条件，进而建立饱和类的等价定理，R.A.DeVore证得如下结论.

定理 4·13 （R.A.DeVore） 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是一致有界的Borel测度核，且存在$\varphi(\rho)\to0^+$（$\rho\to\rho_0$）使得如下条件成立.

Ⅰ）对每个$\kappa\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)}=\psi_k\neq 0 \qquad (2\cdot18)$$

并约定$\psi_0=1$。

Ⅱ）对每个$\rho\in\Omega$有

$$\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}_{k\in Z}\in\begin{cases}(L^p_{2\pi},\ L^p_{2\pi}) & 1<p\leqslant+\infty\\(BV_{2\pi},\ BV_{2\pi}) & p=1\end{cases}$$

且乘子U_{λ_ρ}关于$\rho\to\rho_0$是一致有界的，其中

$$\lambda_{k\rho}=\begin{cases}\dfrac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\psi_k\varphi(\rho)} & k\in Z\setminus\{0\}\\ 1 & k=0\end{cases}$$

若$f\in V_p\{\psi_k\}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）且$f\neq$const，则有

$f\in F_p(I_\rho)$。

证明　首先设$1<p\leqslant+\infty$，$f\in V_p\{\psi_k\}$且$f\neq$常数，于是存在$g\in L^p_{2\pi}$($1<p\leqslant+\infty$)使得对每个$k\in Z$有

$g^\wedge(k)=\psi_k f^\wedge(k)$

注意到

$$\frac{(f-I_\rho(f))^\wedge(k)}{\varphi(\rho)}=\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)}f^\wedge(k)$$

$$=\lambda_{k\rho}\psi_k\hat f(k)=\lambda_{k\rho}\hat g(k) \qquad (2\cdot19)$$

由条件Ⅱ)$\lambda_\rho\in(L^p_{2\pi},\ L^p_{2\pi})$（$1<p\leqslant+\infty$），于是对$g\in L^p_{2\pi}$，存在$U_{\lambda_\rho}(g;x)\in L^p_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$U_{\lambda_\rho}(g)^\wedge(k)=\lambda_{k\rho}g^\wedge(k)$

已之由（2·19）和唯一性定理得到

$$U_{\lambda_\rho}(g\cdot x)=\frac{f(x)-I_\rho(f;x)}{\varphi(\rho)} \qquad (2\cdot20)$$

又因为U_{λ_ρ}关于$\rho\to\rho_0$是一致有界的，即$\|U_{\lambda_\rho}\|\leqslant M<+\infty$（$\rho\to\rho_0$），所以由（2·20）即得

$$\frac{\|f-I_\rho(f)\|_p}{\varphi(\rho)}=\|U_{\lambda_\rho}(g)\|_p\leqslant\|U_{\lambda_\rho}\|\|g\|_p\leqslant M\|g\|_p<+\infty \qquad (\rho\to\rho_0)$$

因而有

$$\|I_\rho(f)-f\|_p=O(\varphi(\rho)) \qquad (\rho\to\rho_0)$$

即$f\in F_p(I_\rho)$。

其次，设$p=1$，$f\in V_1\{\psi_k\}$。于是存在$\mu\in BV_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$$\mu^{\vee}(k)=\psi_k f^{\wedge}(k)$$

记

$$v_\rho(x)=\int_{-\pi}^{x}\frac{f(\tau)-I_\rho(f,\tau)}{\varphi(\rho)}d\tau$$

注意到对每个$k\in Z$有

$$v_\rho^{\vee}(k)=\left(\frac{f-I_\rho(f)}{\varphi(\rho)}\right)^{\wedge}(k)=\frac{1-2\mu_\rho^{\vee}(k)}{\varphi(\rho)}\hat{f}(k)=\lambda_{k\rho}\mu^{\vee}(k) \qquad (2.21)$$

由条件Ⅱ)$\lambda_\rho\in(BV_{2\pi},BV_{2\pi})$，于是对$\mu\in BV_{2\pi}$，存在$U_{\lambda_\rho}(d\mu)\in BV_{2\pi}$使得对每个$k\in Z$有

$$U_{\lambda_\rho}(d\mu)^{\vee}(k)=\lambda_{k\rho}\mu^{\vee}(k)$$

于是由（2·21）导出

$$U_{\lambda_\rho}(d\mu,x)=\int_{-\pi}^{x}\frac{f(\tau)-I_\rho(f,\tau)}{\varphi(\rho)}d\tau+\text{const}$$

因此，由U_{λ_ρ}关于$\rho\to\rho_0$是一致有界的，即$\|U_{\lambda_\rho}\|\leqslant M<+\infty$（$\rho\to\rho_0$）所以有

$$\frac{\|I_\rho(f)-f\|_1}{\varphi(\rho)}=\|U_{\lambda_\rho}(d\mu)\|_{BV_{2\pi}}\leqslant\|U_{\lambda_\rho}\|\|\mu\|_{BV_{2\pi}}$$
$$\leqslant M\|\mu\|_{BV_{2\pi}}<+\infty; \qquad (\rho\to\rho_0).$$

因而有

$$\|I_\rho(f)-f\|_1=O(\varphi(\rho)); \qquad (\rho\to\rho_0),$$

即$f\in F_1(I_\rho)$，证毕。

特别地，若利用推论4·6得到

推论4·18 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是一致有界Borel测度核，若存在$\varphi(\rho)\to0^+$（$\rho\to\rho_0$）使得如下条件成立：

Ⅰ)对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-2\mu_\rho^{\vee}(k)}{\varphi(\rho)}=\psi_k\neq0,$$

并约定$\psi_0=1$。

Ⅱ)$\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}_{k\in Z}\in l_\infty^0$，且关于$\rho\to\rho_0$是一致拟凸的，其中

$$\lambda_{k\rho}=\begin{cases}\dfrac{1-2\mu_\rho^{\vee}(k)}{\varphi(\rho)\psi_k} & k\in Z\setminus\{0\}\\ 1 & k=0\end{cases}$$

则对$1\leqslant p\leqslant+\infty$有

$$F_p(I_\rho) \supseteq V_p\{\psi_k\}。$$

结合定理4·11和4·13得到饱和类的等价定理。

定理4·14 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是一致有界的Borel测度核，若存在$\varphi(\rho)\to 0^+$（$\rho\to\rho_0$）使得如下条件成立。

ⅰ）对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)}=\psi_k\neq 0$$

并约定$\psi_0=1$。

ⅱ）对每个$\rho\in\Omega$有

$$\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}_{k\in Z}\in\begin{cases}(L^{p}_{2\pi},\ L^{p}_{2\pi}) & (1<p\leqslant+\infty)\\ (BV_{2\pi},BV_{2\pi}) & (p=1)\end{cases}$$

且乘子$\|\lambda_\rho\|$关于$\rho\to\rho_0$是一致有界的，其中

$$\lambda_{k\rho}=\begin{cases}\dfrac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\psi_k\varphi(\rho)} & k\in Z\setminus\{0\}\\ 1 & k=0,\end{cases}$$

则对$f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）且$f\neq$const，如下命题是等价的：

ⅰ）$f\in V_p\{\psi_k\}$，

ⅱ）$f\in F_p(I_\rho)$。

为了方便起见，约定将上述事实记作

$$F_p(I_\rho)=V_p\{\psi_k\}。$$

特别地有

推论4.14 在推论4·13条件下，则对$1\leqslant p\leqslant+\infty$有

$$F_p(I_\rho)=V_p\{\psi_k\}。$$

系1. Fejc'r算子列$\{\sigma_n\}_{n\in N}$在$X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）上关于$n^{-1}$是饱和的，且有

$$F_p(\sigma_n)=V_p\{(i\,\mathrm{sgn}k)k\}$$

$$=\{f\,|\,f\in X^p_{2\pi}\text{ 且}\omega(\tilde{f},t)_p=O(t),t\to 0^+\}。$$

证明 由于对$f\in X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$）有

$$\sigma_n(f,x)=(f*F_n)(x)$$

其中$F_n(t)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kt$，因此有

$$1-2\widehat{F_n}(k)=\begin{cases}\dfrac{|k|}{n+1} & |k|\leqslant n+1\\ 1 & |k|\geqslant n+1\end{cases}$$

于是 $\varphi(n)=1-2\widehat{F_n}(1)=\dfrac{1}{n+1}\sim\dfrac{1}{n}$ $(n\to+\infty)$，则对每个 $k\in Z\setminus\{0\}$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2\widehat{F_n}(k)}{\varphi(n)}=|k|=(\operatorname{sgn}k)k$$

其次，对每个 $n\in N$，令

$$\lambda_{k,n}=\begin{cases}\dfrac{1-2\widehat{F_n}(k)}{\varphi(n)|k|} & k\in Z\setminus\{0\}\\ 1 & k=0,\end{cases}$$

则有 $\lambda_{-k,n}=\lambda_{k,n}$，即对每个 $n\in N$，$\lambda_n=\{\lambda_{k,n}\}_{k\in Z}$ 是偶型的，且 $\lambda_n\in l^0_\infty$。又因为

$$\lambda_{k,n}=\begin{cases}1 & 0\leqslant k\leqslant n+1\\ \dfrac{n+1}{k} & k\geqslant n+1\end{cases}$$

且 $\lambda_n=\{\lambda_{k,n}\}_{k\in Z}$ 是关于 n 一致拟凸的，所以由推论4·14和定理4·2得到

$$F_p(\sigma_n)=V_p\{(\operatorname{sgn}k)k\}$$

$$=\{f\mid f\in X^p_{2\pi}\text{ 且 }\omega(f,t)_p=O(t)\quad t\to0^+\}$$

证毕。

更一般地，考查Fourier级数的α阶典型平均 $R_n^{(\alpha)}(\alpha>0)$，对 $f\in X^p_{2\pi}$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ 有

$$R_n^{(\alpha)}(f,x)=\left(f*X_n^{(\alpha)}\right)(x)$$

其中

$$X_n^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^\alpha\right]\cos kt$$

因对 $0<\alpha<2$ 典型平均 $R_n^{(\alpha)}$ 是正线性算子，对 $\alpha>0$，S. Aljancic得到如下饱和结果

系2. 若 $\alpha<0$，则α阶典型平均 $R_n^{(\alpha)}$ 在 $X^p_{2\pi}$ 上关于 $n^{-\alpha}$ 是饱和的，且

$$F_p\left(R_n^{(\alpha)}\right)=V_p\{|k|^\alpha\}$$

证明 由于

$$1-2X_n^{(\alpha)\wedge}(k)=\begin{cases}\left(\frac{|k|}{n+1}\right)^{\alpha} & (|k|\leqslant n)\\ 1 & (|k|>n)\end{cases}$$

取$\varphi(n)=1-2X_n^{(\alpha)\wedge}(1)=\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\sim n^{-\alpha}$，则对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2X_n^{(\alpha)\wedge}(k)}{\varphi(n)}=|k|^{\alpha}.$$

其次，对每个$n\in N$，令

$$\lambda_{k,n}=\begin{cases}\frac{1-2X_n^{(\alpha)\wedge}(k)}{\varphi(n)|k|^{\alpha}} & k\in Z\setminus\{0\}\\ 1 & k=0\end{cases}$$

则有$\lambda_{k,n}=\lambda_{-k,n}$，即对每个$n\in N$，$\lambda_n=\{\lambda_{k,n}\}_{k\in Z}$是偶型的，且$\lambda_n\in l_{\infty}^0$，又因

$$\lambda_{k,n}=\begin{cases}1 & (k\leqslant n)\\ \left(\frac{n+1}{k}\right)^{\alpha} & (k>n)\end{cases}$$

且$\lambda_n=\{\lambda_{k,n}\}_{k\in Z}$关于n是一致拟凸的，事实上

$$\Delta^2\lambda_{k,n}=\lambda_{k,n}-2\lambda_{k+1,n}+\lambda_{k+2,n}$$

$$=\begin{cases}0 & (k\leqslant n-1)\\ -1+\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\alpha} & (k=n)\\ (n+1)^{\alpha}(k^{-\alpha}-2(k+1)^{-\alpha}+(k+2)^{-\alpha}) & (k\geqslant n+1)\end{cases}$$

现在设$h(x)=x^{\alpha}$，则存在ζ_k，ζ_k'和$\eta_k\in\left(\frac{1}{k+2},\frac{1}{k}\right)$使得

$$|k^{-\alpha}-2(k+1)^{-\alpha}+(k+2)^{-\alpha}|\leqslant\left|\frac{h'(\zeta_k)}{k(k+1)}-\frac{h'(\zeta_k')}{(k+1)(k+2)}\right|$$

$$\leqslant(k+1)^{-1}(k+2)^{-1}|\zeta_k-\zeta_k'||h''(\eta_k)|+2k^{-1}(k+1)^{-1}(k+2)^{-1}|h'(\zeta_k)|$$

$$\leqslant 2k^{-4}\alpha(\alpha-1)(k+2)^{2-\alpha}+2k^{-3}\alpha(k+2)^{1-\alpha}\leqslant Ck^{-2-\alpha}$$

其中C是与k无关的正常数，于是有

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_{k,n}|\leqslant n\left(1-\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\alpha}\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k+1)\Delta^2\lambda_k$$

$$\leqslant n\left(1-\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\alpha}\right)+C(n+1)^{\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-1-\alpha}\leqslant M_{\alpha}<+\infty$$

其中M是与n无关的正数。

最后由推论4·14得到，$R_n^{(\alpha)}(\alpha>0)$在$X_{2\pi}^p$上关于$n^{-\alpha}$是饱和的，且有

$$F_\rho(R_n^{(\alpha)})=V_\rho\{|k|^\alpha\}.$$

证毕

为了扩大定理4·14的效力，我们给出一致有界乘子的一个充分条件。

引理4·11 设$\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}_{k\in Z}$，若存在$h(x)\in L_1(-\infty,\infty)$且

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)dx=1$$

使得对$\rho>0$和$k\in Z$有

$$\lambda_{k\rho}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-ik\frac{t}{\rho}}dt,$$

则$\lambda_\rho\in(X_{2\pi}^p,X_{2\pi}^p)(1\leqslant p<+\infty)$，$(L_{2\pi}^\infty,L_{2\pi}^\infty)$和$(BV_{2\pi},BV_{2\pi})$，且$U_{\lambda_\rho}$关于$\rho>0$是一致有界乘子。

证明 对$\rho>0$，令

$$h_\rho(x)=\rho\sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(\rho(x+2k\pi)),$$

则

$$\|h_\rho\|_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|h(x)|dx<+\infty,$$

即h_ρ在$L_{2\pi}^1$关于$\rho>0$是一致有界的，且有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h_\rho(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt=1,$$

又对每个$k\in Z$有

$$h_\rho^\wedge(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h_\rho(t)e^{-ikt}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-ik\frac{t}{\rho}}dt=\lambda_{k\rho}$$

对$f\in X_{2\pi}^p(1\leqslant p<+\infty)$和$f\in L_{2\pi}^\infty$，令

$$U_{\lambda_\rho}(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h_\rho(t)f(x-t)dt$$

则$U_{\lambda_\rho}(f)\in X_{2\pi}^p$和$L_{2\pi}^\infty$，且对每个$k\in Z$有

$$U_{\lambda_\rho}(f)^\wedge(k)=h_\rho^\wedge(k)\hat{f}(k)=\lambda_{k\rho}\hat{f}(k)$$

即$\lambda_\rho \in (X^p_{2\pi}, X^p_{2\pi})$和$(L^\infty_{2\pi}, L^\infty_{2\pi})$且对$\rho>0$有

$$\|U_{\lambda_\rho}\| \leqslant \|h_\rho\| \leqslant M < +\infty。$$

又对$\mu \in BV_{2\pi}$，令

$$U_{\lambda_\rho}(d\mu, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_\rho(x-t)d\mu(t)$$

其中

$$v_\rho(x) = \int_{-\pi}^{x} h_\rho(\tau)d\tau \ (\rho>0)$$

则$U_{\lambda_\rho}(d\mu) \in BV_{2\pi}$，且有

$$U_{\lambda_\rho}(d\mu)^\vee(x) = \mu^\vee(k)\lambda_{k\rho} \qquad (k \in Z)$$

可见乘子U_{λ_ρ}关于$\rho>0$是一致有界的、证毕。

由引理4·11和定理4·14得到

推论4·16 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho>0}$是一致有界的Borel测度核且适合如下条件：

Ⅰ)存在$\varphi(\rho) \to 0^+$ ($\rho \to +\infty$)使得对每个$k \in Z\setminus\{0\}$有

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)} = \psi_k \neq 0$$

并约定$\psi_0 = 1$。

Ⅱ)存在$h \in L_1(-\infty, +\infty)$且$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 1$使得对$\rho>0$和$k \in Z$有

$$\lambda_{k\rho} = \frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)\psi_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-ik\frac{t}{\rho}}td$$

则对$1 \leqslant p \leqslant +\infty$有

$$F_p(I_\rho) = V_p\{\psi_k\}。$$

2.4 Turesky等价定理及其推广

关于正卷积算子列的饱和类，A.H.Turesky证得如下等价定理

定理4·15 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶 Borel 测度核且$1-\alpha_{1,\rho} = o(1)$ ($\rho \to \rho_0$)，若适合Turesky等价条件之一，则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X^p_{2\pi}$ ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$)上关于$1-\alpha_{1,\rho}$是饱和的、且对$f \in X^p_{2\pi}$、$f \neq \text{const}$，如下命题是等价的：

Ⅰ) $f \in F_p(I_\rho)$，

Ⅱ) $f \in V_p\{(ik)^2\}$，

Ⅲ) $\omega_2(f,t)_p = O(t^2) \qquad (t \to 0^+)$。

IV) $\omega(f',t)_p=O(t)$ $(t\to 0^+)$

证明 I)⟹II)⟹IV)是推论4·12的断言

II)⟹III)是定理4·1的特例（取r=2）。

IV)⟹I)是定理2·32的直接推论

证毕

作为例子，考查Jackson--松岗算子：对$f\in X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p\leqslant+\infty$），令

$$J_{n,p,q}(f,x)=(f*K_{n,p,q})$$

其中n、p，q ∈N，而

$$K_{n,p,q}(t)=C_{n,p,q}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{2}}$$

并选取$C_{n,p,q}$使得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{n,p,q}(t)dt=1。$$

为了确定$\{J_{n,p,q}\}_{n\in N}$的饱和阶，我们需要利用如下弱渐近关系：对每个$p\geqslant q\geqslant 1$有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{3}}dt\asymp n^{2q-1}\qquad(n\to+\infty)\qquad(2\cdot21)$$

实际上，由于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{2}}dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{2}}dt$$

和当$0\leqslant t\leqslant\pi$时有

$$\left(\frac{t}{\pi}\right)^{2q}\leqslant\sin^{2q}\frac{t}{2}\leqslant\left(\frac{t}{2}\right)^{2q}$$

因此得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{2}}dt\asymp\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\left(\frac{t}{2}\right)^{2q}}dt$$

$$=2(n+1)^{2q-1}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{n+1}{2}\pi}\frac{\sin^{2p}u}{u^{2q}}du\asymp n^{2q-1}\qquad(n\to+\infty).$$

其中利用$p\geqslant q\geqslant 1$时，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2p}u}{u^{2q}}du<+\infty$。

应用定理4·15，我们有

系1. 对每个$r\geqslant q\geqslant 2$，Jackson--松岗算子列$\{J_{n,1,r,q}\}_{n\in N}$在$X^p_{2\pi}$（$1\leqslant p\leqslant +\infty$）上关于$n^{-2}$是饱和的，且

$$F_p(J_{n,1,r,q})=V_p((ik)^2)$$
$$=\{f\mid f\in X^p_{2\pi}, 且\omega(f',t)_p=O(t)\quad t\to 0^+\}$$

证明　由（2·21）推出

$$C_{n,1,r,q}\asymp n^{-2q+1}\qquad (n\to+\infty)$$

又

$$1-\alpha_{1,n}=\frac{2}{\pi}C_{n,1,r,q}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2r}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q-2}\frac{t}{2}}dt$$
$$\asymp n^{-2q+1}n^{2q-3}=n^{-2}\qquad (n\to+\infty)$$

当$q\geqslant 3$时，由（2·21）推出

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4\frac{t}{2}K_{n,1,r,q}(t)dt=C_{n,1,r,q}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2r}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q-4}\frac{t}{2}}dt$$
$$\asymp n^{-2q+1}n^{2q-5}=n^{-4}=o(1-\alpha_{1,n})\qquad (n\to+\infty)$$

而当$q=2$时，则由（2·21）推出

$$\frac{1}{\pi}\int\sin^4\frac{t}{2}K_{n,1,r,2}(t)dt=\frac{1}{\pi}C_{n,1,r,2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2r}\frac{n+1}{2}tdt$$
$$=O(n^{-3})=o(1-\alpha_{1,n})\qquad (n\to+\infty)。$$

可见Turesky等价条件Ⅱ)适合，因此所需的断言由定理4·15直接导出，证毕。

自然要问，对定理4·5的结论而言，Turesky等价条件是否必要呢？为此，我们证明如下引理。

引理4·12　设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核，则如下条件是等价的：

Ⅰ)存在$C>0$，对每个$k\in N$有$\rho_0(k)>0$，使得当$|\rho-\rho_0|<\rho_0(k)$时，有

$$\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{1-2\mu_\rho^\vee(1)}\geqslant Ck^2.\tag{2·22}$$

Ⅱ)存在$C'>0$，对每个$\varepsilon>0$有$\rho_0(\varepsilon)>0$使得当$|\rho-\rho_0|<\rho_0(\varepsilon)$时，有

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin^2\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)\geqslant C'\left(1-2\mu_\rho^\vee(1)\right)\tag{2·23}$$

证明 I)$\Longrightarrow$II). 对$\forall\varepsilon>0$, 记$S_\varepsilon=[-\pi,\pi]\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)$, 则对$t\in S_\varepsilon$有

$$\sin^2\frac{kt}{2}\leqslant 1\leqslant\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

于是对$\rho\in\Omega$有

$$\frac{1}{\pi}\int_{S_\varepsilon}\sin^2\frac{kt}{2}\,d\mu_\rho(t)\leqslant\sin^{-2}\frac{\varepsilon}{2}\left(1-2\check{\mu}_\rho(1)\right),$$

又当$|t|<\varepsilon$时，有

$$\sin^2\frac{kt}{2}\leqslant k^2\sin^2\frac{t}{2}$$

选取$k_0\in N$使得$Ck_0^2>2\sin^{-2}\frac{\varepsilon}{2}$，则由I)得到，当$|\rho-\rho_0|<\rho_0(k_0)$时，有

$$\begin{aligned}
k_0^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin^2\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)&\geqslant\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin^2\frac{k_0t}{2}d\mu_\rho(t)\\
&=\left(\int_{-\pi}^{\pi}-\int_{S_\varepsilon}\right)\sin^2\frac{k_0t}{2}d\mu_\rho(t)\\
&\geqslant\frac{\pi}{2}Ck_0^2\left(1-2\check{\mu}_\rho(1)\right)-\frac{\pi}{2}\sin^{-2}\frac{\varepsilon}{2}\left(1-2\check{\mu}_\rho(1)\right)\\
&=\frac{\pi}{2}\left(1-2\check{\mu}_\rho(1)\right)\left(Ck_0^2-\frac{Ck_0^2}{2}\right)\\
&=\frac{\pi}{4}Ck_0^2\left(1-2\check{\mu}_\rho(1)\right)
\end{aligned}$$

故

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin^2\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)\geqslant\frac{\pi}{4}C\left(1-2\check{\mu}_\rho(1)\right)$$

因此，取$\rho_0(\varepsilon)=\rho_0(k_0)$和$C'=\frac{\pi}{4}C$即得II)。

II)$\Longrightarrow$I). 对每个$k\in N$，取$0<\varepsilon<\frac{\pi}{k}$，则当$|t|<\varepsilon$时，有

$$\sin^2\frac{kt}{2}\geqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^2k^2\sin^2\frac{t}{2}$$

所以有

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}d\mu_\rho(t)&\geqslant\frac{2}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin^2\frac{kt}{2}d\mu_\rho(t)\\
&\geqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^3k^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin^2\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)
\end{aligned}$$

因此由II)，当$|\rho-\rho_0|<\rho_0(\varepsilon)$时，有

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}d\mu_\rho(t)\geqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^3k^2C'\left(1-2\mu_\rho^\vee(1)\right),$$

或

$$1-2\mu_\rho^\vee(k)\geqslant\left(\frac{2}{\pi}\right)^3C'k^2\left(1-2\mu_\rho^\vee(1)\right)$$

于是取$\rho_0(k)=\rho_0(\varepsilon)\left(0<\varepsilon<\frac{\pi}{k}\right)$和$C=C'\left(\frac{2}{\pi}\right)^3$，即得到Ⅰ)。证毕

通常称引理4·12中的等价条件Ⅰ)、Ⅱ)为广义 Turesky 等价条件，我们指出不适合Turesky等价条件但适合广义 Turesky等价条件的正、偶 Borel 测度核是存在的，譬如，设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核，且对每个$k\in N$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{1-2\mu_\rho^\vee(1)}=k^2$$

令

$$d\overline{\mu}_\rho(t)=2\mu_\rho^\vee(1)d\mu_\rho(t)+\frac{1-2\mu_\rho^\vee(1)}{2}\left(d\mu_\rho\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+d\mu_\rho\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\overline{\mu}_\rho(t)=1,$$

又对每个$k\in N$有

$$2\overline{\mu}_\rho^\vee(k)=2\mu_\rho^\vee(k)\left(2\mu_\rho^\vee(1)+\left(1-2\mu_\rho^\vee(1)\right)\cos\frac{k\pi}{2}\right)$$

所以有

$$\overline{\psi}_k=\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-2\overline{\mu}_\rho^\vee(k)}{1-2\overline{\mu}_\rho^\vee(1)}=\begin{cases}\frac{k^2+1}{2} & k=2m-1,\\ \frac{k^2+1(-1)^{m-1}}{2} & k=2m.\end{cases}$$

可见$\{d\overline{\mu}_\rho\}_{\rho\in\Omega}$不适合Turesky等价条件，但对每个$k\in N$，有$\overline{\psi}_k\geqslant\frac{k^2}{2}$，即$\{d\overline{\mu}_\rho\}_{\rho\in\Omega}$适合广义Turesky等价条件。

现在可以推广Turesky等价定理（定理4·15）得到（类似的证明参DeVore[7]）。

定理4·16 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核，若适合广义Turesky等价条件之一，则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p$（$1\leqslant p+\infty$）上关于$1-\alpha_{1\rho}$是饱和的，且对$f\in X_{2\pi}^p$、$f\neq$常数，如下命题是等价的：

Ⅰ) $f\in F_p(I_\rho)$,

Ⅱ) $f\in V_p\{(ik)^2\}$,

III) $\omega_2(f,t)_p = O(t^2)$ $(t\to 0^+)$

IV) $\omega(f',t)_p = O(t)$ $(t\to 0^+)$

2·5 关于一致有界乘子条件的讨论

§2·3在一致有界乘子条件之下建立饱和类的等价关系，现在讨论一致有界乘子条件对饱和类等价关系成立的必要性，由§2·4的Turesky等价定理及其推广形式可见，对于正、偶卷积算子族饱和类的等价关系成立，只要存在常数C>0使得对每个$k\in N$有$\lim\limits_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=\psi_k\geq Ck^2$，而无需假定一致有界乘子条件，因此感兴趣的自然是讨论$\psi_k=o(k^2)$，例如$\psi_k=|k|^\alpha$ $(0<\alpha<2)$时，饱和类等价关系成立，一致有界乘子条件是否必要？为此需要建立一些引理。

设对每个$k\in Z\setminus\{0\}$，$\psi_k=|k|^\alpha$ $(0<\alpha<2)$，则$\lambda_k:=\{\psi_k^{-1}\}$ $k\in Z\setminus\{0\}$是凸性偶型数列，又因$\lambda_k\in l^0_\infty$，因此由定理4·5存在$\varphi_\alpha\geq 0$且$\varphi_\alpha\in L^1_{2\pi}$使得对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\widehat{\varphi_\alpha}(k)=|k|^{-\alpha}$$

不妨设$\widehat{\varphi_\alpha}(0)=0$，否则用$\varphi_\alpha(x)-\widehat{\varphi_\alpha}(0)$代替，因此有

$$\varphi_\alpha(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{e^{ikx}}{|k|^\alpha}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^\alpha} \qquad (2\cdot24)$$

引理4·18 设$f\in X^p_{2\pi}$ $(1\leq p\leq+\infty)$，则$f\in V_p\{|k|^\alpha\}$ $(0<\alpha<2)$的充要条件是存在$g\in L^p_{2\pi}$ $(1<p\leq+\infty)$和$\mu\in BV_{2\pi}$ $(p=1)$使得

$$f(x)-\widehat{f}(0)=\frac{1}{\pi}\begin{cases}(\varphi_\alpha * g)(x) & (1<p\leq+\infty)\\ (\varphi_\alpha * d\mu)(x) & (p=1).\end{cases}$$

证明 $\Rightarrow$）因为$f\in V_p\{|k|^\alpha\}$，所以存在$g\in L^p_{2\pi}(1<p\leq+\infty)$和$\mu\in BV_{2\pi}(p=1)$使得对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\widehat{f}(k)|k|^\alpha=\begin{cases}\widehat{g}(k) & (1<p\leq+\infty)\\ \check{\mu}(k) & (p=1)\end{cases}$$

因此对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\widehat{f}(k)=\begin{cases}|k|^{-\alpha}\widehat{g}(k) & (1<p\leq+\infty)\\ |k|^{-\alpha}\check{\mu}(k) & (p=1).\end{cases}$$

于是由唯一性定理得到

$$f(x)-\widehat{f}(0)=\frac{1}{\pi}\begin{cases}(\varphi_\alpha * g)(x) & (1<p\leq+\infty)\\ (\varphi_\alpha * d\mu)(x) & (p=1)\end{cases}$$

充分性的证明是明显的，证毕

关于乘子的一致有界性条件，有如下结论。

定理4·17 设 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是Borel测度核且适合如下条件。

Ⅰ）存在 $\varphi(\rho)\to 0^+$（$\rho\to\rho_0$）使得对每个 $k\in Z\setminus\{0\}$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)}=|k|^\alpha \qquad (2\cdot25)$$

其中 $\alpha>0$

Ⅱ）$\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}_{k\in Z}\in\begin{cases}(X^p_{2\pi},\ X^p_{2\pi}) & (1<p\leqslant+\infty)\\ (BV_{2\pi},\ BV_{2\pi}) & (p=1)\end{cases}$

其中

$$\lambda_{k\rho}=\begin{cases}\dfrac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)\,|k|^\alpha} & k\in Z\setminus\{0\}\\ 1 & k=0\end{cases}$$

若 $V_p\{|k|^\alpha\}\subset F_p(I_\rho)$，则 $\{U_{\lambda\rho}\}_{\rho\in\Omega}$ 关于 ρ 是一致有界的。

证明 分两种情况讨论，首先设 $1<p\leqslant+\infty$；对任何 $g\in X^p_{2\pi}(1<p\leqslant+\infty)$ 令

$$G(x)=g(x)-\hat{g}(0)$$

则 $G\in X^p_{2\pi}(1<p\leqslant+\infty)$ 且 $\hat{G}(0)=0$，$\hat{G}(k)=\hat{g}(k)\ (k\in Z\setminus\{0\})$。

又令

$$f_G(x)=\frac{1}{2\pi}(G*\varphi_\alpha)(x)$$

则由引理4·13的到 $f_G\in V_p\{|k|^\alpha\}$，又因为

$$\hat{f_G}(0)=0,\ \hat{f_G}(k)=\hat{G}(k)|k|^{-\alpha}\quad (k\in Z\setminus\{0\})$$

所以有

$$\hat{G}(k)=|k|^\alpha\hat{f_G}(k)\qquad (k\in Z)$$

由于 $\lambda_\rho\in(X^p_{2\pi},\ X^p_{2\pi})$，所以存在 $U_{\lambda_\rho}(G)\in X^p_{2\pi}$ 使得对每个 $k\in Z$ 有

$$U_{\lambda_\rho}(G)^\wedge(k)=\hat{G}(k)\lambda_{k\rho}=\lambda_{k\rho}|k|^\alpha\hat{f_G}(k)$$

$$=\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)}\hat{f_G}(k)$$

$$=\frac{(f_G-I_\rho(f_G))^\wedge(k)}{\varphi(\rho)}$$

于是由唯一性定理得到

$$U_{\lambda_\rho}(G,\ x)=\frac{f_G(x)-I_\rho(f_G,\ x)}{\varphi(\rho)}$$

而

$$U_{\lambda_\rho}(g,x)=\frac{f_G(x)-I_\rho(f_G,x)}{\varphi(\rho)}$$

因为$f_G\in V\{|k|^\alpha\}\subset F_p\{I_\rho\}$，所以有

$$\|f_G-I_\rho(f_G)\|_p=O(\varphi(\rho)) \qquad (\rho\to\rho_0)。$$

因此对每个$g\in X^p_{2\pi}(1<p\leqslant+\infty$有)

$$\|U_{\lambda_\rho}(g)\|_p\leqslant M_g<+\infty$$

由共鸣定理得到

$$\|U_{\lambda_\rho}\|\left(X^p_{2\pi},\ X^p_{2\pi}\right)\leqslant M<+\infty。$$

其次，设$p=1$，对每个$\mu\in BV_{2\pi}$，令

$$\mu_0(x)=\mu(x)-\mu^\vee(0)$$

则$\mu_0^\vee(0)=0$和$\mu_0^\vee(k)=\mu^\vee(k)\qquad(k\in Z\setminus\{0\})$。又令

$$f_{\mu_0}(x)=\frac{1}{\pi}(\varphi_\alpha*d\mu_0)(x)$$

则$f_{\mu_0}\in V_1\{|k|^\alpha\}$且

$$\hat{f}_{\mu_0}(0)=0,\quad \hat{f}_{\mu_0}(k)=|k|^{-\alpha}\mu_0^\vee(k)\qquad(k\in Z\setminus\{0\}),$$

或对每个$k\in Z$有

$$\mu_0^\vee(k)=|k|^\alpha\hat{f}_{\mu_0}(k)$$

由于$\lambda_\rho\in(BV_{2\pi},\ BV_{2\pi})$，所以对$k\in Z$有

$$U_{\lambda_\rho}(d\mu_0)^\vee(k)=\lambda_{k,\rho}\mu_0^\vee(k)$$

$$=\lambda_{k,\rho}|k|^\alpha\hat{f}_{\mu_0}(k)=\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)}\hat{f}_{\mu_0}(k)$$

$$=\frac{(f_{\mu_0}-I_\rho(f_{\mu_0}))^\wedge(k)}{\varphi(\rho)}$$

因此，令

$$\nu(x)=\int_{-\pi}^{x}\frac{f_{\mu_0}(\tau)-I_\rho(f_{\mu_0},\tau)}{\varphi(\rho)}d\tau$$

则对每个$k\in Z$有

$$U_{\lambda_\rho}(d\mu_0)^\vee(k)=\nu^\vee(k)$$

从而得到

$$dU_{\lambda_\rho}(d\mu_0,x)=\frac{f_{\mu_0}(x)-I_\rho(f_{\mu_0},x)}{\varphi(\rho)}$$

于是对每个$\mu\in BV_{2\pi}$有

$$\|U_{\lambda_\rho}(d\mu)\|_{BV_{2\pi}}=\frac{\|f_{\mu_0}-I_\rho(f_{\mu_0})\|_1}{\varphi(\rho)}$$

因此由$f_{\mu_0}\in V_1\{|k|^\alpha\}\subset F_1(I_\rho)$推出

$$\|U_{\lambda_\rho}(d\mu)\|_{BV_{2\pi}} = O(1) \qquad (\rho\to\rho_0)$$

所以由Helly－Bary定理得到

$$\|U_{\lambda_\rho}\|_{(BV_{2\pi},\ BV_{2\pi})} \leqslant M < +\infty$$

证毕。

更一般地，类似可证得

定理4·18. 设 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是一致有界Borel测度核且适合如下条件：

Ⅰ)存在 $\varphi(\rho)\to 0^+$ $(\rho\to\rho_0)$ 使得对每个 $k\in Z\setminus\{0\}$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)} = \psi_k \neq 0$$

且 $\{\psi_k^{-1}\}k\in Z\setminus\{0\}\in(X_{2\pi}^p,\ X_{2\pi}^p)$ 其中约定 $\psi_0=0$

Ⅱ) $\lambda_\rho = \{\lambda_{k\rho}\}_{\rho\in\Omega}\in\begin{cases}(X_{2\pi}^p,\ X_{2\pi}^p) & (1<p\leqslant+\infty)\\ (BV_{2\pi}, BV_{2\pi}) & (p=1)\end{cases}$

其中

$$\lambda_{k\rho} = \begin{cases}\dfrac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)\psi_k} & k\in Z\setminus\{0\}.\\ 1 & k=0\end{cases}$$

若 $V,\{\psi_k\}\subset F_p(I_p)$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，则乘子族 $\{U_{\lambda_\rho}\}$ 关于 ρ 是一致有界的。

最后我们证明关于 $\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}k\in z$ 关于 ρ 一致有界性的命题，得到

定理4.19 设 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是一致有界的Berl测度核，且适合如下条件：

Ⅰ)存在 $\varphi(\rho)\to 0^+(\rho\to\rho_0)$ 使得对 $k\in Z\setminus\{0\}$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\varphi(\rho)} = \psi_k \neq 0,$$

且 $\{\psi_k^{-1}\}_{k\in Z\setminus\{0\}}\in\begin{cases}(C_{2\pi}, C_{2\pi})\\ (L^1_{2\pi},\ L^1_{2\pi})\end{cases}$，并约定 $\psi_0=0$

Ⅱ)对 $\lambda_\rho=\{\lambda_{k\rho}\}_{k\in Z}$ 存在 $v_\rho\in BV_{2\pi}$ 使得

$$v_\rho^\vee(0)=1,\ v_\rho^\vee(k)=\lambda_{k\rho} \qquad (k\in Z\setminus\{0\})$$

或存在 $g_\rho\in L^1_{2\pi}$ 使得

$$g_\rho^\wedge(0)=1,\ g_\rho^\wedge(k)=\lambda_{k\rho} \quad (k\in Z\setminus\{0\})$$

其中

$$\lambda_{k\rho} = \begin{cases}\dfrac{1-2\mu_\rho^\vee(k)}{\psi_k\varphi(\rho)} & k\in Z\setminus\{0\}\\ 1 & k=0\end{cases}$$

若 $\{\|\lambda_\rho\|_\infty\}$ 关于 ρ 无界，则

$$V_\infty\{\psi_k\}\not\subset F_\infty(I_\rho)$$

或

$$V_1\{\psi_k\}\not\subset F_1(I_\rho)$$

证明 设 $v_\rho\in BV_{2\pi}$ 使得

$$v_\rho^\vee(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dv_\rho(t)=1$$

$$v_\rho^\vee(k)=\lambda_{k\rho}\qquad (k\in Z\setminus\{0\})$$

注意到

$$|\lambda_{k\rho}|=|v_\rho^\vee(k)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}dv_\rho(t)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|dv_\rho(t)|=\|v_\rho\|_{BV_{2\pi}}$$

（或存在 $g_\rho\in L^1_{2\pi}$ 使得

$$g_\rho^\wedge(0)=1,\ g_\rho^\wedge(k)=\lambda_{k\rho}\qquad (k\in Z\setminus\{0\})$$

从而有

$$|\lambda_{k\rho}|=|g_\rho^\wedge(k)|\leqslant\|g_\rho\|_1)$$

对 $\forall g\in C_{2\pi}$ 令

$$U_{\lambda_\rho}(g,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x-t)dv_\rho(t)$$

则 $\|U_{\lambda_\rho}\|_{(C_{2\pi},C_{2\pi})}=\|v_\rho\|_{BV_{2\pi}}$

（类似地，对 $\forall\ g\in L^1_{2\pi}$ 令

$$U_{\lambda_\rho}(g,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x-t)g_\rho(t)dt$$

而有

$$\|U_{\lambda_\rho}\|_{(L^1_{2\pi},L^1_{2\pi})}=\|g_\rho\|_1)$$

若 $\{\|\lambda_\rho\|_\infty\}$ 关于 ρ 是无界的，则 $\|U_{\lambda_\rho}\|_{(C_{2\pi},C_{2\pi})}$ 关于无界，因此存在 $\rho_j\to\rho_0$ $(j\to+\infty)$ 和 $g_j\in C_{2\pi}$ 使得

$$\|U_{\lambda_{\rho_j}}(g_0)\|_{C_{2\pi}} \to +\infty \qquad (j\to+\infty)$$

由于$\{\psi_k^{-1}\}_{k\in Z\setminus\{0\}}\in(C_{2\pi},C_{2\pi})$，所以存在$f_0\in C_{2\pi}$使得对每个$k\in Z\setminus\{0\}$有

$$\hat{f}_0(k)=\psi_k^{-1}\hat{g}_0(k)$$

从而有对每个$k\in Z$有

$$(g_0-\hat{g}_0(0))\hat{\ }(k)=\psi_k\hat{f}_0(k)$$

所以有$f_0\in V_\infty\{\psi_k\}$。又因为

$$\lambda_{k\rho_j}(g_0-\hat{g}_0(0))\hat{\ }(k)=\frac{1-2\mu_{\rho_j}^{\vee}(k)}{\varphi(\rho_j)}\hat{f}_0(k)$$

所以有

$$U_{\lambda_{\rho_j}}(g_0,x)=\frac{f_0(x)-I_{\rho_j}(f_0,x)}{\varphi(\rho_j)}+\hat{g}_0(0)$$

从而导出

$$\frac{\|f_0-I_{\rho_j}(f_0)\|_{C_{2\pi}}}{\varphi(\rho_j)}\to+\infty \qquad (j\to+\infty)$$

即$f_0\notin F_\infty(I_\rho)$，因此得到

$$V_\infty\{\psi_k\}\not\subset F_\infty(I_\rho)$$

（同样地可得到

$$V_1\{\psi_k\}\not\subset F_1(I_\rho)）$$

证毕。

2.8　以$(1-\alpha_{m\rho})$为饱和阶的饱和类特征

设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核，若存在$m\in N$使得对每个$k\in N$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{m\rho}}=\psi_{km}>0 \qquad (2\cdot27)$$

则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$上饱和，其饱和阶为$(1-\alpha_{m\rho})$，设$m\in N$是适合(2·27)式的最小正整数即对$0<k<m$有

$$\overline{\lim_{\rho\to\rho_0}}\frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{m\rho}}=+\infty \qquad (2\cdot28)$$

现在讨论以$(1-\alpha_{m\rho})$为饱和阶的饱和类$F_p(I_\rho)$的特征。

记

$$X_{\frac{2\pi}{m}}^p=\left\{f\mid f\in X_{2\pi}^p\ \text{且}f(x+\frac{2\pi}{m})=f(x)\right\}$$

对$h\in X_{2\pi}^{p}$，令

$$\bar{I}_\rho(h,x)=I_\rho\left(h(mt),\frac{x}{m}\right)$$

则$\bar{I}_\rho$是$X_{2\pi}^{p}$到自身内正、偶卷积算子，且

$$\bar{\beta}_\rho^{2}=\bar{I}_\rho\left(2\sin^2\frac{t}{2},\ 0\right)$$

$$=I_\rho\left(2\sin^2\frac{mt}{2},\ 0\right)=1-a_{m\rho}$$

因此由定理2.32得到

引理4.14若$f\in X_{\frac{2\pi}{m}}^{p}$$(1\leqslant p\leqslant+\infty,\ m\in N)$且$f'\in \mathrm{Lip}1$，则有

$$\|I_\rho(f)-f\|_p=O(1-a_{m\rho}) \tag{2.29}$$

证明　由于$f\in X_{\frac{2\pi}{m}}^{p}(1\leqslant p\leqslant+\infty,\ m\in N)$，令$h(t)=f\left(\frac{t}{m}\right)$，则$h\in X_{2\pi}^{p}$，

且由$\omega(h',t)_p\leqslant\omega\left(f',\frac{t}{m}\right)_p\leqslant\omega(f',t)_p$，因此有$h'\in \mathrm{Lip}1$，利用定理2.32得到

$$\|\bar{I}_\rho(t)-h\|_p=O(1-a_{m\rho})$$

由于对$\forall x\in(-\pi,\ \pi)$有

$$I_\rho(f,x)-f(x)=\bar{I}_\rho(h,mx)-h(mx)$$

所以有

$$\|I_\rho(f)-f\|_p=O(1-a_{m\rho}).$$

证毕

引理4.6　设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in D}$是正、偶Borel测度核且存在$m\in N$适合(2.27)和(2.28)．

若$f\in F_p(I_\rho)$，则$f\in X_{\frac{2\pi}{m}}^{p}$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$。

证明　由于$f\in F_p(I_\rho)$，则有

$$\|I_\rho(f)-f\|_p=O(1-a_{m\rho})\quad(\rho\to\rho_0)$$

所以由Fourier技巧得到，对每个$k\in N$有

$$(1-a_{k\rho})\hat{f}(k)=O(1-a_{m\rho}),$$

$$\frac{1-a_{k\rho}}{1-a_{m\rho}}\hat{f}(k)=O(1) \qquad (\rho\to\rho_0)$$

因此要证明$f\in \dot{X}_{\frac{2\pi}{m}}$，只需证明，对$k\neq 0(\text{mod } m)$，有

$$\overline{\lim_{\rho\to\rho_0}}\frac{1-a_{k\rho}}{1-a_{m\rho}}=+\infty.$$

为此，令$k=lm+j(0<j<m,\ l,j\in N)$，构造函数

$$h_1(x)=\sin^2\frac{mx}{2}+\sin^2\frac{lm+j}{2}x$$

和

$$h_2(x)=\sin^2\frac{jx}{2}$$

若x_0是h_1的零点，则存在n_1和$n_2\in Z$使得

$$mx_0=2n_1\pi;\ (lm+j)x_0=2n_2\pi$$

所以

$$jx_0=2n_2\pi-2n_1l\pi=2\pi(n_2-n_1l)$$

所以

$$jx_0=2n_2\pi-2n_1l\pi=2\pi(n_2-n_1l)$$

因此x_0也是h_2的零点．由于h_1，h_2的一切零点都是二重零点，而且h_1的每个零点必是h_2的零点，所以存在正常数C使得对$x\in(-\pi,\pi)$有

$$Ch_1(x)\geqslant h_2(x).$$

两边积分得到

$$\frac{C}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{mx}{2}d\mu_\rho(x)+\frac{C}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{(lm+j)}{2}xd\mu_\rho(x)$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{jx}{2}d\mu_\rho(x)$$

即

$$C(1-a_{m\rho})+C(1-a_{k\rho})\geqslant 1-a_{j\rho}$$

因此，当$k\neq 0(\text{mod } m)$时，由(2.28)导出

$$\overline{\lim_{\rho\to\rho_0}}\frac{1-a_{k\rho}}{1-a_{m\rho}}\geqslant\overline{\lim_{\rho\to\rho_0}}\frac{1-a_{j\rho}}{1-a_{m\rho}}-C=+\infty$$

由此可见，当$k\neq 0(\text{mod} m)$时，$\hat{f}(k)=0$，即$f\in \dot{X}_{\frac{2\pi}{m}}(1\leqslant p\leqslant+\infty)$；证毕。

设$m\in N$，令$\psi=\{\psi_j\}_{j}\in Z\setminus\{0\}$，其中

$$\psi_j=\begin{cases}\psi_{km} & j=km\\ 0 & j\neq km\end{cases}$$

记

$$V_p^{(m)}\{\psi_j\} = \left\{ f \mid f \in X_{2\pi}^p, \text{且} f \in V_p\{\psi_j\} \right\}$$

类似于定理4.13可得到

定理4.20 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核，且适合如下条件

i)存在$m\in N$，对每个$k\in N$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0} \frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{m\rho}} = \psi_{km} > 0$$

且对$0<k<m$有

$$\overline{\lim_{\rho\to\rho_0}} \frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{m\rho}} = +\infty$$

ii)对每个$\rho\in\Omega$有

$$\lambda_\rho^{(m)} = \left\{ \lambda_{j\rho}^{(m)} \right\}_{j\in Z} \in \begin{cases} (L_{2\pi}^p, L_{2\pi}^p) & (1<p\leqslant+\infty) \\ (BV_{2\pi}, BV_{2\pi}) & (p=1), \end{cases}$$

且乘子$U_{\lambda_\rho}^{(m)}$关于$\rho\to\rho_0$是一致有界的，其中

$$\lambda_{j\rho}^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha_{mk,\rho}}{\psi_{km}(1-\alpha_{m\rho})} & j=mk \\ 0 & j\neq mk \\ 1 & j=0 \end{cases}$$

则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$上饱和，其饱和阶为$(1-\alpha_{m\rho})$，且饱和类

$$F_p(I_\rho) = V_p^{(m)}\{\psi_j\}.$$

类似于Turesky等价定理（定理4.15）有

定理4.21 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核且$1-\alpha_{m\rho}=o(1)$ $(\rho\to\rho_0,\ m\in N)$。若对每个$k\in N$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0} \frac{1-\alpha_{mk,\rho}}{1-\alpha_{m\rho}} = k^2 \tag{2.30}$$

且对$1\leqslant j<m$有

$$\overline{\lim_{\rho\to\rho_0}} \frac{1-\alpha_{j\rho}}{1-\alpha_{m\rho}} = +\infty$$

则$\{I_\rho\}_{\rho\in\Omega}$在$X_{2\pi}^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$上饱和，其饱和阶为$(1-\alpha_{m\rho})$，且

$$F_p(I_\rho) = \left\{ f \mid f \in X_{2\pi}^p, \text{且} \omega(f', t)_p = O(t) \right\}$$

注意，条件（2.30）可用类似地Turesky等价条件之一代替，例如可用如下条件代替

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-a_{2m,\rho}}{1-a_{m,\rho}}=4$$

同样地，应用广义Turesky等价条件，类似于定理4.16得到

定理4.22 设$\{d\mu\}_{\rho\in D}$是正、偶Borel测度核且$(1-a_{m\rho})\to 0^+(\rho\to\rho_0, m\in N)$。若存在$C>0$，对每个$k\in N$有$\rho_0(k)>0$使得当$|\rho-\rho_0|<\rho_0(k)$时有

$$\frac{1-a_{km,\rho}}{1-a_{m,\rho}}\geq Ck^2 \tag{2.31}$$

且对$1\leq j<m$有

$$\overline{\lim_{\rho\to\rho_0}}\frac{1-a_{j\rho}}{1-a_{m\rho}}=+\infty$$

则$\{I_\rho\}_{\rho\in D}$在$X^p_{2\pi}(1\leq p<+\infty)$上饱和，其饱和阶为$1(-a_{m\rho})$，且

$$F_p(I_\rho)=\left\{f\,|\,f\in X^p_{2\pi},\text{且}\,\omega(f',t)_p=O(t)\right\}$$

同样地，条件(2.31)可用如下等价条件代替：存在$C'>0$，对每个$\varepsilon>0$有$\rho_0(\varepsilon)>0$使得当$|\rho-\rho_0|<\rho_0(\varepsilon)$时有

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin^2\frac{mt}{2}d\mu_\rho(t)\geq C'(1-a_{m\rho}).$$

§3 正线性算子在C〔a, b〕上的饱和理论

由于正线性算子列$\{L_n\}_{n\in N}$对C〔a,b〕的逼近度受区间中点的位置影响，所以讨论在C〔a,b〕上的饱和问题，其饱和阶应当设想为一个函数列，其次具有小o饱和阶的再不仅仅是常数，而应当设想为某个特别指定的函数集合并称之为$\{L_n\}_{n\in N}$的平凡类，记作$T(L_n)$，例如通常取$T(L_n)=\{l\,|\,l(x)$是〔a,b〕上的线性函数$\}$。

在上述设想上，我们给出$\{L_n\}_{n\in N}$在C〔a,b〕上的饱和的准确意义。设$D_1=$〔c,d〕$\subseteq$〔a,b〕，$\{L_n\}_{n\in N}$是C〔a,b〕内的正线性算子列，若存在关于$x\in$〔c,d〕一致收敛于零的函数列$\{\varphi_n(x)\}$，且$\varphi_n(x)>0$（$x\in$〔c,d〕）和平凡类$T(L_n)$使得如下条件成立：

i）小o饱和条件：对每个$f\in C$〔a,b〕有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[c,d]}\left|\frac{f(x)-L_n(f,x)}{\varphi_n(x)}\right|=0$$

$$\Longleftrightarrow f\in T(L_n) \tag{3.1}$$

ii）大O饱和条件：存在$f_0\in$〔a,b〕$\setminus T(L_n)$使得

$$\sup_{x\in(c,d)}\left|\frac{f_0(x)-L_n(f_0,x)}{\varphi_n(x)}\right|=O(1) \qquad (3.2)$$

则说$\{L_n\}_{n\in N}$在$C[a,b]$上关于饱和阶$\varphi_n(x)$和平凡类$T(L_n)$是饱和的，而

$$F(L_n, T,\varphi_n)=\left\{f_0 \mid f_0\in C(a,b)\setminus T(L_n)\text{且}\sup_{x\in(c,d)}\left|\frac{f_0(x)-L_n(f_0,x)}{\varphi_n(x)}\right|=O(1)\right\}$$

为$\{L_n\}_{n\in N}$的饱和类。

应当指出，在(3.1)式中我们放弃采用$\underline{\text{Lim}}$，其原因是既使采用$\underline{\text{Lim}}$也不可能保证平凡类$T(L_n)$以及饱和类$F(L_n,T,\varphi_n)$与饱和阶无关。不过，若仅考察$\varphi_n(x)=\varphi(x)\alpha_n$，其中$\varphi(x)$是确定的函数，而$\alpha_n\to 0^+(n\to\infty)$，则采用$\underline{\text{Lim}}$时，可以得到唯一的饱和类，例如许多经典的正线性算子列，其饱和阶均具有这种形式，因而其饱和类是唯一的。

还应当指出，若$\{L_n\}_{n\in N}$具有饱和阶$\{\varphi_n(x)\}$，而$\{\psi_n(x)\}$是另一函数列，且存在C_1，$C_2>0$使得对每个$x\in(c,d)$有

$$C_1\varphi_n(x)\leqslant\psi_n(x)\leqslant C_2\varphi_n(x)$$

则$\{\psi_n(x)\}$也是$\{L_n\}_{n\in N}$的饱和阶。

由于$\varphi_n(x)$可能在端点a，b取零值，因此对$[c,d]=[a,b]$和$a<c<d<b$两种情况，讨论饱和问题是有差异的。前者通称为整体饱和理论，而后者通称局部饱和理论。准确地说，若$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$到自身内正线性算子列，所谓整体饱和理论是研究对每个$x\in(a,b)$使得

$$f(x)-L_n(f,x)=o_x(\varphi_n(x)), \qquad (n\to+\infty),$$

和

$$f(x)-L_n(f,x)=O_x(\varphi_n(x)), \qquad (n\to+\infty),$$

的充要条件，因而有时也称为点态饱和理论。

若$[c,d]\subset[a,b]$，$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$到$C[c,d]$内正线性算子列，由于避开了区间$[a,b]$的端点，因此通常取$\phi_n=\sup_{x\in(c,d)}\varphi_n(x)$，为饱和阶，所以局部饱和理论是研究使得

$$\sup_{x\in(c,d)}\left|f(x)-L_n(f,x)\right|=o(\phi_n) \qquad (n\to+\infty),$$

和

$$\sup_{x\in(c,d)}\left|f(x)-L_n(f,x\right|=O(\phi_n) \qquad (n\to+\infty),$$

的充要条件。

本节利用由Bajsanski—Bojanic创立的抛物线技巧，研究正线性算子的整体和局部饱和理论。

3.1 正线性算子的点态小o饱和定理

设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$上的正线性算子列，为了研究它的饱和性质，首先需要定它的平凡类与饱和阶，应用抛物线引理我们有

定理4.23 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C[a,b]$ 到自身内的正线性算子列，且对每个 $x\in(a,b)$ 有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}L_n((t-x)^2,x)>0.$$

若对每个 $x\in(a,b)$ 有

$$e_k(x)-L_n(e_k,x)=o_x(\varphi_n(x)) \tag{3.3}$$

其中 $e_k(x)=x^k(k=0,1)$，则对 $f\in C[a,b]$ 和每个 $x\in(a,b)$ 有

$$f(x)-L_n(f,x)=o_x(\varphi_n(x)) \quad (n\to+\infty), \tag{3.4}$$

当且仅当 f 在 $[a,b]$ 上是线性的，即

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad x\in[a,b]$$

证明 首先由条件（3.3），充分性断言是明显的，其次证明必要性，采用反证法。设 f 在 $[a,b]$ 上不是线性的，令

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

则 $g(a)=g(b)=0$，且存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $g(x_0)\neq0$，不妨设 $g(x_0)>0$，由于

$$g(x)-L_n(g,x)=f(x)-L_n(f,x)-f(a)(L_n(e_0,x)-e_0)$$

$$-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left((e_1-a)-L_n(e_1-a,x)\right)$$

由此由条件（3.3），（3.4）导出，对每个 $x\in(a,b)$ 有

$$g(x)-L_n(g,x)=o_x(\varphi_n(x)) \qquad (n\to+\infty) \tag{3.5}$$

另一方面，由于 $g(a)=g(b)=0$，$g(x_0)>0$，$x_0\in(a,b)$，所以由抛物线引理，存在 $g\in(a,b)$ 和二次抛物线．

$$Q(x)=\alpha(x-y)^2+\beta(x-y)+g(y) \qquad (\alpha<0),$$

使得对每个 $x\in[a,b]$ 有

$$g(x)\leqslant Q(x) \tag{3.6}$$

于是由（3.6）导出

$$\begin{aligned}L_n(g,y)-g(y)&=L_n(g(x)-g(y),y)+g(y)(L_n(1,y)-1)\\&\leqslant L_n(Q(x)-Q(y),y)+o_y(\varphi_n(y))\\&=\alpha L_n((x-y)^2,y)+\beta L_n(x-y,y)+o_y(\varphi_n(y))\\&=2\alpha\varphi_n(y)+o_y(\varphi_n(y))\end{aligned}$$

由于 $\varphi_n(y)>0$，故得

$$\frac{L_n(g,y)-g(y)}{\varphi_n(y)}\leqslant2\alpha+o_y(1)$$

所以有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(g,y)-g(y)}{\varphi_n(y)}\leq 2\alpha<\alpha<0$$

可见当$n\to+\infty$时

$$L_n(g,y)-g(y)\neq o_y(\varphi_n(y))$$

与（3.5）矛盾．因此必有$g(x)\equiv 0$ $(x\in(a,b))$，即

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\qquad x\in(a,b).$$

证毕．

由定理4.23可见，若$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(a,b)$到自身内的正线性算子列，且适合条件(3.3)，则其平凡类$T(L_n)=\{l\mid l(x)$在(a,b)上是线性的$\}$．

应当指出，定理4.23给出比小o饱和条件还强的结果，因为我们只须要求条件(3.4)是逐点成立的，便导出$f\in T(L_n)$，因而为了得到整体饱和定理，只要建立大O饱和条件．我们有

定理4.24（整体饱和定理） 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(a,b)$到自身内的正线性算子列且对每个$x\in(a,b)$有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}L_n((t-x)^2,x)>0.$$

若对$k=0$，1有

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in(a,b)}\left|\frac{e_k(x)-L_n(e_k,x)}{\varphi_n(x)}\right|=0$$

则$\{L_n\}_{n\in N}$在$C(a,b)$关于$\varphi_n(x)$和$T(L_n)=\{l\mid l(x)$在(a,b)上是线性的$\}$是饱和的．

证明　由条件（3.7）导出，对每个$x\in(a,b)$

有

$$e_k(x)-L_n(e_k,x)=o(\varphi_n(x))\qquad(n\to+\infty),$$

其中$k=0,1$．因此由定理4.23得到到小o饱和条件，即对$f\in C(a,b)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(a,b)}\left|\frac{f(x)-L_n(f,x)}{\varphi_n(x)}\right|=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\ \in T(L_n).$$

其次，取$f_0(t)=t^2\notin T(L_n)$，但是

$$f_0(x)-L_n(f_0,x)=2x(e_1(x)-L_n(e_1,x))$$
$$-x^2(e_0(x)-L_n(e_0,x))-2\varphi_n(x)$$

因此由条件（3.7）导出

$$\sup_{x\in(a,b)}\left|\frac{f_0(x)-L_n(f_0,x)}{\varphi_n(x)}\right|=O(1)$$

即大O饱和条件成立。

因此得到 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $C[a,b]$ 关于 $\varphi_n(x)$ 和 $T(L_n)$ 是饱和的，证毕。

例1 设 $\{B_n\}_{n\in N}$ 是Bernstein算子列，则 $\{B_n\}_{n\in N}$ 在 $C[0,1]$ 关于 $\varphi_n(x)=\dfrac{x(1-x)}{2n}$ 和 $T(B_n)=\{f\,|\,f$ 在 $[0,1]$ 上是线性的$\}$ 是饱和的

证明 由于对 $x\in(0,1)$ 有

$$B_n(1,x)=1,\qquad B_n(t,x)=x$$

和 $x\in(0,1)$ 有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}B_n((t-x)^2,x)=\frac{x(1-x)}{2n}>0.$$

可见对 $k=0,1$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{e_k(x)-B_n(e_k,x)}{\varphi_n(x)}\right|=0$$

即条件(3.7)适合，因此由定理4.24导出所求的结论。证毕

3.2.正卷积算子的点态小o饱和定理

设 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in Q}$ 是正Borel测度核，对 $f\in C_{2\pi}$ 令

$$I_\rho(f,x)=(f*d\mu_\rho)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)d\mu_\rho(t)$$

应用抛物线技巧，R.A.DeVore对 $\{I_\rho\}_{\rho\in Q}$ 建立如下小o饱和定理。

定理4·25 设 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in Q}$ 是正、偶Borel测度核，且适合Turesky等价条件之一，则对 $f\in C_{2\pi}$ 和每个 $x\in(-\pi,\pi)$ 有

$$f(x)-I_\rho(f,x)=o_x(1-a_{1\rho})\qquad(\rho\to\rho_0),\qquad(3.8)$$

当且仅当 $f\equiv$ 常数。

证明 充分性是明显的。现在证明必要性，由于 I_ρ 是常数保持的，所以不妨设 $f(-\pi)=f(\pi)=0$，因此只需要证明 $f(x)\equiv0\ (x\in(-\pi,\pi))$。采用反证法，若存在 $x_0\in(-\pi,\pi)$ 使得 $f(x_0)\neq0$，不妨设 $f(x_0)>0$，应用抛物线引理，存在 $y\in(-\pi,\pi)$ 和二次抛物线 $Q(x)=\alpha(x-y)^2+\beta(x-y)+f(y)\quad(\alpha<0)$，使得对每个 $x\in[-\pi,\pi]$ 有

$$Q(x)\geqslant f(x)\qquad(3.9)$$

于是由(3.9)导出

$$\begin{aligned}I_\rho(f,y)-f(y)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(y))\,d\mu_\rho(x-y)\\&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[Q(x)-Q(y)]\,d\mu_\rho(x-y)\\&=\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-y)^2d\mu_\rho(x-y)+\frac{\beta}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-y)d\mu_\rho(x-y)\qquad(3.10)\end{aligned}$$

由于

$$1-a_{1\rho}=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\mu_\rho(t)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x-u}{2}d\mu_\rho(x-u)$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-y)^2d\mu_\rho(x-y) \tag{3.11}$$

和

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x-y)d\mu_\rho(x-y)=\int_{-\pi-y}^{\pi-y}td\mu_\rho(t)$$

$$=2\int_{\pi-y}^{\pi}td\mu_\rho(t)\leqslant 2\pi\int_{\pi-y}^{\pi}d\mu_\rho(t)$$

又由Turesky等价条件有

$$\int_{\pi-y}^{\pi}d\mu_\rho(t)=o_y(1-a_{1\rho}) \quad (\rho\to\rho_0) \tag{3.12}$$

注意到$a<0$，由（3.10）—（3.12）导出

$$I_\rho(f,y)-f(y)\leqslant 2a(1-a_{1\rho})+o_y(1-a_{1\rho})$$

所以有

$$I_\rho(f,y)-f(y)\neq o_y(1-a_{1\rho})$$

这与（3.8）矛盾，从而断定$f(x)=0$（$x\in(-\pi,\pi)$）。证毕

1972年R.A.DeVore将定理4.25推广到$\{d\mu_\rho\}$不适合Turesky等价条件的情况，得到

定理4.26 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正、偶Borel测度核，若对每个$k\in N$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-a_{k\rho}}{1-a_{1\rho}}=\psi_k>0 \tag{3.13}$$

则对每个$f\in C_{2\pi}$和每个$x\in(-\pi,\pi)$有

$$f(x)-I_\rho(f,x)=o_x(1-a_{1\rho}) \quad (\rho\to\rho_0) \tag{3.14}$$

当且仅当$f\equiv$常数。

为了证明此定理，需要如下一些引理，设$x\in(-\pi,\pi)$，若对x的每个邻域I_x有

$$\int_{I_x}d\mu_\rho(t)\neq o_x(1-a_{1\rho}) \quad (\rho\to\rho_0) \tag{3.15}$$

则说x是$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$的本性点。非本性点称为可略点，即$x$为可略点，必存在一个邻域$I_x^*$使得

$$\therefore\int_{I_x}d\mu_\rho(x)=o_x(1-\alpha_{1\rho})\qquad(\rho\to\rho_0).$$

记 $\max\limits_{|x|\leqslant\pi}f(x)=M$，设 $x_0\in[-\pi,\pi]$ 是 $f(x_0)=M$，令

$E(x_0)=\{t\,|\,t$ 为本性点且 $f(x_0+t)=M\}$

$$E=\bigcap_{x_0}E(x_0)$$

引理4.16 设对每个 $x\in[-\pi,\pi]$ 有

$$f(x)-I_\rho(f,x)=o_x(1-\alpha_{1\rho})\qquad(\rho\to\rho_0)$$

若 $x\notin E$，则 x 是可略点。

证明 因为 $x\notin E$，必存在 x_0 使得 $f(x_0)=M$ 且 $x\notin E(x_0)$，所以或 x 是可略点或 x 使得

$f(x_0+M)<M$

对后一情况，令

$$I_x=\left\{x\,\Big|\,f(x_0+y)<\frac{1}{2}(M+f(x+x_0))\right\}$$

则 I_x 是 x 的邻域且

$$\int_{I_x}(f(x_0)-f(x_0+t))d\mu_\rho(t)>\int_{I_x}\left(M-\frac{1}{2}(M+f(x+x_0))\right)d\mu_\rho(t)$$

或

$$\frac{1}{2}(M-f(x_0+x))\int_{I_x}d\mu_\rho(t)<\int_{I_x}\left[f(x_0)-f(x_0+t)\right]d\mu_\rho(t)$$

$$=f(x_0)-I_\rho(f,x_0)=o_x(1-\alpha_{1\rho})\qquad(\rho\to\rho_0),$$

所以有

$$\int_{I_x}du_\rho(t)=o_x(1-\alpha_{1\rho})\qquad(\rho\to\rho_0)$$

即 x 为可略点，证毕。

引理4.17 设 $f\neq\text{const}$，则 E 仅含有限个点，若 $x\in E$，必有 $x=2\pi a$，其中 a 为有理数。

证明 设 E 中含有无限多个点，而 $\{x_n\}$ 是 E 中的收敛子列，记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x\in[0,2\pi]$，令

$$x_n=2\pi a_n,\qquad x=2\pi a,$$

则有 $a_n\to a\ (n\to+\infty)$。

设 $x_0\in[-\pi,\pi]$ 且 $f(x_0)=M$，由 $x_n\in E$，所以有

$f(x_0+x_n)=M$ 且 $x_n\in E(x_0+x_n)$

依此类推导出，对每个 $k\in N$ 有

$$f(x_0+kx_n)=M\tag{3.16}$$

令 $n\to+\infty$ 得到 $f(x_0+kx)=M$ 或

$$f(x_0+2\pi ka)=M\tag{3.17}$$

若α是无理数，由于数集$\{k\alpha-(k\alpha)\}$在$[0,1]$上稠密，所以$x_0+2\pi k\alpha$在$[x_0,x_0+2\pi]$上稠密，因此由连续性和(3.17)导出$f(x)\equiv M$ ($x\in[x_0,x_0+2\pi]$)，由周期性得到$f\equiv\text{const}$，这与假设矛盾，若α是有理数记$k\alpha_n=k(\alpha+\delta_n)$，其中$0\neq\delta_n\to 0(n\to+\infty)$。同样地，数集$\{k\alpha_n-(k\alpha_n)\}$在$[0,1]$上稠密，由连续性和(3.16)再次导出$f(x)=\text{const}$，因此断定E在$[0,2\pi]$上无极限点，因而只能含有限个点。

最后，若$x\in E$且$x=2\pi\alpha$，而α是无理数，则如上述对每个$k\in N$有$f(x_0+kx)=M$，从而导出$f\equiv\text{const}$，这与假矛盾，所以α必为有理数，证毕。

定理的证明 设$f\in C_{2\pi}$且$f(-x)=f(x)=0$，若对每个$x\in[-\pi,\pi]$有

$$f(x)-I_\rho(f,x)=o_x(1-\alpha_{1\rho}) \qquad (\rho\to\rho_0)$$

但$f\neq 0$，则由引理4.16存在$m\in N$使得

$$E\subseteq\left\{\frac{k\pi}{m}\Big|k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots\pm m\right\},$$

记

$$I=\bigcup_{k=-m}^{m}\left(\frac{k\pi}{m}-\frac{\pi}{8m},\ \frac{k\pi}{m}+\frac{\pi}{8m}\right)\cap(-\pi,\pi)$$

若$y\notin E$由引理4.15断定y是可略点，于是应用有限覆盖定理，对$S=(-\pi,\pi)\setminus I$有

$$\int_S d\mu_\rho(t)=o(1-\alpha_{1\rho}) \qquad (\rho\to\rho_0)$$

由于$f\neq 0$，不妨设$M=\max\limits_{|x|\leqslant\pi}f(x)>0$，令

$$h(x)=-M\sin^2 mx+2M,$$

则对$x\in(-\pi,\pi)$有$h(x)\geqslant f(x)$，记

$$c=\min_{t\in I}(h(t)-f(t))$$

于是有$y\in I$使得$h(y)-f(y)=c$，且对$\forall x\in I$有

$$h(x)-c\geqslant f(x)$$

因此有

$$\begin{aligned}
I_\rho(f,y)-f(y)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(y))\,d\mu_\rho(x-y)\\
&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_I(f(x)-f(y))\,d\mu_\rho(x-y)+2\|f\|\int_S d\mu_\rho(t)\\
&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_I(h(x)-h(y))\,d\mu_\rho(x-y)+o(1-\alpha_{1\rho}) \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

又因为

$$h(x)-h(y)=-M\cos 2my\sin^2 m(x-y)-\frac{M}{2}\sin 2my\sin 2m(x-y)$$

故得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(h(x)-h(y))\,d\mu_\rho(x-y)$$

$$=-M\cos 2my\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 m(x-y)\,d\mu_\rho(x-y)$$

于是有

$$\frac{1}{\pi}\int_I(h(x)-h(y))\,d\mu_\rho(x-y)$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_S\right)(h(x)-h(y))\,d\mu_\rho(x-x)$$

$$=-\frac{M}{2}\cos 2my(1-\alpha_{2m,\rho})+o(1-\alpha_{1\rho})\quad(\rho\to\rho_0)。$$

所以由（3.18）和（3.13）导出

$$I_\rho(f,y)-f(y)\leqslant-\frac{M}{2}\cos 2my(1-\alpha_{2m,\rho})+o(1-\alpha_{1\rho})$$

$$=-\frac{M}{2}\cos 2my(1-\alpha_{1\rho})\varphi_{2m}+o(1-\alpha_{1\rho})\qquad(3.19)$$

由于$y\in I$，所以$\cos 2my>0$，因此由（3.19）断定

$$I_\rho(f,y)-f(y)\neq o_x(1-\alpha_{1\rho})$$

这与假设（3.14）矛盾，故必有$M=0$，即对$x\in[-\pi,\pi]$有$f(x)\leqslant 0$，利用$-f$替代f，同样地讨论可得到$f(x)\geqslant 0$（$x\in[-\pi,\pi]$），从而得到$f(x)\equiv 0$，（$x\in[-\pi,\pi]$）。证毕。

自然要问，若$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正Borel测度核，但非偶的，是否成立相应的小o饱和定理呢？作者1984年解决了这个问题，记

$$\alpha_{k\rho}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,d\mu_\rho(u)$$

$$\beta_{k\rho}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kt\,d\mu_\rho(t)$$

我们有

定理4.27 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正Borel测度核（不一定是偶的），若对每个$k\in N$有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{|1-\alpha_{2k,\rho}-|\beta_{2k,\rho}||}{\varphi(\rho)}=\varphi_k>0\qquad(3.20)$$

其中$\varphi(\rho)\to 0^+(\rho\to\rho_0)$，则对$f\in C_{2\pi}$和每个$x\in[-\pi,\pi]$有

$$f(x)-I_\rho(f,x)=o_x(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0)$$

当且仅当$f\equiv$const。

证明　我们仅需证明"仅当"部分，不失一般性可设$f\in C_{2\pi}$且$f(-\pi)=f(\pi)=0$，若对每个$x\in[-\pi,\pi]$有

$$f(x)-I_\rho(f,x)=o_x(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0).$$

但$f\neq0$，不妨设$M=\max\limits_{|x|\leqslant\pi}f(x)$，由引理4.16存在$m\in N$使得

$$E\subseteq\left\{\frac{k\pi}{m}:k=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots\cdots\pm m\right\}.$$

记

$$I=\bigcup_{k=-m}^{m}\left[\frac{k\pi}{m}-\frac{\pi}{8\pi},\ \frac{k\pi}{m}+\frac{\pi}{8\pi}\right]\cap[-\pi,\pi]$$

现在分两种情况讨论，首先设$1-\alpha_{2m,\rho}>|\beta_{2m,\rho}|$，令

$$h(x)=-M\sin^2mx+2M,$$

则$h(x)>f(x)\ (x\in(-\pi,\pi))$，记$C=\min\limits_{t\in I}(h(t)-f(t))>0$，则对$t\in I$有$h(t)-C\geqslant f(t)$，且存在$y\in I$使得$h(y)-C=f(y)$，由于

$$h(x)-h(y)=-M\cos2my\sin^2m(x-y)-\frac{M}{2}\sin2my\sin2m(x-y)$$

因此有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(h(x)-h(y))\,d\mu_\rho(x-y)$$

$$=-\frac{M}{2}((1-\alpha_{2m,\rho})\cos2my+\beta_{2m,\rho}\sin2my).$$

由于$y\in I$，所以$\cos2my>0$，因而有

$$(1-\alpha_{2m,\rho})\cos2my+\beta_{2m,\rho}\sin2my$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\alpha_{2m,\rho}-|\beta_{2m,\rho}|)>0$$

致得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(h(x)-h(y))\,d\mu_\rho(x-y)$$

$$\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}M(1-\alpha_{2m,\rho}-|\beta_{2m,\rho}|)<0\qquad(3.21)$$

由引理4.15和（3.21）导出，

$$\frac{1}{\pi}\int_I(h(x)-h(y))\,d\mu_\rho(x-y)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(h(x)-h(y))d\mu_\rho(x-y)-\frac{1}{\pi}\int_S(h(x)-h(y))\,d\mu_\rho(x-y)$$

$$\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{4}M(1-\alpha_{2m,\rho}-|\beta_{2m,\rho}|)+o(\varphi(\rho)) \qquad (3.22)$$

其中$S=[-\pi,\pi]\setminus I$.因为对$x\in I$有$f(x)-f(y)\leqslant h(x)-h(y)$，所以有

$$I_\rho(f,y)-f(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_I(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)+o(\varphi(\rho))$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_I(h(x)-h(y))d\mu_\rho(x-y)+o(\varphi(\rho))$$

$$\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{4}M(1-\alpha_{2m,\rho}-|\beta_{2m,\rho}|)+o(\varphi(\rho)) \qquad (\rho\to\rho_0),$$

因而有

$$\varliminf_{\rho\to\rho_0}\frac{|I_\rho(f,y)-f(y)|}{\varphi(\rho)}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}M\psi_m>0.$$

其次，当$|\beta_{2m,\rho}|>1-\alpha_{2m,\rho}$时，令

$$h(x)=-M\operatorname{sgn}\beta_{2m,\rho}\sin 2mx+2M$$

则$h(x)\geqslant f(x)$ ($x\in(-\pi,\pi)$)，因为

$$h(x)-h(y)$$

$$=-M\operatorname{sgn}\beta_{2m,\rho}(\cos 2my\sin 2m(x-y)-2\sin 2my\sin^2 m(x-y))$$

所以有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(h(x)-h(y))d\mu_\rho(x-y)$$

$$=-M(|\beta_{2m,\rho}|\cos 2my-\operatorname{sgn}\beta_{2m,\rho}\sin 2my(1-\alpha_{2m,\rho}))$$

$$\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}M(|\beta_{2m,\rho}|-(1-\alpha_{2m,\rho}))<0 \qquad (3.23)$$

类似地，由引理(4.15)和(3.23)导出

$$I_\rho(f,y)-f(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)$$

$$\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}M(|\beta_{2m,\rho}|-(1-\alpha_{2m,\rho}))+o(\varphi(\rho)),$$

因此有

$$\varliminf_{\rho\to\rho_0}\frac{|I_\rho(f,y)-f(y)|}{\varphi(\rho)}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}M\psi_m>0.$$

由上述讨论可见

$$f(y)-I_\rho(f,y)\neq o_y(\varphi(\rho)) \qquad (\rho\to\rho_0).$$

这与假设矛盾，所以必有M=0，即$f(x)\leqslant 0(x\in[-\pi,\pi])$，利用$(-f)$代替f同样讨论可得$f(x)\geqslant 0(x\in[-\pi,\pi])$，因而得到$f(x)\equiv 0([-\pi,\pi])$，证毕

应当指出，从证明中可见，定理4.27中的条件(3-20)可用$\underline{\text{Lim}}_{\rho\to\rho_0}$代替$\text{Lim}_{\rho\to\rho_0}$，特别地，若$d\mu_\rho$是偶的并取$\varphi(\rho)=1-\alpha_{1\rho}$，则由定理4.27导出定理4.26。

最后给出非偶的正卷积算子的点态小o饱和定理，设$m\in N$，$\delta\in(0,\pi)$，记

$$S_\delta^{(m)}=\bigcup_{i=-\left(\frac{m}{2}\right)}^{\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{2i\pi-\delta}{m},\frac{2i\pi+\delta}{m}\right)\cap[-\pi,\pi],$$

我们有

引理4.18 设$\varphi(\rho)\to 0^+(\rho\to\rho_0)$，若对某个$m\in N$有$1-\alpha_{m\rho}=o(\varphi(\rho))(\rho\to\rho_0)$，则对任意的$\delta\in(0,\pi)$，有

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus S_\delta^{(m)}}d\mu_\rho(t)=o(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0)\tag{3.24}$$

证明 由于

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus S_\delta^{(m)}}d\mu_\rho(t)\leqslant\int_{[-\pi,\pi]\setminus S_\delta^{(m)}}\frac{\sin^2\frac{mt}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}d\mu_\rho(t)$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{mt}{2}\,d\mu_\rho(t)=\frac{\pi}{\sin^2\frac{\delta}{2}}(1-\alpha_{m\rho})$$

$$=o(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0)$$

证毕。

定理4.28 设$\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$是正Borel测度核，又$\varphi(\rho)\to 0^+(\rho\to\rho_0)$。若对某个$m\in N$有$1-\alpha_{m\rho}=o(\varphi(\rho))(\rho\to\rho_0)$且

$$\underline{\text{Lim}}_{\rho\to\rho_0}\frac{|\beta_{m,\rho}|}{\varphi(\rho)}=\varphi_m>0,\tag{3.25}$$

则对$f\in C_{2\pi}$和每个$x\in[-\pi,\pi]$有

$$f(x)-I_\rho(f,x)=o_x(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0)$$

当且仅当$f\equiv\text{const}$。

证明 充分性是明显的。不失一般性可设$f(-\pi)=f(\pi)=0$，记$M=\max_{|x|\leqslant\pi}|f(x)|$，

由于条件(3.25)可设$\beta_{m,\rho}\neq 0$，令

$$h(x)=-M(\operatorname{sgn}\beta_{m,\rho})\sin mx+2M,$$

则有$h(x)\geqslant f(x)$ $(x\in(-\pi,\pi))$，记 $c=\min\limits_{t\in S_{i-1,\varepsilon}^{(m)}}(h(t)-f(t))$，则存在$y\in S_{i-1,\varepsilon}^{(m)}$有

$h(y)-c=f(y)$，于是有

$$\int_{S_{i-1,\varepsilon}^{(m)}}(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)\leqslant\int_{S_{i-1,\varepsilon}^{(m)}}(h(x)-h(y))d\mu_\rho(x-y) \qquad (3.26)$$

由于

$$\begin{aligned}&h(x)-h(y)\\&\quad=\left(2M\sin my\sin^2\frac{m(x-y)}{2}-M\cos my\sin m(x-y)\right)\operatorname{sgn}\beta_{m,\rho}\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(h(x)-h(y))d\mu_\rho(x-y)\\&\quad=\frac{2M}{\pi}\sin my\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{m(x-y)}{2}d\mu_\rho(x-y)\\&\quad=o(\varphi(\rho))-M\cos my\,|\beta_{m,\rho}|\end{aligned} \qquad (3.27)$$

又因为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{S_{i-1,\varepsilon}^{(m)}}(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)\\&\quad=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)-\int_{[-\pi,\pi]\setminus S_{i-1,\varepsilon}^{(m)}}(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)\\&\quad=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)+o(\varphi(\rho)) \qquad (\rho\to\rho_0),\end{aligned}$$

其中最后等号利用了引理4.18中的(3.24)。

于是由(3.26)，(3.27)导出

$$\begin{aligned}I_\rho(f,y)-f(y)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{S_{i-1,\varepsilon}^{(m)}}(f(x)-f(y))d\mu_\rho(x-y)+o(\varphi(\rho))\\&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{S_{i-1,\varepsilon}^{(m)}}(h(x)-h(y))d\mu_\rho(x-y)+o(\varphi(\rho))\end{aligned}$$

$$=-M\cos my\,|\beta_{m,\rho}|+o(\varphi(\rho))\qquad(\rho\to\rho_0).$$

由于 $y\in S^{(m)}_{s-1,s}$，所以 $\cos my>0$，由上式和（3.25）导出

$$I_\rho(f,y)-f(y)\neq o_y(\varphi(y))\qquad(\rho\to\rho_0).$$

这与假设矛盾，故必有 $M=0$ 即 $f=\text{const}$，证毕。

例1 设

$$d\mu_n(t)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)d\delta_{\frac{1}{n}}(t)+\frac{\pi}{\sqrt{n}}d\delta_{\frac{\pi}{2}}(t)$$

$$A_n(f,x)=(f*d\mu_n)(x)$$

由计算得到，对 $k\in N$ 有

$$1-\alpha_{kn}=2\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sin^2\frac{k}{2n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

$$\beta_{kn}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sin\frac{k}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{k\pi}{2}$$

取 $\varphi(n)=\beta_{2n}\sim\frac{2}{n}(n\to+\infty)$，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|1-\alpha_{2m,n}-|\beta_{2m,n}||}{\varphi(n)}=\begin{cases}2s & m=2s\\ +\infty & m=2s-1\end{cases}$$

由此由定理4.27得到，设 $f\in C_{2\pi}$，若对每个 $x\in[-\pi,\pi]$ 有

$$f(x)-A_n(f,x)=o_x\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n\to+\infty),$$

则 $f=\text{const}$。

如果注意到，取 $m=4$，则有

$$1-\alpha_{4n}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sin^2\frac{2}{n}\sim\frac{8}{n^2}$$

$$\beta_{4n}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sin\frac{4}{n}\sim\frac{4}{n}\quad,\qquad(n\to+\infty),$$

因此有

$$1-\alpha_{4n}=o(\varphi(n))\qquad(n\to+\infty),$$

且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|\beta_{4n}|}{\varphi(n)}=2>0$$

所以应用定理4.28导出，若对每个 $x\in[-\pi,\pi]$ 有

$$f(x)-A_n(f,x)=o_x\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n\to+\infty),$$

则$f\equiv$const.

3.3 正线性算子的大O饱和定理

设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$到自身内的正线性算子列且对每个$x\in(a,b)$有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}L_n((t-x)^2,x)>0.$$

若对每个$x\in(a,b)$和$k=0,1$有

$$e_k(x)-L_n(e_k,x)=o_x(\varphi_n(x))\qquad(n\to+\infty),$$

则有$T(L_n)=\{l\,|\,l(x)$在(a,b)上是线性$\}$，现在讨论当$f\in C[a,b]\setminus T(L_n)$且对每个$x\in(a,b)$有

$$f(x)-L_n(f,x)=O_x(\varphi_n(x))$$

时，f应具有怎样的分析特征呢？这是大O饱和定理所要回答的。

首先研究适合Mamedov条件的正线性算子列$\{L_n\}_{n\in N}$，即对每个$x\in(a,b)$有

$$L_n((t-x)^4,x)=o_x(\varphi_n(x))\tag{3.28}$$

考虑到第一章建立的Mamedov等价引理，如下条件(3.29)是等价于(3.28)，设θ是区间(a,b)内任何开子集，对每个$f\in C(a,b)$和$y\in\theta$有

$$L_n(\lambda_\theta f,y)=o_y(\varphi_n(y))\tag{3.29}$$

其中

$$\lambda_\theta(t)=\begin{cases}0 & t\in\theta\\ 1 & t\notin\theta\end{cases}$$

G.Muhlbach建立如上整体大O饱和定理

定理4.28 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$到自身内正线性算子列，且对每个$x\in(a,b)$有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}L_n((t-x)^2,x)>0$$

若对每个$x\in(a,b)$和$k=0,1$有

$$e_k(x)-L_n(e_k,x)=o_x(\varphi_n(x))\tag{3.30}$$

且适合Mamedov条件(3.28)，则对$f\in C(a,b)$如下命题是等价的：

i)对每个$x\in(a,b)$有

$$|f(x)-L_n(f,x)|\leqslant M\varphi_n(x),$$

ii)$f\in \mathrm{Lip}_M^*\,2=\left\{f\,|\,f\in C(a,b)\text{且}\ \omega_2(f,t)\leqslant Mt^2,\ t>0\right\}$

iii)$f'\in \mathrm{Lip}_M 1=\{f\,|\,f\in C[a,b]\ \text{且}\ \omega(f',t)\leqslant Mt,t>0\}$

证明　由G.Freud量化定理ii)$\Longrightarrow$i)是明显的，所以仅需证明i)$\Longrightarrow$ii)，我们采用反证法，设$f\notin \mathrm{Lip}_M^*\,2$，则存在$x_0\in(a,b)$和$0<\delta<\min(|a-x_0|,|b-x_0|)$使得

$$\left|\frac{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)}{\delta^2}\right|>M$$

不妨设

$$-M'\delta^2=f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)<-M\delta^2$$

则$M'>M>0$。考查二次抛物线

$$Q(t)=-\frac{1}{2}a(t-x_0)^2+l(t)+c$$

其中$a=\frac{2M+M'}{2}>0$，而

$$l(t)=f(x_0-\delta)+\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)}{2\delta}(t-x_0+\delta),$$

并选取$c>0$使得当$t\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$有

$$Q(t)\geqslant f(t).$$

由于

$$Q(x_0-\delta)-f(x_0-\delta)$$

$$=-\frac{1}{2}a\delta^2+l(x_0-\delta)+c-l(x_0-\delta)=-\frac{1}{2}a\delta^2+c.$$

类似地

$$Q(x_0+\delta)-f(x_0+\delta)=-\frac{1}{2}a\delta^2+c$$

但

$$Q(x_0)-f(x_0)=c+l(x_0)-f(x_0)$$

$$=c+f(x_0-\delta)+\frac{[f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)](x_0-x_0+\delta)}{2\delta}-f(x_0)$$

$$=c+\frac{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)}{2}$$

$$=c-\frac{M'}{2}\delta^2<c-\frac{1}{2}a\delta^2.$$

所以有

$$Q(x_0)-f(x_0)<Q(x_0\pm\delta)-f(x_0\pm\delta),$$

因此存在$y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$使得

$$Q(y)-f(y)=m=\min_{t\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}\big(Q(t)-f(t)\big),$$

于是当$t\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$时，有

$$Q(t)-f(t)\geqslant m.$$

记$Q^*(t)=Q(t)-m$，则当$t\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$有

$$Q^*(t)\geqslant f(t),$$

且$Q^*(y)=f(y)$。令

$$a'=\max\{x\mid a\leqslant x\leqslant x_0-\delta,Q^*(x)=f(x)\}.$$

$$b' = \min\{x \mid x_0 + \delta \leq x \leq b,\ Q^*(x) = f(x)\},$$

则有$a \leq a' < y < b' \leq b$. 且对$t \in [a', b']$时，有

$$Q^*(t) \geq f(t).$$

记$h(t) = f(t) - Q^*(t) \in C[a,b]$，则对$t \in [a,b]$有

$$f(t) \leq Q^*(t) + \lambda_{[a',b']}(t) h(t).$$

因此由(3.29)和(3.30)导出

$$\begin{aligned} L_n(f,y) - f(y) &= L_n(f(t) - f(y), y) + f(y)(L_n(1,y) - 1) \\ &\leq L_n(Q^*(t) - Q^*(y), y) + L_n(\lambda_{[a',b']}h, y) + f(y)(L_n(1,y) - 1) \\ &= L_n(Q(t) - Q(y), y) + o_y(\varphi_n(y)) \\ &= -\frac{\alpha}{2} L_n((t-x_0)^2 - (y-x_0)^2) + o_y(\varphi_n(y)) \end{aligned} \tag{3.31}$$

由于$(t-x_0)^2 - (y-x_0)^2 = (t-y)^2 + 2(y-x)(t-y)$，故由(3.30)导出

$$L_n((t-x_0)^2 - (y-x_0)^2, y) = L_n((t-y)^2, y) + o_y(\varphi_n(y))$$

因此由(3.31)得到

$$\begin{aligned} L_n(f,y) - f(y) &< -\frac{\alpha}{2} L_n((t-y)^2, y) + o_y(\varphi_n(y)) \\ &= -\alpha\varphi_n(y) + o_y(\varphi_n(y)) \\ &< -\frac{3M}{2}\varphi_n(y) + o_y(\varphi_n(y)), \end{aligned}$$

所以有

$$|L_n(f,y) - f(y)| > \frac{3M}{2}\varphi_n(y) + o_y(\varphi_n(y)) > M\varphi_n(y)$$

与条件i)矛盾，从而有$f \in \mathrm{Lip}^*_{\frac{1}{2}} 2$，证毕。

特别地有

推论4.16 在定理4.29条件下，则对$f \in C[a,b]$如下命题是等价的：

i)对每个$x \in (a,b)$有

$$f(x) - L_n(f,x) = O_x(\varphi_n(x)) \qquad (n \to +\infty),$$

ii)$f \in \mathrm{Lip}^* 2 = \{f \mid \omega_2(f,t) = O(t^2),\ t \to 0^+\}$,

iii)$f' \in \mathrm{Lip} 1 = \{f \mid \omega(f',t) = O(t),\ t \to 0^+\}$.

设B_n是Bernstein算子，由于对$x \in [0,1]$有

$$B_n(1,x) = 1, \qquad B_n(t,x) = x$$

$$B_n((t-x)^2, x) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

和$x \in (0,1)$有

$$B_n((t-x)^4, x) = o\left(\frac{x(1-x)}{n}\right), \qquad (n \to +\infty),$$

所以由定理4.29导出

系1 Bernstein算子列$\{B_n\}_{n\in N}$在$C[0,1]$上关于饱和阶$\left\{\frac{x(1-x)}{2n}\right\}$和平凡类$T(B_n)=\{f|f$在$[0,1]$上是线性的$\}$是饱和的，且对$f\in C[0,1]$如下命题是等价的：

i)对每个$x\in[0,1]$有

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leq M\frac{x(1-x)}{2n},$$

ii)$f\in Lip_M^* 2$。

iii)$f'\in Lip_M 1$

综合定理4.24和推论4.16得到整体饱和类的分析特征，即

推论4.17 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$到自身内的正线性算子列，且对$x\in(a,b)$有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}L_n((t-x)^2,x)>0.$$

若适合如下条件：

i)对$i=0,1$有

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{L_n(e_i,x)-e_i(x)}{\varphi_n(x)}\right|=0,$$

ii)当$n\to+\infty$时，有

$$\sup_{x\in(a,b)}\left|\frac{L_n((t-x)^4,x)}{\varphi_n(x)}\right|=o(1),$$

则$\{L_n\}_{n\in N}$在$C[a,b]$上关于饱和阶$\{\varphi_n(x)\}$和平凡类$T(L_n)=\{f|f$在$[a,b]$上是线性的$\}$是饱和的，且饱和类

$$F(L_n;\ T,\ \varphi_n)=Lip^* 2$$

其次推广定理4.29建立大O饱和定理的一般形式，为此需要如下一些引理

引理4.18(凸性引理) 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$到自身内的正线性算子列，且对每个$x\in(a,b)$有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}L_n((t-x)^2,x)>0,$$

并对每个$x\in(a,b)$有

$$L_n((t-x)^4,x)=o_x(\varphi_n(x))$$

若对每个$x\in(a,b)$有

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{L_n(f,x)-f(x)}{\varphi_n(x)}\geq 0, \tag{3.32}$$

则f在$[a,b]$上是下凸的，即对$h>0$，$x\in[a+h,b-h]$有

$$\Delta_h^2(f,x)\geq 0.$$

证明　采用反证法，设$f(x)$在$[a,b]$是非下凸的，则必存在$x_0, y_0 \in [a,b]$和$\zeta \in (x_0, y_0)$使得

$$f(\zeta)-l(\zeta)>0,$$

其中$l(x)=f(x_0)+\dfrac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}(x-x_0)$，记

$$g(x)=f(x)-l(x)$$

则$g(x_0)=g(y_0)=0$，而$g(\zeta)>0$。由抛物线引理存在$\eta\in(x_0,y_0)$和二次抛物线$Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma(\alpha<0)$使得$Q(\eta)=g(\eta)$且对$x\in(x_0,y_0)$有

$$Q(x)\geqslant g(x).$$

令$Q^*(x)=Q(x)+l(x)$，则有$Q^*(\eta)=f(\eta)$且对$x\in(x_0,y_0)$有

$$Q^*(x)\geqslant f(x)$$

明显地，有

$$Q^*(x)=\alpha(x-\eta)^2+\beta(x-\eta)+f(\eta)$$

令

$$c=\max\{x \mid a\leqslant x\leqslant x_0, f(x)=Q^*(x)\},$$

$$d=\min\{x \mid y_0\leqslant x\leqslant b, f(x)=Q^*(x)\}.$$

记$g(t)=\lambda_{[c,d]}(t)(f(t)-Q^*(t))$则对$t\in[a,b]$有

$$f(t)\leqslant Q^*(t)+g(t) \tag{3.33}$$

由(3.33)和(3.29)导出。

$$\begin{aligned} L_n(f,\eta)-f(\eta) &\leqslant L_n(Q^*(t)-Q^*(\eta),\eta)+o_n(\varphi_n(\eta)) \\ &=\alpha L_n((t-\eta)^2,\eta)+o_n(\varphi_n(\eta)) \\ &=2\alpha\varphi_n(\eta)+o_n(\varphi_n(\eta)) \end{aligned}$$

所以有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f,\eta)-f(\eta)}{\varphi_n(\eta)}\leqslant 2\alpha<0$$

这与假设矛盾，因而f在$[a,b]$是下凸的，证毕。

特别地，对$t>0$和$f\in C[a,b]$，令

$$L_t(f,x)=\frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t)),$$

则对$x\in(a,b)$有

$$L_t(1,x)=1,\ L_t(u,x)=x$$

和

$$\varphi_t(x)=\frac{1}{2}L_t((u-x)^2,x)=\frac{t^2}{2}>0.$$

又若$f(x)$在(a,b)内二次连续可微，则对每个$x\in(a,b)$有

$$\lim_{t\to0^+}\frac{L_t(f,x)-f(x)}{\varphi_t(t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{\frac{1}{2}t^2}=f''(x),$$

因此Mamedov条件(3.28)成立．注意到

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{L_t(f,x)-f(x)}{\varphi_t(x)}=4\ \overline{\lim_{t\to 0^+}}\frac{\Delta_t^2(f,x)}{t^2},$$

所以由凸性引理导出，函数下凸的一个充分条件

推论4.18 设$f\in C[a,b]$，若对每个$x\in(a,b)$有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\Delta_t^2(f,x)}{t^2}>0$$

则f在$[a,b]$是下凸的．

用$\overline{D}(g,x)$和$\underline{D}(g,x)$分别表示g在x点的上、下导数，Dini证得如下结果

引理4.20(Dini 引理) 设$g\in L_1[a,b]$，则对每个$n\in N$存在g的优函数$M_n(x)$和劣函数$m_n(x)$使得对$x\in(a,b)$有

$$\overline{D}(m_n,x)\leqslant g(x)\leqslant \underline{D}(M_n,x) \tag{3.34}$$

且

$$\left|M_n(x)-\int_a^x g(u)du\right|<\frac{1}{n},$$
$$\left|m_n(x)-\int_a^x g(u)du\right|<\frac{1}{n}. \tag{3.35}$$

这里所谓g的优函数M是指对$\forall\ x\in(a,b)$，M的Dini导数大于或等于$g(x)$；而所谓g的劣函数m是指对$\forall\ x\in(a,b)$，m的Dini导数小于或等于$g(x)$。(引理的证明可参阅I, P_{esin}〔1〕中定理9.1。)

引理4.21 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$到自身内正线性算子列，对$x\in(a,b)$有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}L_n((t-x)^2,\ x)>0,$$

且适合条件(3．28)和(3．30)．若$g\in L_1(a,b)$，令

$$G(x)=\int_a^x g(t)dt$$

则对每个$x_0\in(a,b)$有

$$\underline{D}(g,x_0)\leqslant \underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(G,\ x_0)-G(x_0)}{\varphi_n(x_0)} \tag{3.36}$$
$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{L_n(G,\ x_0)-G(x_0)}{\varphi_n(x_0)}\leqslant\overline{D}(g,\ x_0).$$

证明 我们只证明右端不等式，而左端不等式可类似处理．首先设$\overline{D}(g,x_0)=+\infty$，则不等式成立是明显的，其次，设$\overline{D}(g,x_0)\neq+\infty$，任取d使得$\overline{D}(g,x_0)<d<+\infty$，于是存在$\delta>0$使得当$0<|t-x_0|<\delta$有

$$\frac{g(t)-g(x_0)}{t-x_0}\leqslant d.$$

因此当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\int_{x_0}^{x}\Big(g(t)-g(x_0)\Big)dt\leqslant\frac{1}{2}d(x-x_0)^2,$$

所以有

$$G(x)-G(x_0)-g(x_0)(x-x_0)\leqslant\frac{1}{2}d(x-x_0)^2,$$

记 $D_\delta=\left[x_0-\frac{\delta}{2},\ x+\frac{\delta}{2}\right]$，则对 $x\in(a,\ b)$ 有

$$G(x)-G(x_0)-g(x_0)(x-x_0)\leqslant\frac{1}{2}d(x-x_0)^2+\lambda_{D_\delta}(x)R(x)$$

其中

$$R(x)=G(x)-G(x_0)-g(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}d(x-x_0)^2$$

因而得到

$$L_n\Big(G(x)-G(x_0)-g(x_0)(x-x_0),\ x_0\Big)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}dL_n\Big((x-x_0)^2,\ x_0\Big)+L_n(\lambda_{D_\delta}R,\ x_0).$$

由条件（3.28）及（3.30）导出

$$L_n(G,\ x_0)-G(x_0)\leqslant d\varphi_n(x_0)+o_{x_0}\Big(\varphi_n(x_0)\Big)$$

因此有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(G,\ x_0)-G(x_0)}{\varphi_n(x_0)}\leqslant d$$

由于 $d>\overline{G}(g,\ x_0)$ 是任意的，令 $d\to\overline{D}(g,\ x_0)$ 得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(G,\ x_0)-G(x_0)}{\varphi_n(x_0)}\leqslant\overline{D}(g,\ x_0).$$

证毕

1972年 H. Berens 的证得

定理4.30 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(a,\ b)$ 到自身内的正線性算子列，且对 $x\in(a,\ b)$ 有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}L_n\Big((t-x)^2,\ x\Big)>0,$$

并对每个 $x\in(a,\ b)$ 适合Mamedov条件．若对 $f\in C[a,\ b]$ 存在 $g\in L_1(a,\ b)$ 使得对每个 $x\in(a,\ b)$ 有

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f,\ x)-f(x)}{\varphi_n(x)}\leqslant g(x)\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f,\ x)-f(x)}{\varphi_n(x)},\qquad(3.37)$$

则对 $x\in[a,\ b]$ 有

$$f(x)=Ax+B+\int_a^x\int_a^t g(u)dudt, \tag{3.38}$$

其中A、B是确定常数.

证明 由Dini引理对$g\in L_1(a, b)$和$k\in N$，存在优函数$M_k(x)$和劣函数$m_k(x)$使对$x\in[a, b]$有

$$\overline{D}(m_k, x)\leqslant g(x)\leqslant \underline{D}(M_k, x)$$

且有

$$\left|M_k(x)-\int_a^x g(t)dt\right|<\frac{1}{k},$$

$$\left|m_k(x)-\int_a^x g(t)dt\right|<\frac{1}{k}.$$

令

$$M_k^*(x)=\int_a^x M_k(t)dt, \quad m_k^*(x)=\int_a^x m_k(t)dt$$

由引理4.20导出，对每个$x\in(a, b)$有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(m_k^*, x)-m_k^*(x)}{\varphi_n(x)}\leqslant\overline{D}(m_k, x)\leqslant g(x),$$

和

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(M_k^*, x)-M_k^*(x)}{\varphi_n(x)}\geqslant \underline{D}(M_k, x)\geqslant g(x)$$

所以由(3.37)得到，对每个$x\in(a, b)$有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f-m_k^*, x)-(f-m_k^*)(x)}{\varphi_n(x)}$$

$$\geqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f, x)-f(x)}{\varphi_n(x)}-\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(m_k^*, x)-m_k^*(x)}{\varphi_n(x)}$$

$$\geqslant g(x)-\overline{D}(m_k, x)\geqslant 0$$

因此由凸性引理断定$f(x)-m_k^*(x)$在(a, b)是下凸的，

现在记

$$H(x)=f(x)-\int_a^x\int_a^t g(u)dudt$$

则有

$$f(x)-m_k^*(x)-H(x)=\int_a^x\left(\int_a^t g(u)du-m_k(t)\right)dt$$

因此对 $x\in[a, b]$ 有

$$\left|f(x)-m_k^*(x)-H(x)\right|\leqslant\int_a^b\left|\int_a^t g(u)du-m_k(t)\right|dt$$

$$\leqslant\frac{b-a}{k}\to 0\ ;\qquad (k\to+\infty),$$

即 $f(x)-m_k^*(x)$ 在〔a, b〕上一致收敛于$H(x)$，所以 $H(x)$在〔a, b〕是下凸的。

类似地，可以证明 $H(x)$在〔a, b〕也是上凸的，因而得到，当$x\in$〔a, b〕时，有 $H(x)=Ax+B$，即

$$f(x)=Ax+B+\int_a^x\int_a^t g(u)dudt.$$

证毕。

特别地，取 $g(x)=0(a, e)$，有

推论4.19 设 $\{L_n\}_{n\in N}$是C〔a, b〕到自身内的正线性算子列，对$x\in(a, b)$有

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{2}L_n((t-x)^2, x)>0,$$

且适合Mamedov 条件，若对每个$x\in(a, b)$有

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f, x)-f(x)}{\varphi_n(x)}=0, \tag{3.39}$$

则 $f(x)=Ax+B$，其中A、B是确定常数。

又若 $g\in L_\infty(a, b)$，记 $\|g\|_\infty=M$，有

推论4.20 在推论4.19的条件下，若对每个$x\in(a, b)$有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f, x)-f(x)}{\varphi_n(x)}=g(x), \tag{3.40}$$

且 $\|g\|_\infty=M<+\infty$，则 $f\in Lip^*2$。

事实上，由（3.40）导出，对每个$x\in(a, b)$有

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f, x)-f(x)}{\varphi_n(x)}\leqslant g(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{L_n(f, x)-f(x)}{\varphi_n(x)}$$

所以由定理4.30有

$$f(x)=Ax+B+\int_a^x\int_a^t g(u)dudx$$

因此对 $x\in(a, b)$ 有

$$f''(x)=g(x)\quad (a, e)$$

从而有$f\in Lip^*2$。

明显地在（3.39）中用$\overline{\lim_{n\to\infty}}$代替$\underline{\lim_{n\to\infty}}$在（3.40）中用$\underline{\lim_{n\to\infty}}$代替$\overline{\lim_{n\to\infty}}$结论仍是正

确的。

3.4. 正线性算子的广义点态饱和定理

直到现在，我们讨论正线性算子的整体饱和理论时，都是以线性函数类作为饱和定义中的平凡类，自然地，希望将前面建立的整体饱和定理推广到平凡类不一定是线性函数的情况，为此，我们引入扩大的完备Chebyshev系，1、$u_1(x)$、$u_2(x)$，代替1、x、x^2。

设w_1、w_2是〔a，b〕上严格正值的连续可微函数，令，

$$u_1(x)=\int_a^x w_1(t)dt,$$
$$u_2(x)=\int W_2(t)w_1(t)dt, \qquad (3.41)$$

其中

$$W_2(x)=\int_a^x w_2(t)dt. \qquad (3.42)$$

则$\{1, u_1(x), u_2(x)\}$在〔a，b〕上组成一个扩大的完备Chebyshev系。

现在引入广义直线和广义下凸的概念，用$\mathrm{Span}\{1, u_1\}$表示Chebyshev组$\{1,u_1\}$的实系数线性扩张，若$u\in \mathrm{Span}\{1, u_1\}$，则说u是关于$\{1, u_1\}$的广义直线、由于$\{1, u_1\}$是Chebyshev组。所以对$f\in C[a, b]$和〔a，b〕中任意相异的二点$\alpha$、$\beta$，存在唯一的广义直线$u\in \mathrm{Span}\{1, u_1\}$，在$\alpha$、$\beta$点插值$f(\alpha)$，$f(\beta)$，即

$$u(x)=\frac{u_1(x)-u_1(\alpha)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\beta)+\frac{u_1(\beta)-u_1(x)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\alpha). \qquad (3.43)$$

设$f\in C[a, b]$，若对$\forall\alpha$、$\beta\in[a, b]$且$\alpha\neq\beta$，有

$$u(x)\geqslant f(x); \qquad x\in(\alpha, \beta),$$

其中$u(x)$是（3.43）所表示的广义直线，则说f在〔a，b〕上关于$(1, u_1)$是广义下凸的。类似地可以定义广义上凸的概念。

明显地，若f在〔a，b〕是广义下凸的，则$-f(x)$在〔a，b〕是广义上凸的，特别地，若$f\in C[a, b]$，在〔a，b〕上既是广义下凸又是广义上凸，则$f\in \mathrm{Span}(1, u_1)$。关于广义下凸函数还有如下重要的分析性质，它是通常下凸函数分析性质的推广。

引理4.22 设f在〔a，b〕是广义下凸的，则f关于u_1的左、右导数

$$D_{u_1}^{\pm}(f, x)=\lim_{h\to 0\pm}\frac{f(x+h)-f(x)}{u_1(x+h)-u_1(x)} \qquad (3.44)$$

存在且是x的增加函数，此外还有

$$D_{u_1}^{-}(f, x)\leqslant D_{u_1}^{+}(f, x). \qquad (3.45)$$

证明 由于f在〔a，b〕是广义下凸的，所以对$\forall c\in(\alpha, \beta)$，有

$$u(c)=\frac{u_1(c)-u_1(\alpha)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\beta)+\frac{u_1(\beta)-u_1(c)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\alpha)\geqslant f(c).$$

因为$u_1(x)$是严格增加的，所以对$\alpha<c<\beta$有，

$$u_1(\alpha)<u_1(c)<u_1(\beta),$$

因此有

$$\frac{f(c)-f(\alpha)}{u_1(c)-u_1(\alpha)}\leqslant\frac{f(\beta)-f(c)}{u_1(\beta)-u_1(c)},$$

由此导出对$\forall\alpha<c<d<\beta$，有

$$\frac{f(c)-f(\alpha)}{u_1(c)-u_1(\alpha)}\leqslant\frac{f(d)-f(c)}{u_1(d)-u_1(c)}\leqslant\frac{f(\beta)-f(d)}{u_1(\beta)-u_1(d)} \tag{3.46}$$

在(3.46)中令$d\to c^+$得到，

$$\frac{f(c)-f(\alpha)}{u_1(c)-u_1(\alpha)}\leqslant\underline{D}^+_{u_1}(f,\ c)\leqslant\overline{D}^+_{u_1}(f,\ c)\leqslant\frac{f(\beta)-f(c)}{u_1(\beta)-u_1(c)}.$$

又令$\beta\to c^+$得到，

$$\underline{D}^+_{u_1}(f,\ c)\leqslant\overline{D}^+_{u_1}(f,\ c)\leqslant\underline{D}^+_{u_1}(f,\ c),$$

可见关于u_1的导数$D^+_{u_1}(f,\ c)$存在，且有，

$$\frac{f(c)-f(\alpha)}{u_1(c)-u_1(\alpha)}\leqslant D^+_{u_1}(f,\ c). \tag{3.47}$$

类似地可以证明关于u_1的左导数$D^-_{u_1}(f,\ c)$存在。在(3.47)中令$\alpha\to c^-$得到

$$D^-_{u_1}(f,\ c)\leqslant D^+_{u_1}(f,\ c),$$

即(3.45)成立。

最后，对$\forall x_1,\ x_2\in(a,\ b)$且$x_1<x_2$，选取$\alpha$、$\beta$，使得$x_1<\alpha$，$x_2<\beta$，则有

$$\frac{f(\alpha)-f(x_1)}{u_1(\alpha)-u_1(x_1)}\leqslant\frac{f(\beta)-f(x_2)}{u_1(\beta)-u_1(x_2)}.$$

令$\alpha\to x_1^+$，$\beta\to x_2^+$，从(3.48)得到

$$D^+_{u_1}(f,\ x_1)\leqslant D^+_{u_2}(f,\ x_2).$$

即关于u_1的右导数$D^+_{u_1}(f,x)$在$[a,b]$上是增加的，同样可证关于u_1的左导数$D^-_{u_1}(f,x)$，在$[a,\ b]$上是增加的。证毕

引理4.23（Z. Ziegler）设f在$[a,\ b]$是广义下凸的，则对$\eta\in(a,\ b)$存在$u\in\mathrm{Span}(1,\ u_1)$使得当$x\in[a,\ b]$时，有

$$u(x)\leqslant f(x), \tag{3.49}$$

且$u(\eta)=f(\eta)$。

证明 由于f在$[a,\ b]$是广义下凸的，根据引理4.22关于u_1的右导数$D^+_{u_1}(f,\ \eta)$存在，令

$$u(x)=f(\eta)+D^{+}_{u_1}(f,\ \eta)\,(u_1(x)-u_1(\eta)) \tag{3.50}$$

则$u\in \mathrm{Span}(1,\ u_1)$ 且 $u(\eta)=f(\eta)$。

现在证明$u(x)$适合（3.49），取$\beta>\eta$，则当 $\alpha\leqslant x\leqslant\eta<\beta$ 时，有

$$\frac{f(\eta)-f(x)}{u_1(\eta)-u_1(x)}\leqslant\frac{f(\beta)-f(\eta)}{u_1(\beta)-u_1(\eta)},$$

令$\beta\to\eta^+$导出，当$x\in[a,\ \eta)$时，有

$$\frac{f(\eta)-f(x)}{u_1(\eta)-u_1(x)}\leqslant D^{+}_{u_1}(f,\ \eta).$$

由于$u_1(\eta)-u_1(x)>0$，所以当$x\in[a,\ \eta)$时，有

$$u(x)\leqslant f(x).$$

又取$\eta<c<x\leqslant b$，则

$$\frac{f(c)-f(\eta)}{u_1(c)-u_1(\eta)}\leqslant\frac{f(x)-f(c)}{u_1(x)-u_1(c)}.$$

令$c\to\eta^+$导出，当$x\in(\eta,\ b]$时，有

$$D^{+}(f,\ \eta)\leqslant\frac{f(x)-f(\eta)}{u_1(x)-u_1(\eta)}$$

从而当$x\in(\eta,\ b]$时，有

$$u(x)\leqslant f(x).$$

证毕

为了建立广义大O饱和定理，需要推广抛物线技巧，其中最重要的是建立广义的抛物线引理和广义凸性引理。

引理4.24（广义抛物线引理）设$f\in C[a,\ b]$且$f(a)=f(b)=0$．若对某个$x_0\in(a,\ b)$，有$f(x_0)>0$，则存在函数$U(x)=c_2u_2(x)+c_0\,(c_2<0)$和某个$\eta\in(a,\ b)$，使得$U(\eta)=f(\eta)$，且对$x\in[a,\ b]$有

$$U(x)\geqslant f(x). \tag{3.51}$$

证明　设$M=2\|f\|_{C[a,b]}$，由于$u_2(x)\geqslant0$，可选取$c_2>0$，使得对$x\in[a,\ b]$有

$$c_2u_2(x)+M\geqslant f(x).$$

令

$$m=\inf_{x\in[a,b]}(c_2u_2(x)+M-f(x)).$$

则$m\geqslant0$．因为$M-f(a)=M-f(b)>M-f(x_0)$，所以存在$\eta\in(a,\ b)$，使得

$$c_2u_2(\eta)+M-f(\eta)=m.$$

因此

$$U(x)=c_2u_2(x)+(M-m).$$

即为所求的函数．证毕

若f在$[a,\ b]$上二次连续可微，记

$$D_{w_1}(f)=\frac{f'}{w_1},\quad D_{w_2}(f)=\frac{f'}{w_2} \qquad (\ .2)$$

和

$$D_{(w_2,w_1)}(f)=D_{w_2}(D_{w_1}(f)) \qquad (3.53)$$

设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(a,b)$ 到自身内的正线性算子列，若存在正函数列 $\{\mu_n(x)\}$，$(x\in(a,b))$，使得对每个 $f\in C^2(a,b)$ 和每个 $x\in(a,b)$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{L_n(f,)-f(x)}{\mu_n(x)}=D_{(w_2,w_1)}(f,x).$$

$$=\left(\frac{1}{w_2}\left(\frac{f'}{w_1}\right)'\right)(x), \qquad (3.54)$$

则说 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 (a,b) 内适合广义Mamedov条件。由于对 $x\in(a,b)$ 有

$$D_{(w_2,w_1)}(1,x)=0,$$

$$D_{(w_2,w_1)}(u_1\ x)=0.$$

所以若 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 (a,b) 内适合广义Mamedov条件，则对每个 $u\in\mathrm{span}(1,u_1)$ 有

$$L_n(u,x)-u(x)=o_x(\mu_n(x)); \qquad (x\in(a,b)),$$

又因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{L_n(u_2,x)-u_2(x)}{\mu_n(x)}=D_{(w_2,w_1)}(u_2,x).$$

$$=\left\{\frac{1}{w_2}(W_2)'\right\}=1; \qquad (x\in(a,b)),$$

所以若 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 (a,b) 内适合广义Mamedov 条件，则对每个 $x\in(a,b)$，当 n 足够大时，有

$$L_n(u_2,x)-u_2(x)>0.$$

且 $L_n(u_2,x)-u_2(x)\sim\mu_n(x)$，$(n\to+\infty)$，因此通常取

$$\mu_n(x)=L_n(u\ ,x)-u_2(x). \qquad (3.55)$$

现在应用广义抛物线引理证明广义凸性引理。

引理4.25 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(a,b)$ 到自身内的正线性算子，且在 (a,b) 内适合广义Mamedov 条件。若 $f\in C(a,b)$，则 f 在 (a,b) 是广义下凸的充要条件是对每个 $x\in(a,b)$，有

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{L_n(f,x)-f(x)}{\mu_n(x)}\geqslant 0. \qquad (3.56)$$

证明 $\Longrightarrow$）设 f 在 (a,b) 是广义下凸的，由引理4.23，对每个 $\eta\in(a,b)$ 存在 $u\in\mathrm{Span}(1,u_1)$ 使得当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$u(x)\leqslant f(x),$$

且 $u(\eta)=f(\eta)$，因此有

$$\frac{L_n(u,\eta)-u(\eta)}{\mu_n(\eta)}\leqslant\frac{L_n(f,\eta)-f(\eta)}{\mu_n(\eta)}.$$

由于$u\in \mathrm{Span}\{1, u_1\}$，所以由广义Mamedov条件导出

$$L_n(u, \eta)-u(\eta)=o(\mu_n(\eta));\qquad (n\to+\infty)$$

因而得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{L_n(f, \eta)-f(\eta)}{\mu_n(\eta)}\geqslant 0.$$

必要性证毕。

$\Leftarrow$)，采用反证法．若f在$[a, b]$不是广义下凸的，则存在α、$\beta\in[a, b]$和$x_0\in(\alpha, \beta)$使得，

$$u(x_0)<f(x_0),$$

其中

$$u(x)=\frac{u_1(x)-u_1(\alpha)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\beta)+\frac{u_1(\beta)-u_1(x)}{u_1(\beta)-u_1(\alpha)}f(\alpha).$$

于是有

$$f(\alpha)-u(\alpha)=f(\beta)-u(\beta)=0,\ f(x_0)-u(x_0)>0.$$

因此由广义抛物线引理，存在函数$U(x)=c_2u_2(x)+c_0$，$(c_2<0)$和$\eta\in(\alpha, \beta)$使得对每个$x\in[\alpha, \beta]$有。

$$U(x)\geqslant f(x)-u(x),$$

且$U(\eta)=f(\eta)-u(\eta)$。取小区间(α', β')，使得$\alpha<\alpha'<\eta<\beta'<\beta$，构作非负函数$g\in C^2[a, b]$，且对$x\in[\alpha', \beta']$，有$g(x)=0$，而当$x\notin(\alpha, \beta)$时，有

$$g(x)\geqslant f(x)-u(x)-U(x).$$

从而对$\forall x\in[a, b]$有

$$f(x)\leqslant g(x)+u(x)+c_2u_2(x)+c_0.$$

因此

$$L_n(f, \eta)-f(\eta)\leqslant L_n(g, \eta)+L_n(u, \eta)-u(\eta)$$
$$+c_2(L_n(u_2, \eta)-u_2(\eta))+c_0(L_n(1, \eta)-1).$$

由广义Mamedov条件导出

$$L_n(f, \eta)-f(\eta)\leqslant c_2\mu_n(\eta)+o_n(\mu_n(\eta)),$$

所以有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f, \eta)-f(\eta)}{\mu_n(\eta)}\leqslant c_2<0.$$

这与假设矛盾，因而得到f在$[a, b]$是广义下凸的，证毕。

现在应用抛物线引理建立广义小o点态饱和定理。

定理4.31 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a, b]$到自身的正线性算子列，且对每个$x\in(a, b)$有

$$\mu_n(x)=L_n(u_2, x)-u_2(x)>0.$$

若对每个$x\in(a, b)$有

$$L_n(1, x)-1=o_x(\mu_n(x)),$$
$$L_n(u_1, x)-u_1(x)=o_x(\mu_n(x)), \qquad (3.57)$$

则对$f\in C[a, b]$和每个$x\in(a, b)$有

$$L_n(f, x)-f(x)=o_x(\mu_n(x)) \qquad (3.58)$$

的充要条件是$f\in \mathrm{Span}(1, u_1)$。

证明 充分性是明显的，因为$f\in \mathrm{Span}(1, u_1)$，则有

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{u_1(b)-u_1(a)}(u_1(x)-u_1(a)).$$

所以由(3.57)即得(3.58)。

为证明必要性，令

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{u_1(b)-u_1(a)}(u_1(x)-u_1(a))$$

则$g\in C[a, b]$且$g(a)=g(b)=0$，由条件(3.57)和(3.58)导出，对每个$x\in(a,b)$有

$$L_n(g, x)-g(x)=o_x(\mu_n(x)). \qquad (3.59)$$

若$g(x)\neq 0$ ($x\in(a, b)$)，不妨设有$x_0\in(a, b)$使得$g(x_0)>0$，由广义抛物线引理，存在$\eta\in(a, b)$和函数$U(x)=c_2U_2(x)+c_0$ ($c_2<0$)使得对$\forall x\in[a, b]$有

$$U(x)\geqslant g(x).$$

且$U(\eta)=g(\eta)$。于是

$$\begin{aligned}L_n(g, \eta)-g(\eta)&\leqslant L_n(U, \eta)-U(\eta)\\&=c_2(L_n(u_2, \eta)-u_2(\eta))+c_0(L_n(1, \eta)-1)\\&=c_2\mu_n(\eta)+o_\eta(\mu_n(\eta)).\end{aligned}$$

由于$c_2<0$，所以上式导出

$$L_n(g, \eta)-g(\eta)\neq o_\eta(\mu_n(\eta)); \qquad (n\to+\infty)$$

这与(3.59)矛盾，因而有$g(x)\leqslant 0$ ($x\in(a, b)$)。用$-g$代替g进行类似地讨论可得对$x\in(a, b)$有$g(x)\geqslant 0$，于是得到对$x\in[a, b]$有

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{u_1(b)-u_1(a)}(u_1(x)-u_1(a)),$$

即$f\in \mathrm{Span}(1, u_1)$。证毕

为建立广义大O点态饱和定理，我们还需要如下引理。

引理4.26 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a, b]$到自身的正线性算子列，且在(a, b)内适合广义Mamedov条件，若$f\in L(a, b)$，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)w_1(t)dt,$$

则对每个 $x_0\in(a, b)$ 有

$$\underline{D}_{W_2}(f, x_0)\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{L_n(F,x_0)-F(x_0)}{\mu_n(x_0)} \tag{3.60}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{L_n(F,x_0)-F(x_0)}{\mu_n(x_0)}\leqslant \overline{D}_{W_2}(f, x_0)$$

其中 $W_2(t)=\int_a^t w_2(u)du$

证明　我们只证明右端不等式，若 $\overline{D}_{W_2}(f, x_0)=+\infty$，则不等式(3.60)右端成立是明显的，现设 $\overline{D}_{W_2}(f, x_0)<+\infty$，任取 d 使得 $\overline{D}_{W_2}(f, x_0)<d<+\infty$，于是存在 $\delta>0$，当 $0<|t-x_0|<\delta$ 时，有

$$\frac{f(t)-f(x_0)}{W_2(t)-W_2(x_0)}<d.$$

由于 $W_2'(x_0)=w_2(x_0)$，所以有

$$W_2(t)-W_2(x_0)=w_2(x_0)(t-x_0)+o_{x_0}(|t-x_0|)$$

选取足够小 $\delta>0$ 有

$$\frac{f(t)-f(x_0)}{(t-x_0)w_2(x_0)}<d \qquad (0<|t-t_0|<\delta)$$

因而

$$\int_{x_0}^t\Big(f(s)-f(x_0)\Big)w_1(s)ds<dw_2(x_0)\int_{x_0}^t(s-t_0)w_1(s)ds$$

由于

$$F(t)-F(x_0)=\int_{x_0}^t f(s)w_1(s)ds$$

所以有

$$F(t)-F(x_0)-f(x_0)\big(u_1(t)-u_1(x_0)\big)$$

$$=\int_{x_0}^t\Big(f(s)-f(x)\Big)w_1(s)ds$$

$$\leqslant dw_2(x_0)\int_{x_0}^t(s-x_0)w_1(s)ds.$$

因而有

$$L_n\Big(F(t)-F(x_0)-f(x_0)\big(u_1(t)-u_1(x_0)\big); x_0\Big)$$

$$\leqslant dw_2(x_0)L_n\Big(\int_{x_0}^t(s-x_0)w_1(s)ds; x_0\Big).$$

由广义Mamedov条件导出

$$L_n(F, x_0)-F(x_0)\leqslant dw_2(x_0)L_n\left(\int_{x_0}^{t}(s-x_0)w_1(s)ds; x_0\right)$$

$$+o_{x_0}(\mu_n(x_0))$$

因此有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(F,x_0)-F(x_0)}{\mu_n(x_0)}\leqslant dw_2(x_0)\lim_{n\to+\infty}\frac{L_n\left(\int_{x_0}^{t}(s-x_0)w_1(s)ds,x\right)}{\mu_n(x_0)}$$

由于$\int_{x_0}^{t}(s-x_0)w_1(s)ds\in C^2(a, b)$，所以由广义Mamedov条件（3.54）得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{L_n\left(\int_{x_0}^{t}(s-x_0)w_1(s)ds,x_0\right)}{\mu_n(x_0)}=D(w_1, w_1)\left(\int_{x_0}^{t}(s-x_0)w_1(s)ds,x_0\right)$$

$$=\frac{1}{w_1(x_0)},$$

故得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(F,x_0)-F(x_0)}{\mu_n(x_0)}\leqslant d$$

由于$d>\overline{D}_{w_2}(f, x_0)$是任意的，令$d\to\overline{D}_{w_2}(f, x_0)$得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{L_n(F,x_0)-F(x_0)}{\mu_n(x_0)}\leqslant\overline{D}_{w_2}(f, x_0).$$

证毕

利用上述引理可以证明由H. Bernes建立的广义大O点态饱和定理，即

定理4.32 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(a, b)$到自身内的正线性算子列，且在(a, b)内适合广义Mamedov条件，若$f\in(a, b)$且对每个$x\in(a, b)$有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{L_n(f, x)-f(x)}{\mu_n(x)}\leqslant g(x)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{L_n(f,x)-f(x)}{\mu_n(x)}\qquad(3.61)$$

其中$g\in L_1(a, b)$，则对$\forall x\in(a, b)$有

$$f(x)=C_0+C_1u_1(x)+\int_a^x w_1(t)\int_a^t g(s)w_2(s)dsdt$$

其中C_0，C_1是确定常数。

证明 令

$$H(x)=f(x)-\int_a^x w_1(t)\int_a^t g(s)w_2(s)dsdt$$

我们必须证明$H\in Span(1,u_1)$。

由Dini引理，对每个$k\in N$存在g关于W_2的优函数$M_k(x)$和劣函数$m_k(x)$，即对$\forall x\in(a,b)$有

$$\overline{D}_{W_2}(m_k,x)\leqslant g(x)\leqslant \underline{D}_{W_2}(M_k,x) \tag{3.62}$$

且有

$$\left|M_k(x)-\int_a^x W_2(t)g(t)dt\right|<\frac{1}{k},$$

$$\left|m_k(x)-\int_a^x W_2(t)g(t)dt\right|<\frac{1}{k}.$$

记

$$M_k^*(x)=\int_a^x M_k(t)w_1(t)dt,$$

$$m_k^*(x)=\int_a^x m_k(t)w_1(t)dt$$

由引理1.26和（3.62）导出

$$\underline{\operatorname{Lim}}_{n\to+\infty}\frac{L_n(M_k^*,x)-M_k^*(x)}{\mu_n(x)}\geqslant\underline{D}_{W_2}(M_k,x)\geqslant g(x),$$

$$\overline{\operatorname{Lim}}_{n\to+\infty}\frac{L_n(m_k^*,x)-m_k^*(x)}{\mu_n(x)}\leqslant\overline{D}_{W_2}(m_k,x)\leqslant g(x)$$

于是对每个$k\in N$和每个$x\in(a,b)$有

$$\overline{\operatorname{Lim}}_{n\to\infty}\frac{L_n(f-m_k^*,x)-(f-m_k^*)(x)}{\mu_n(x)}\geqslant g(x)-\overline{D}_{W_2}(m_k,x)\geqslant 0$$

由引理1.25（广义凸性引理）断定，$f-m_k^*$在$[a,b]$是广义下凸的。

类似于定理4.30的证明可知，当$k\to+\infty$时，$f-m_k^*$在$[a,b]$上一致收敛于H，所以H在$[a,b]$是广义下凸的。同样地可证H在$[a,b]$是广义上凸的，从而得到$H\in Span(1,u_1)$。证毕

特别地有如下重要推论。

推论4.21 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a,b]$到自身的正线性算子列，且在(a,b)内适合广义Mamedov条件。又设$f\in C(a,b)$，若对每个$x\in(a,b)$有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{L_n(f,x)-f(x)}{\mu_n(x)}=0$$

则 $f\in a(1, w_1)$。

这是定理4.21的一种推广形式。

推论4.22 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C[a, b]$ 到自身内的正线性算子列，且在 (a, b) 内适合广义Mamedov条件。又设 $f\in C[a, b]$，若对每个 $x\in(a, b)$ 有

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{L_n(f, x)-f(x)}{\mu_n(x)}=g(x),$$

其中 $|g(x)|\leqslant M<+\infty$，则对 $\forall x\in(a, b)$ 有

$$|D(w_2, w_1)(f, x)|\leqslant M<+\infty$$

最后考查一个例子

例 对 $f\in C[0, 1)$，令

$$M_n(f,x)=(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n+k}\right)\binom{n+k-1}{k}x^k$$

称为Meyer—König and Zeller 算子。由于对 $x\in(0, 1)$ 有

$$(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k=1 \tag{3.63}$$

所以有

$$M_n(1, x)=1 \qquad x\in(0, 1)。$$

其次对固定的正整数m和 $x\in(0, 1]$ 有

$$(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+m}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$$=\frac{(1-x)^n}{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-2}{k}\frac{n+k-1}{n+k+m}x^k$$

$$=\frac{1-x}{n-1}\left[(1-x)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-2}{k}\left(1-\frac{m+1}{n+k+m}\right)x^k\right]$$

$$=\frac{1-x}{n-1}+O(n^{-2}).$$

利用不等式 $\frac{1}{n+k+m}\leqslant\frac{1}{n}$ $(k\in N)$，从(3.63)导出

$$(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+k+m}\right)^2\binom{n+k-1}{k}x^k=O(n^{-2}) \tag{3.64}$$

类似地，对 $n\geqslant 1$ 和 $x\in(0, 1)$ 有

$$x(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\binom{n+k-1}{k}x^k=\frac{(1-x)^n}{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{k+1}$$

$$=\frac{1-x}{n-1}-\frac{(1-x)^n}{n-1}=\frac{1-x}{n-1}+o_x(n^{-1}) \qquad (3.65)$$

所以有

$$M_n(t,\ x)=(1-x)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n+k}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$$=(1-x)^n\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-2}{k-1}\left(1-\frac{1}{n+k}\right)x^k$$

$$=x(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(1-\frac{1}{n+k+1}\right)x^k$$

$$=x\left(1-\frac{1-x}{n-1}\right)+O(n^{-2}).$$

而

$$M_n(t^2,\ x)=(1-x)^n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n+k}\right)^2\binom{n+k-1}{k}x^k$$

$$=x^2(1-x)^n\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-3}{k-3}\cdot\frac{k(k+n-1)(k+n-3)}{(k-1)(n+k)^2}x^{k-2} \qquad (3.66)$$

注意到在(3.66)中对$k=1$ 有 $nx(1-x)^n(n+1)^{-2}=o(n^{-1})$。所以(3.66)可改写为

$$M_n(t^2,\ x)=x^2(1-x)^n\sum_{k=2}^{\infty}\binom{n+k-3}{k-2}\left(1-\frac{1}{n+k}\right)\left(1-\frac{2}{n+k}\right)x^{k-2}+o(n^{-1})$$

$$=x^2+x^2(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{3}{n+k+2}+\frac{2}{(n+k+2)^2}\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{3}{(k+1)(n+k+2)}\right]x^k+o(n^{-1})$$

利用(3.64),(3.65)和

$$\frac{x(1-x)^n}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\binom{n+k-1}{k}x^k=o_x(n^{-1})$$

得到

$$M_n(t^2,\ x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n-1}-\frac{3x^2(1-x)}{n-1}+o_x(n^{-1})$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)(1-3x)}{n-1}+o_x(n^{-1})$$

现在引入函数

$$w_1(x)=w_2(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\qquad x\in(0,1),$$

则有

$$u_1(x)=\int_0^x w_1(t)dt=\frac{1}{1-x},$$

$$W_2(x)=\int_0^x w_2(t)dt=\frac{1}{1-x},$$

$$u_2(x)=\int_0^x w_1(t)W_2(t)dt=\frac{1}{2(1-x)^2}.$$

若取

$$\mu_n(x)=\frac{x}{2n(1-x)^2}\qquad x\in(0,1)$$

则对 $x\in(0,1)$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M_n(1,x)-1}{\mu_n(x)}=0=D_{(w_2,w_1)}(1,x),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M_n(t,x)-x}{\mu_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{x(1-x)}{n-1}+o_x(n^{-1})}{\frac{x}{2n(1-x)^2}}$$

$$=-2(1-x)^3=D_{(w_2,w_1)}(e_1,x)$$

和

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M_n(t^2,x)-x^2}{\mu_n(x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{x(1-x)(1-3x)}{n-1}+o_x(n^{-1})}{\frac{x}{2n(1-x)^2}}$$

$$=2(1-x)^3(1-3x)=D_{(w_2,w_1)}(e_2,x).$$

又 $M_n\left((t-x)^4,x\right)=o_x(n^{-1})$，所以应用第一章的Mamedov等价条件断定，对每个 $f\in C^2(0,1)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_n(f,x)-f(x)}{\mu_n(x)}=D_{(w_2,w_1)}(f,x),$$

因此得到每个 $x\in(0,1)$，当 $n\to+\infty$ 时有

$$\mu_n(x)\sim M_n(u_2,x)-u_2(x)$$

即Meyer—König and Zeller 算子列 $\{M_n\}_{n\in N}$ 在 $(0,1)$ 内适合广义Mamedov条件

由定理4.31和定理4.32得到

系 Meyer—König and Zeller 算子列 $\{M_n\}_{n\in N}$ 在 $C[0, 1]$ 关于 $\left\{\frac{x}{2n(1-x)^2}\right\}$ 是饱和的。若 $f\in C[0, 1]$，且对每个 $x\in(0, 1)$ 有

$$f(x)-M_n(f, x)=o_x\left(\frac{x}{2n(1-x)^2}\right),$$

则 $f\in \mathrm{Span}(1, u_1)$，其中 $u_1(x)=\frac{1}{1-x}$。

又若 $f\in C[0, 1]$ 且对每个 $x\in(0, 1)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-x)^2}{x}(M_n(f, x)-f(x))\leqslant g(x)$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{n(1-x)^2}{x}(M_n(f, x), f(x)),$$

其中 $g\in L_1(0, 1)$，则有

$$f(x)=C_0+\frac{C_1}{1-x}+2\int_0^x(1-s)^{-2}g(s)ds.$$

3.5 正线性算子的局部饱和定理

由整体逼近中的饱和性质，对局部逼近不一定有效，例如R. A. DeVore对正卷积算子建立的点态小o饱和定理断言：若 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in\Omega}$ 是正、偶 Borel 测度核，且对 $k\in N$ 有

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\alpha_{k\rho}}{1-\alpha_{1\rho}}=\psi_k>0$$

则对 $f\in C_{2\pi}$ 和每个 $x\in(-\pi, \pi)$ 有

$$f(x)-I_\rho(f, x)=o_x(1-\alpha_{1\rho})\qquad(\rho\to\rho_0),\tag{3.67}$$

当且仅当 $f\equiv$ const。从局部逼近的观点是自然要问，若对每个 $x\in(a, b)\subset(-\pi, \pi)$ (3.67) 成立是否一定能导出 $f\equiv$ const $(x\in(a, b))$ 呢？回答是否定的。例如取

$$d\mu_n(t)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\left(d\delta_{-\frac{1}{n}}(t)+d\delta_{\frac{1}{n}}(t)\right)+\frac{\pi}{4n^2}\left(d\delta_{-\frac{\pi}{2}}(t)+d\delta_{\frac{\pi}{2}}(t)\right),$$

对 $f\in C_{2\pi}$，令

$$I_n(f, x)=(f*d\mu_n)(x),$$

因此有

$$I_n(f, x)-f(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\Delta^2_{\frac{1}{n}}(f, x)+\frac{1}{4n^2}\Delta^2_{\frac{\pi}{2}}(f, x).\tag{3.68}$$

由计算得到

$$1-\alpha_{1n}=\frac{1}{n^2}+o(n^{-2})\qquad(n\to+\infty),$$

且对每个 $k\in N$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha_{kn}}{1-\alpha_{1n}}=\frac{k^2}{2}+\sin^2\frac{k\pi}{2}=\psi_k>0$$

因而若 $f\in C_{2\pi}$ 且在$\left[-\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{8}\right]$上二次连续可微，则由(3.68)对每个$x\in\left(-\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{8}\right)$有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n(f,x)-f(x)}{1-\alpha_{1n}}=\frac{f''(x)}{2}+\frac{1}{4}\Delta^2_{\frac{\pi}{2}}(f,\ x).$$

特别地，若选取 $f_0\in C_{2\pi}$ 且在$\left[-\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{8}\right]$是线性的，则对每个 $x\in\left(-\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{8}\right)$有

$$f_0(x)-I_n(f_0,\ x)=o_x(1-\alpha_{1n})\qquad(n\to+\infty)$$

可是，在$\left[-\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{8}\right]$上存在 $f_0\neq\text{const}$

设 $a<c<d<b$，$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(a,\ b)$到$C(c,\ d)$内的正线性算子列，记

$$\phi_n=\frac{1}{2}\sup_{x\in(c,d)}L_n\left((t-x)^2,\ x\right)$$

首先，讨论局部小o饱和性质，得到

定理4.33 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C(a,\ b)$到$C(c,\ d)$内的正线性算子列且适合如下条件：

i) 对 $k=0,\ 1$有

$$\|L_n(e_k)-e_k\|=o(\phi_n),\qquad(n\to+\infty)\qquad(3.69)$$

其中$\|\cdot\|=\|\cdot\|C(a,b)$　而　$e_k(x)=x^k$.

ii) 存在正常数C_1，C_2使得对每个 $x\in(c,\ d)$有

$$C_1\phi_n\leqslant L_n\left((t-x)^2,\ x\right)\leqslant C_2\phi_n,\qquad(3.70)$$

iii) 对$\forall c',\ d'$ 且 $a<c'<c<d<d'<b$ 和每个 $h\in C(a,\ b)$有

$$\|L_n(\lambda_{(c',d')}h)\|=o(\phi_n)\qquad(n\to+\infty)\qquad(3.71)$$

则对 $f\in C(D)$有

$$\|f-L_n(f)\|=o(\phi_n)\qquad(n\to+\infty)\qquad(3.72)$$

当且仅当f在$(c,\ d)$上是线性的，即对$x\in(c,\ d)$有

$$f(x)=f(c)+\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c).$$

证明 ⟹)是明显的，我们仅需要证明"仅当"部分，令

$$g(x)=f(x)-l(x)$$

其中 $l(x)=f(c)+\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)$，则$g\in C(a,\ b)$且 $g(c)=g(d)=0$ 由(3.69)和(3.72)导出

$$\|L_n(g)-g\|=o(\phi_n)\qquad(n\to+\infty)$$

我们要证 $g(x)\equiv0$ ($x\in(c,\ d)$)，若不然，存在$x_0\in(c,\ d)$使得$g(x_0)\neq0$，不失一般性可设$g(x_0)>0$，于是由抛物线引理导出，存在 $y\in(c,\ d)$和二次抛物线 $Q(x)=\alpha(x-y)^2+\beta(x-y)+g(y)$ ($\alpha<0$)使得对$\forall x\in(c,\ d)$有

$$Q(x)\geqslant g(x) \tag{3.73}$$

且$Q(c)>0$，$Q(d)>0$。

记

$$c'=\max\{x \mid a\leqslant x<c \text{ 且 } g(x)=Q(x)\}$$
$$d'=\min\{x \mid d<x\leqslant b \text{ 且 } g(x)=Q(x)\}$$

令

$$h(x)=g(x)-Q(x),$$

则 $h\in C[a, b]$，由（3.73）导出，对$x\in[a, b]$有

$$g(x)\leqslant Q(x)+\lambda_{(c',d')}(x)h(x). \tag{3.74}$$

注意到 $g(y)=Q(y)$，所以由（3.69）—（3.71）导出

$$L_n(g, y)-g(y)=L_n(g(x)-g(y), y)+g(y)(L_n(e_0, y)-e_0)$$
$$\leqslant L_n(Q(x)-Q(y), y)+L_n(\lambda_{(c',d')}h, y)+g(y)(L_n(e_0, y)-e_0)$$

$$\leqslant \alpha L_n((t-y)^2, y)+o(\phi_n)\leqslant C_1\alpha\phi_n+o(\phi_n)<\frac{C_1\alpha}{2}\phi_n<0,$$

其中注意到$\alpha<0$，因此得到

$$|L_n(g, y)-g(y)|>\frac{C_1|\alpha|}{2}\phi_n>0$$

即

$$\|L_n(g)-g\|\neq o(\phi_n); \qquad (n\to+\infty),$$

这与假设矛盾，所以必有$g(x)\equiv 0$（$x\in[c, d]$）或对 $x\in[c, d]$ 有

$$f(x)=f(c)+\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c).$$

证毕。

应当指出，考虑到Mamedev 等价条件，在条件（3.69）之下，（3.71）等价于如下条件之一：

i) $$\sup_{x\in[c,d]} L_n((t-x)^4, x)=o(\phi_n) \tag{3.75}$$

ii) 对每个$g\in C[a, b]$且在$[c, d]$上二次连续可微，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(g, x)-g(x)}{\phi_n(x)}=g''(x) \tag{3.76}$$

在$[c, d]$上一致成立。

通常说$\{L_n\}_{n\in N}$在$[c, d]$上适合一致的Mamedov条件是指适合等价条件(3.71)，（3.75）和（3.76）之一。

由于$f_2(t)=t^2\in C[a, b]$且由条件（3.69）—（3.71）导出

$\|L_n(f_2)-f_2\|=O(\phi_n)$。

因此由定理4.33得到如下局部饱和定理

定理4.34 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是适合定理4.33中所有条件的正线性算子列，则 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $C(a, b)$ 上关于阶 $\{\phi_n\}$ 与平凡类 $T(L_n)=\{l \mid l$ 在 (c, d) 上是线性的 $\}$ 是局部饱和的。

作为例子，考虑如下代数卷积算子的饱和现象。对 $f\in C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$，令

$$A_n(f, x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)d\alpha_n(t-x) \tag{3.77}$$

其中 $d\alpha_n$ 是 $(-1, 1)$ 上非负、偶的 Boud 测度且

$$\int_{-1}^{1} d\alpha_n(t)=1,$$

设

$$\mu_n=\int_{-1}^{1} t^2 d\alpha_n(t)>0$$

且

$$\int_{-1}^{1} t^4\alpha_n(t)=o(\mu_n), \qquad (n\to+\infty), \tag{3.78}$$

则对 $\forall x\in(-\delta, \delta)$ $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$，有

$$|1-A_n(1, x)|=\left|1-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\alpha_n(t-x)\right|$$

$$=\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{2}-x} d\alpha_n(t)+\int_{\frac{1}{2}-x}^{1} d\alpha_n(t)\right|\leqslant 2\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1} d\alpha_n(t)\leqslant\frac{2}{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^4}\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1} d\alpha_n(t)$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^4}\int_{-1}^{1} t^4 d\alpha n(t)=o(\mu_n)$$

又

$$|x-A_n(t, x)|\leqslant|x|\,|1-A_n(1, x)|+|A_n(t-x, x)|$$

而

$$|A_n(t-x, x)|=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(t-x)d\alpha_n(t-x)\right|=\left|\int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x} t d\alpha_n(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1} t d\alpha_n(t)\leqslant\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)^3}\int_{-1}^{1} t^4 d\alpha_n(t)=o(\mu_n)$$

因而对 $k=0, 1$ 有

$$\|A_n(e_k)-e_k\|_{C(-\delta,\delta)}=O(\mu_n) \qquad (n\to\infty)$$

其次，对$\forall x\in[-\delta,\ \delta]$有

$$\Lambda_n((t-x)^2,\ x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(t-x)^2d\alpha_n(t-x)=\int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x}t^2d\alpha_n(t)$$

$$\leqslant\int_{-1}^{1}t^2d\alpha_n(t)=\mu_n.$$

另一方面有

$$\mu_n-\Lambda_n((t-x)^2,\ x)=\mu_n-\int_{-\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}-x}t^2d\alpha_n(t)$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}-x}t^2d\alpha_n(t)+\int_{\frac{1}{2}-x}^{1}t^2d\alpha_n(t)\leqslant2\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{1}t^2d\alpha_n(t)$$

$$\leqslant\frac{1}{(\frac{1}{2}-\delta)^2}\int_{-1}^{1}t^4d\alpha_n(t)=o(\mu_n)\qquad(n\to+\infty),$$

所以当$n\to+\infty$，对$x\in[-\delta,\ \delta]$ $\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$一致有

$$\Lambda_n((t-x)^2,\ x)\sim\mu_n$$

最后，设$0<\delta<\delta'<\frac{1}{2}$、$h\in C\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$，则对$\forall x\in[-\delta,\ \delta]$有

$$\left|\Lambda_n(\lambda_{[-\delta',\delta']}h,\ x)\right|=\left|\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{-\delta'}+\int_{\delta'}^{\frac{1}{2}}\right)h(t)d\alpha_n(t-x)\right|$$

$$\leqslant2\|h\|_{C[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\int_{\delta'-\delta}^{1}d\alpha_n(t)\leqslant\|h\|_{C[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\int_{-1}^{1}t^4d\alpha_n(t)=o(\mu_n).$$

可见卷积算子列$\{\Lambda_n\}_{n\in N}$在$[-\delta,\ \delta]$ $(0<\delta<\frac{1}{2})$上适合定理4.33中条件（3.69）—（3.71），因此，由定理4.34得到如下结果。

系1 代数卷积算子列$\{\Lambda_n\}_{n\in N}$在$[-\delta,\ \delta]$ $(0<\delta<\frac{1}{2})$关于阶$\{\mu_n\}$与平凡类$T(\Lambda_n)=\{l\,|\,l$ 在$[-\delta,\ \delta]$上是线性$\}$是饱和的。

特别地，考查Landau算子序列$\{l_n\}_{n\in N}$，此时，取$d\alpha_n(t)=C_n(1-t^2)^n dt$ 其中C_n使得

$$C_n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt=1$$

于是由计算可得

$$\mu_n=C_n\int_{-1}^{1}t^2(1-t^2)^n dt=\frac{1}{2n+3}\sim\frac{1}{2n}\qquad(n\to+\infty),$$

而

$$C_n\int_{-1}^{1}t^4(1-t^2)^n dt=\frac{3}{(2n+5)(2n+3)}=o(\mu_n)$$

即（3.78）成立，因此由系1 导出

系2 Landau 算子列 $\{l_n\}_{n\in N}$ 在 $[-\delta, \delta]$ $(0<\delta<\frac{1}{2})$ 上关于阶 $\{n^{-1}\}$ 和平凡类 $T(l_n)=\{l \mid l$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上是线性的 $\}$ 是饱和的。

现在应用定理4.34去讨论周期卷积算子的局部饱和问题，从而回答了本节开头所提出的问题。

系3 设 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in Q}$ 是正、偶Boul 测度核，且满足 Turesky 等价条件，则相应的周期卷积算子族 $\{I_\rho\}_{\rho\in Q}$ 在 $[-\delta, \delta]$ $(0<\delta<\pi)$ 上关于 $\{1-\alpha_{1\rho}\}$ 和平凡类 $T(I_\rho)=\{l \mid l$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上是线性的 $\}$ 是局部饱和的。

证明 由于 $\{d\mu_\rho\}_{\rho\in Q}$ 是正、偶Boiel 测度核，且适合Turesky等价条件，则由计算可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 d\mu_\rho(t) \sim 2(1-\alpha_{1\rho}),$$

和

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 d\mu_\rho(t) = o(1-\alpha_{1\rho}) \qquad (\rho\to\rho_0)。$$

因此条件（3.69）—（3.71）是适合的。故系3的断言由定理4.34直接导出。证毕

其次，讨论局部饱和类的特征，我们利用抛物线技巧建立局部饱和类的特征定理得到

定理4.35 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(c, d)$ 内的正线性算子，且适合如下条件：

i) 对 $k=0, 1$ 有

$$\|L_n(e_k)-e_k\| = o(\phi_n),$$

其中 $e_k(x)=x^k$，

ii) 存在常数 C_1，C_2 使得对 $\forall x\in[c, d]$ 有

$$C_1\phi_n \leqslant L_n((t-x)^2, x) \leqslant C_2\phi_n$$

iii) 在 $[c, d]$ 上适合一致的Mamedov 条件，则 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $[c, d]$ 上关于阶 $\{\phi_n\}$ 与平凡类 $T(L_n)=\{l \mid l$ 在 $[c, d]$ 上是线性的 $\}$ 是饱和的，且局部饱和类

$$F(L_n; T, \phi_n)=\{f \mid f\in C[a, b] \text{ 且在 } [c, d] \text{ 上有 } f'\in \mathrm{Lip}1\}$$
$$=\{f \mid f\in C[a, b] \text{ 且在 } [c, d] \text{ 上有 } f\in \mathrm{Lip}^* 2\}$$

证明 由定理4.34和 Fured 量化定理，只需证明若 $f\in C[a, b]$ 且

$$\|f-L_n(f)\|_{C(a,b)} \leqslant M\phi_n$$

则在 $[c, d]$ 上有 $f\in \mathrm{Lip}^*_{\frac{M}{2C_1}} 2$。

若不然，存在 $x_0\in(c, d)$ 使得

$$\frac{|f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)|}{\delta^2} > \frac{M}{C_1}$$

利用抛物线技巧，仿照定理4.29的处理方法，存在 $y\in(c, d)$ 和区间 $[c', d']\subset[c, d]$ 且 $y\in(c', d')$ 以及二次抛物线

$$Q^*(x)=-\frac{1}{2}\alpha(x-y)^2+\beta(x-y)+f(y)$$

其中$-\alpha<-MC_1^{-1}$ 使得对 $x\in[c', d']$ 有

$$f(x)\leqslant Q^*(x)$$

令 $h(x)=f(x)-Q^*(x)$,则 $h\in C[a, b]$ 且对 $x\in[a, b]$ 有

$$f(x)\leqslant Q^*(x)+\lambda_{[c',d']}(x)h(x).$$

由条件 i)—iii)导出

$$L_n(f, y)-f(y)\leqslant-\frac{1}{2}\alpha L_n\big((x-y)^2, y\big)+o(\phi_n)$$

$$\leqslant-\frac{M}{2C_1}L_n\big((x-y)^2, y\big)+o(\phi_n)<-M\phi_n+o(\phi_n)$$

这与条件$\|f-L_n(f)\|_{C(c,d)}\leqslant M\phi_n$矛盾。证毕

利用定理1.35从系1—系3导出如下相应的局部饱和类：设 $T=\{l \mid l$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上线性$\}$，有

$$F(\Lambda_n, T, \mu_n)=\{f\mid f\in C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{且在} [-\delta, \delta] \text{上} f'\in \mathrm{Lip}1\}$$

$$F(I_n, T, n^{-1})=\{f\mid f\in C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{且在} [-\delta, \delta] \text{上} f'\in \mathrm{Lip}1\}$$

其中 $0<\delta<\frac{1}{2}$，又

$$F(I_\rho, T, 1-\alpha_{1\rho})=\{f\mid f\in C_{2\pi}\text{且在} [-\delta, \delta] \text{上} f'\in \mathrm{Lip}1\}$$

其中 $0<\delta<\pi$。

§4 关于最优正线性算子列饱和问题的研究

4.1最优正三角多项式算子

设 $\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$上正线性算子列．令$\tau_0(t)=1$，$\tau_1(t)=\sin t$ 和 $\tau_2(t)=\cos t$，G. Freud量化定理指出，若存在$\lambda_n\to0^+$ ($n\to+\infty$) 使得对$k=0, 1, 2$有

$$\|L_n(\tau_k)-\tau_k\|_{C_{2\pi}}=O(\lambda_n^2), \tag{4.1}$$

则对每个$f\in C_{2\pi}$有

$$\|f-L_n(f)\|_{C_{2\pi}}=O\big(\lambda_n^2+\omega_2(f, \lambda_n)\big) \tag{4.2}$$

自然要讨论存在多大的$\alpha>0$使得$\lambda_n\asymp n^{-\alpha}$呢？

设$S_n(f, x)$表示Fourier算子，令

$$\pi_n(f, x)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}S_k(f, x)$$

则有$\pi_n(f, x)=2\sigma_{2n}(f, x)-\sigma_n(f, x)$，且$\|\pi_n\|\leqslant3$.用$t_n$表示$f\in C_{2\pi}$的最佳逼近n次三角多

项式，即 $E_n^*(f)=\|f-t_n\|_{C_{2\pi}}$，由于 $\pi_n(t_n,x)=t_n(x)$，所以有

$$\|\pi_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=\|\pi_n(f-t_n)-(f-t_n)\|_{C_{2\pi}}\leqslant(\|\pi_n\|+1)\|f-t_n\|_{C_{2\pi}}\leqslant 4E_n^*(f) \quad (4.3)$$

应用（4，3）导出

引理4.27 对 $n\in N$ 有

$$E_n^*(|\sin x|)\geqslant\frac{1}{2\pi(2n+1)} \quad (4.4)$$

证明 由 Fourier 展开有

$$f_0(x)=|\sin x|=-\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$$

所以对 $m\in N$ 有

$$f_0(x)-S_m(f_0,x)=-\frac{4}{\pi}\sum_{[\frac{m}{2}]+1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$$

又因为

$$f_0(x)-\pi_n(f_0,x)=\sum_{m=n}^{2n-1}\frac{f_0(x)-S_m(f,x)}{n},$$

故令 $x=0$ 得到

$$|f_0(0)-\pi_n(f_0,0)|=\frac{4}{n\pi}\sum_{m=n}^{2n-1}\left\{\sum_{k=[\frac{m}{2}]+1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\right\} \quad (4.5)$$

注意到对 $m=n,\ n+1,\ \cdots,\ 2n-1$ 有

$$\sum_{k=[\frac{m}{2}]+1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\geqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1},$$

因此由（4.5）导出

$$|f_0(0)-\pi_n(f_0,0)|>\frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{4}{2\pi(2n+1)}.$$

从而由（4.3）导出

$$E_n^*(|\sin x|)>\frac{4}{4}\cdot\frac{1}{2\pi(2n+1)}$$

设 L_n 是 $C_{2\pi}$ 上的正线性算子，若存在整数 $\alpha\geqslant 1$、$\beta\geqslant 0$ 使得对每个 $f\in C_{2\pi}$ 有 $L_n(f)\in T_{\alpha n+\beta}$，则说 L_n 是三角多项式算子，记作 $L_n\in T_{\alpha n+\beta}$，我们有

定理4.36 若 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C_{2\pi}$ 上正线性算子列且对每个 $n\in N$ 有 $L_n\in T_{\alpha n+\beta}$，则当 $n\to+\infty$ 时

$$n\|L_n(1)-1\|_{C_{2\pi}}=o(1) \quad (4.6)$$

和 $$n^2\left\|L_n\left(\sin^2\frac{t-x}{2},\ x\right)\right\|_{C_{2\pi}}=o(1) \tag{4.7}$$

至少有一个不成立。

证明 取 $f_0(x)=|\sin x|$，由于

$$|\sin t|-|\sin x|\leqslant|\sin t-\sin x|\leqslant 2\left|\sin\frac{t-x}{2}\right|,$$

所以

$$|L_n(f_0,\ x)-f_0(x)|\leqslant|L_n(f(t)-f_0(x),\ x)|+|f_0(x)|\,|L_n(1,\ x)-1|$$

$$\leqslant 2L_n\left(\left|\sin\frac{t-x}{2}\right|,\ x\right)+\|L_n(1)-1\|_{C_{2\pi}}$$

是由 Schwartz 不等式导出

$$\|L_n(f_0)-f_0\|_{C_{2\pi}}\leqslant 2\sqrt{\|L_n(1)\|_{C_{2\pi}}\|L_n(\sin^2\frac{t-x}{2},\ x)\|_{C_{2\pi}}}+\|L_n(1)-1\|_{C_{2\pi}}$$

由于$L_n(f_0)\in T_{n\alpha+\beta}$，所以有

$$nE^*_{n\alpha+\beta}(|\sin x|)\leqslant n\|L_n(f_0)-f_0\|_{C_{2\pi}}\leqslant 2\sqrt{n^2\|L_n(\sin^2\frac{t-x}{2},\ x)\|_{C_{2\pi}}\|L_n(1)\|_{C_{2\pi}}}$$

$$+n\|L_n(1)-1\|_{C_{2\pi}}$$

因此由引理4.27得到

$$2\sqrt{n^2\|L_n(\sin^2\frac{t-x}{2},\ x)\|_{C_{2\pi}}\|L_n(1)\|_{C_{2\pi}}}+n\|L_n(1)-1\|_{C_{2\pi}}\geqslant\frac{n}{2\pi(2n+1)}\geqslant C>0$$

可见（4.6）和（4.7）至少有一个不成立，证毕。

由于

$$L_n\left(\sin^2\frac{t-x}{2},\ x\right)=\frac{1}{2}L_n\left(1-\cos(t-x),\ x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{L_n(1,\ x)-\cos x L_n(\cos t,\ x)-\sin x L_n(\sin t,\ x)\right\}$$

所以有

$$n^2\left\|L_n\left(\sin^2\frac{t-x}{2},\ x\right)\right\|_{C_{2\pi}}\leqslant\frac{n^2}{2}\left\{\|L_n(\tau_0)-\tau_0\|_{C_{2\pi}}+\|L_n(\tau_1)-\tau_1\|_{C_{2\pi}}\right.$$

$$\left.+\|L_n(\tau_2)-\tau_2\|_{C_{2\pi}}\right\}$$

因此定理4.33得到若$\|L_n(1)-1\|_{C_{2\pi}}=o(n^{-2})$，则必$\left\|L_n\left(\sin^2\frac{t-x}{2},\ x\right)\right\|_{C_{2\pi}}\neq o(n^{-2})$，

从而

$$\|\tau_k-L_n(\tau_k)\|\neq o(n^{-2})\qquad(k=1,\ 2)。$$

至少有一个成立，于是有

推论4.23 设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$上正线性算子列，若对每$n\in N$有$L_n\in T_{n\alpha+\beta}$，则

$$\|\tau_k-L_n(\tau_k)\|_{C_{2\pi}}\neq o(n^{-2})\qquad(k=0,\ 1,\ 2)$$

至少有一个成立。

依据推论4.23引入如下最优正线性算子列，设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C_{2\pi}$上的正线性算子列且对每个$n\in N$有$L_n\in T_{n+\beta}$，若$\|1-L_n(1)\|_{C_{2\pi}}=o(n^{-2})$（$n\to+\infty$）且对$k=1$，2有

$$\|\tau_k-L_n(\tau_k)\|_{C_{2\pi}}=O(n^{-2}) \tag{4.8}$$

则说$\{L_n\}_{n\in N}$是最优的。

由定义和估计（4.2）可见：若$\|1-L_n(1)\|_{C_{2\pi}}=o(n^{-2})$（$n\to+\infty$），则$\{L_n\}_{n\in N}$是最优的当且仅当对每个$f'\in \mathrm{Lip}1$有

$$\|L_n(f)-f\|_{C_{2\pi}}=o(n^{-2}), \qquad (n\to+\infty).$$

明显地，若$\{L_n\}_{n\in N}$是三角卷积算子列，即对每个$n\in N$，$f\in C_{2\pi}$有

$$L_n(f)=(f*T_n)(x),$$

其中T_n是次数$\leqslant n$的正三角多项式且

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(t)dt=1,$$

则$L_n(1,x)=1$、因此由（4.8）导出，正三角卷积算子列$\{L_n\}_{n\in N}$是最优的当仅且

$$1-\alpha_{1n}=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt=O(n^{-2}).$$

例如，Jackson一松树算子列$\{J_{n,p,q}\}_{n\in N}$（$p\geqslant q\geqslant 2$）是最优的，因为这时对$f\in C_{2\pi}$有

$$J_{n,p,q}(f,x)=(f*K_{n,p,q})(x)$$

其中$K_{n,p,q}(t)=C_{n,p,q}\dfrac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q}\frac{t}{2}}$且选取$C_{n,p,q}$使得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{n,p,q}(t)dt=1.$$

在定理4.15的系1中已得到

$$1-\alpha_{1n}=\frac{2}{\pi}C_{n,p,q}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2p}\frac{n+1}{2}t}{\sin^{2q-2}\frac{t}{2}}dt\asymp n^{-2}$$

由上述可见，正三角卷积算子列$\{L_n\}_{n\in N}$是否最优，取决于其核函数的第一个Fourier系数

$$1-\alpha_{1n}=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt=O(n^{-2})$$

是否成立。因此为构造最优的三角卷积算子列，这引导我们考查如下极值问题：用$\pi_n^{(+)}$表示使得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(t)dt=1$$

且次数$\leqslant n$的非负三角多项式$T_n(t)$的全体。要求确定极小值

$$\min_{T_n\in\pi_n^{(+)}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt\right\} \tag{4.9}$$

并要求确定$T_n^*\in\pi_n^{(+)}$使得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n^*(t)dt=\min_{T_n\in\pi_n^{(+)}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt\right\}.$$

这个极值问题1916年首先被L. Fejèr解决，1958年P. P. Korovkin指出它在逼近论中的重要性。

P. P. Korovkin得到

定理4.37 设

$$K_n(t)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n+2}\cos\frac{n+2}{2}t}{\cos t-\cos\frac{\pi}{n+2}}\right)^2,$$

则$K_n\in\pi_n^{(+)}$且是极值问题（4.9）的解，即

$$\inf_{T_n\in\pi_n^{(+)}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}K_n(t)dt=\sin^2\frac{\pi}{2n+4}.$$

定理证明之前，我们回顾如下三角求积公式：设x_0是任意点，$x_k=x_0+\frac{2k\pi}{n}$（$k=0,1,2,\cdots,n-1$），若T是次数$\leqslant n-1$的三角多项式，则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T(x_k) \tag{4.10}$$

定理的证明，首先取节点

$$x_k=\frac{\pi}{n+2}+\frac{2k\pi}{n+2},\ k=-\left[\frac{n+3}{2}\right],\cdots,-1,0,1,2,\cdots\left[\frac{n}{2}\right].$$

由于K_n是次数$\leqslant(n+1)$的三角多项式，且节点x_k都是$\cos\frac{n+2}{2}t$的零点，所以求积公式（4.10）导出

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=\frac{1}{n+2}K_n(x_0)=1.$$

其次，对任何$T_n\in\pi_n^{(+)}$，由于$\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)$是次数$\leqslant n+1$的三角多项式，所以由(4.10)有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt=\frac{2}{n+2}\sum_{k=-[\frac{n+3}{2}]}^{[\frac{n}{2}]}\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2n+4}T_n\left(\frac{2k+1}{n+2}\pi\right)$$

$$\geqslant\left(\sin^2\frac{\pi}{2(n+2)}\right)\frac{2}{n+2}\sum_{k=-[\frac{n+3}{2}]}^{[\frac{n}{2}]}T_n\left(\frac{2k+1}{2n+1}\pi\right)$$

$$\geqslant\left(\sin^2\frac{\pi}{2n+4}\right)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(t)dt=\sin^2\frac{\pi}{2n+4} \qquad (4.11)$$

所以有

$$\inf_{T_n\in\pi_n^{(+)}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt\right\}\geqslant\sin^2\frac{\pi}{2n+4}$$

另一方面，对K_n应用求积公式(4.10)，并注意到当$k\neq0$，1 时，有$K_n\left(\frac{(2k+1)}{n+2}\pi\right)=0$，得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}K_n(t)dt=\left(\sin^2\frac{\pi}{2n+4}\right)\left(\frac{\pi}{n+2}\right)\left(K_n\left(\frac{-\pi}{n+2}\right)+K_n\left(\frac{\pi}{n+2}\right)\right)$$

$$=\sin^2\frac{\pi}{2n+4}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=\sin^2\frac{\pi}{2n+4} \qquad (4.12)$$

因此由(4.11)和(4.12)得到

$$\inf_{T_n\in\pi_n^{(+)}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}K_n(t)dt=\sin^2\frac{\pi}{2n+4} \qquad (4.13)$$

证毕。

由于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}K_n(t)dt=\sin^2\frac{\pi}{2n+4}\asymp n^{-2}$$

所以由极值问题(4.9)的解K_n构作的正三角卷积算子列：$U_n(f)=f*K_n$是最优的，即Feje'r—Korovkin 算子列$\{U_n\}_{n\in N}$，是最优的。

进而，Korovkin 给出了最优的正三角卷积算子列的一般构造方法：设$\phi\in C[0,1]$使得对每个$n\in N$

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}\phi^2\left(\frac{k}{n}\right)>0 \tag{4.14}$$

则函数

$$T_n(x)=\frac{1}{2}C_n^{-1}\left|\sum_{k=0}^{n}\phi\left(\frac{k}{n}\right)e^{ikx}\right|^2 \tag{4.15}$$

是次数≤n的非负三角多项式，由 T_n 产生的正三角卷积算子列：

$$L_n(f)=(f*T_n)(x) \tag{4.16}$$

在关于 ϕ 的一定条件下是最优的。我们有

定理4.13 设 $\phi\in[0,1]$ 且对某个 $M>0$ 有 $\phi\in \mathrm{Lip}_M 1$．若 $\int_0^1\phi^2(t)dt>0$ 且 $\phi(0)=\phi(1)=0$，则由（4.16）定义的正三角卷积算子列 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是最优的。

证明 因为

$$T_n(x)=\frac{1}{2}C_n^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\phi\left(\frac{k}{n}\right)e^{ikx}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\phi\left(\frac{k}{n}\right)e^{-ikx}\right)$$

所以

$$\alpha_{1n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos t T_n(t)dt=C_n^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\phi\left(\frac{k}{n}\right)\phi\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

因此，有

$$n^2(1-\alpha_{1n})=C_n^{-1}n^2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\phi^2\left(\frac{k}{n}\right)-\phi\left(\frac{k}{n}\right)\phi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)$$

$$=C_n^{-1}n^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\phi\left(\frac{k}{n}\right)-\phi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)^2 \tag{4.17}$$

在推导上述等式中，曾经利用过 $\phi(0)=\phi(1)=0$ 这个事实。

由于 $\phi\in \mathrm{Lip}_M 1$，则对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 有

$$\left|\phi\left(\frac{k}{n}\right)-\phi\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{n}$$

所以由（4.17）导出

$$n^2(1-\alpha_{1n})\leq\frac{1}{2}M^2nC_n^{-1}=\frac{1}{2}M^2\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\phi^2\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{-1} \tag{4.18}$$

注意到 $\int_0^1\phi^2(t)dt>0$，我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\phi^2\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\phi^2(t)dt>0$$

因此由（4.18）存在正常数 C 使得对 $\forall n\in N$ 有

$$n^2(1-\alpha_{1,n})\leqslant C\left(\int_0^1 \phi^2(t)dt\right)^{-1} ,$$

即

$$1-\alpha_{1,n}=O(n^{-2}).$$

故得正三角卷积算子列 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是最优的。证毕

特别地，取 $\phi(t)=1-2\left|t-\frac{1}{2}\right|$ 时，导出 Jackson 算子，而取 $\phi(t)=\sin\pi t$ 时，则导导出 Fejér—Kor onkin 算子。

4.2 最优正三角多项式算子列的饱和问题.

设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是最优的正三角多项式算子列，则有 $\|1-L_n(1)\|_{C_{2\pi}}=o(n^{-2})$ 和 $\|\tau_k-L_n(\tau_k)\|_{C_{2\pi}}=O(n^{-2})$ $(k=1,2)$，且

$$\|\tau_k-L_n(\tau_k)\|\neq o(n^{-2}) \qquad (k=1,2)$$

至少有一个成立。因此自然要问是否存在非常数的 $f_0\in C_{2\pi}$ 使得

$$\|f_0-L_n(f_0)\|_{C_{2\pi}}=o(n^{-2})?$$

换句话说，是否任何最优的正三角多项式算子列都具有饱和阶 n^{-2} 呢？

对于一般的正三角多项式算子列这个问题尚未解决，但当 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是三角卷积算子列时，问题借助于如下引理得到肯定的回答。

引理4.28 存在常数 $C_0>0$ 使得对 $\forall$ 正整数 n,k 且 $n\geqslant k>1$ 和 $\forall\ T_n\in\pi_n^{(+)}$ 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}T_n(t)dt\geqslant C_0\frac{k^2}{n^2}. \tag{4.19}$$

证明 记 $h(x)=|\sin x|$，引理4.27断定

$$E_n^*(|\sin x|)\geqslant\frac{1}{2\pi(2n+1)}$$

设 t_n 是使得 $\|h-t_n\|_{C_{2\pi}}=E_n^*(h)$ 的n次三角多项式，则由 Chebyshev 定理 $h-t_n$ 在 $[-\pi,\pi]$ 中至少有 $2n+2$ 个不同点交错地达到它的最大值和最小值。

对 $k\in N$，令 $h_k(x)=h(kx)$，和 $t_{nk}(x)=t_n(kt)$，则 h_k-t_{nk} 在 $[-\pi,\pi]$ 中至少有 $2(n+1)k\geqslant 2nk+2$ 个交错地达到最小值和最大值，于是 t_{nk} 是 h_k 次数 $\leqslant nk$ 的最佳逼近三角多项式，因此有

$$E_{nk}^*(|\sin kx|)=\|h_k-t_{nk}\|_{C_{2\pi}}=\|h(kx)-t_n(kx)\|_{C_{2\pi}}=E_n^*(|\sin x|)\geqslant\frac{1}{2(2n+1)\pi}.$$

现在设 $m\geqslant k$ 的任何整数，选取 $n\geqslant1$ 使得 $nk\leqslant m\leqslant(n+1)k$，则有

$$E_m^*(|\sin kx|)\geqslant E_{k(n+1)}^*(|\sin kx|)\geqslant\frac{1}{2(2n+3)\pi}=\frac{k}{4\pi nk}\frac{2n}{2n+3}\geqslant\frac{k}{8n\pi k}\geqslant\frac{k}{8\pi m} \tag{4.20}$$

由于对每个 $n\in N$，和 $T_n\in\pi_n^{(+)}$，则 $h_k * T_n$ 是次数≤n的三角多项式，于是当 $n\geq k$ 时，由（4.20）导出

$$\|h_k-h_k*T_n\|_{C_{2\pi}}\geq\frac{k}{8\pi n}$$

从而有

$$\frac{k}{8\pi n}\leq\|h_k-h_k*T_n\|_{C_{2\pi}}=\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(|\sin kt|-|\sin kx|\right)T_n(x-t)dt\right\|$$

$$\leq\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin kt-\sin kx\right|T_n(x-t)dt\right\|$$

$$=\left\|\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos k\frac{x+t}{2}\sin k\frac{x-t}{2}\right|T_n(x-t)dt\right\|\leq\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin k\frac{x-t}{2}\right|T_n(t)dt.$$

利用 Cauchy—Schwarz 不等式导出

$$\frac{k}{16\pi n}\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin k\frac{s-t}{2}\right|T_n(t)dt\leq\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}T_n(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此得到，对∀整数 $n\geq k\geq1$ 和 $\forall T_n\in\pi_n^{(+)}$ 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}T_n(t)dt\geq\left(\frac{1}{16\pi}\right)^2\frac{k^2}{n^2}$$

所以取 $C_0=(16\pi)^{-2}$ 得到（4.19）。证毕

如下 P. C. Curtis 定理断言，若 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是最优的正、偶三角卷积算子列，则其饱和阶为 n^{-2}。

定理4.39（Curtis） 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是正三角卷积算子列，即对每个 $n\in N$ 和 $f\in C_{2\pi}$ 有

$$L_n(f)=f*T_n$$

其中 $T_n\in\pi_n^{(+)}$ 且偶性。若 $f\in C_{2\pi}$ 且

$$\lim_{n\to\infty}n^2\|f-L_n(f)\|_{C_{2\pi}}=0$$

则 $f=$ 常数。

证明　由于

$$\lim_{n\to\infty}n^2\|f-L_n(f)\|_{C_{2\pi}}=0 \tag{4.21}$$

所以存在子列 $\{n_j\}$ 使得

$$\lim_{j\to+\infty}n_j^2\|f-L_{n_j}(f)\|_{C_{2\pi}}=0$$

因此由 Fourier 技巧得到，当 $j\to+\infty$ 时有

$$n_j^2\hat{f}(k)(1-2\hat{T}_{n_j}(k))=o(1)$$

由引理4.28并注意到T是偶的，当$n_j \geqslant k \geqslant 1$时有

$$1-2\widehat{T_{n_j}}(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}T_{n_j}(t)dt \geqslant C_0\frac{k^2}{n_j{}^2},$$

其中$C_0=(16\pi)^{-2}$，因此对每个$k\in N$有

$$k^2\hat{f}(k)=0$$

从而对$k\in N$有$\hat{f}(k)=0$，即$f\equiv$const。证毕

特别地，若$\{L_n\}_{n\in N}$是最优的，则

$$1-2\widehat{T_n}(1)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt \asymp n^{-2}$$

因此得到

推论4.24 若$\{L_n\}_{n\in N}$是最优的正、偶三角卷积算子列，则$\{L_n\}_{n\in N}$在$C_{2\pi}$上关于阶$\{n^{-2}\}$是饱和的。

对于非偶的正三角卷积算子，利用作者建立的定理4.27得到如下点态的Cürtis定理。

定理4.40 设$\{L_n\}_{\in N}$是正三角卷积算子列（不一定是偶的），且对每个$k\in N$有

$$\beta_{2k,n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2kt T_n(t)dt=o(n^{-2}) \tag{4.22}$$

若$f\in C_{2\pi}$且对每个$x\in[-\pi, \pi]$有

$$\underset{n\to\infty}{\text{Lim}}\, n^2|f(x)-L_n(f, x)|=0 \tag{4.23}$$

则$f\equiv$const。

证明 由引理4.28，对任何整数$n\geqslant k\geqslant 1$有

$$1-\alpha_{k,n}=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}T_n(t)dt \geqslant C_0\frac{k^2}{n^2}$$

其中$C_0=(16\pi)^{-2}$。又有（4.22）有$\beta_{2k,n}=o(n^{-2})$，因此取$\varphi(n)=n^{-2}$得到，对每个$k\in N$有

$$\psi_{2k}=\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\, n^2\left|1-\alpha_{2k,n}-|\beta_{2k,n}|\right| \geqslant 4C_0k^2>0,$$

所以利用定理4.27得到，若$f\in C_{2\pi}$且适合条件（4.23），则$f\equiv$const。证毕

R.A.DeVore得到如下饱和定理，给出最优的正偶三角卷积算子列饱和类的分析特征。

定理4.41 设$\{L_n\}_{n\in N}$是最优的正、偶三角卷积算子列，则其饱和类

$$F_\infty(L_n)=\text{Lip}^*2$$

证明 设对每个$n\in N$和$f\in C_{2\pi}$，有

$$L_n(f)=(f*T_n)(x)$$

其中$T_n \in \pi^{(+)}_{\alpha n+\beta}$且是偶的，则由引理4.28得到，对任意整数$n \geqslant k \geqslant 1$，有

$$1-\alpha_{kn}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}T_n(t)dt \geqslant C_0\frac{k^2}{(\alpha n+\beta)^2} \geqslant C\frac{k^2}{n^2}.$$

又因为$\{L_n\}_{n\in N}$是最优的，所以有

$$1-\alpha_{1n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}T_n(t)dt \asymp n^{-2}$$

因此存在正数C，使得对每个$k\in N$，存在自然数$n \geqslant N(k)$时，有

$$\frac{1-\alpha_{kn}}{1-\alpha_{1n}} \geqslant Ck^2,$$

即$\{L_n\}_{n\in N}$适合广义 Turesky 等价条件，故由定理4.16导出

$$F_\infty(L_n)=\mathrm{Lip}^*2.$$

特别地有

推论4.25 设$\{U_n\}_{n\in N}$是 Fejèr—Korovkin 算子列，则$\{U_n\}_{n\in N}$在$C_{2\pi}$上关于阶$\{n^{-2}\}$是饱和的，且饱和类$F_\infty(U_n)=\mathrm{Lip}^*2$。

推论4.26 设$\{L_n\}_{n\in N}$是由（4.16）确定的正、偶三角卷积算子列，若适合定理4.38中的条件，则$\{L_n\}_{n\in N}$在$C_{2\pi}$上关于阶$\{n^{-2}\}$是饱和的，且饱和类$F_0(L_n)=\mathrm{Lip}^*2$。

4.8 拟最优正三角卷积算子的饱和问题

在最优正三角多项式算子列的定义中，我们要求$\|1-L_n(1)\|_{C_{2\pi}}=o(n^{-2})$且对$k=1,2$，有

$$\|\tau_k-L_n(\tau_k)\|_{C_{2\pi}}=O(n^{-2}). \qquad (4.24)$$

现在我们减弱条件（4.24）为只要求存在非常数的$f_0\in C_{2\pi}$使得，

$$\|f_0-L_n(f_0)\|_{C_{2\pi}}=O(n^{-2}) \qquad (4.25)$$

这时我们称$\{L_n\}_{n\in N}$是拟最优的。

明显地，最优的正三角多项式算子列，必然是拟最优的，但反之未必成立，例如，设K_n是 Jackson 核函数，对$f\in C_{2\pi}$令

$$\overline{L}_n(f,x)=(f*\overline{K}_n)(x) \qquad (4.26)$$

其中

$$\overline{K}_n(t)=\left(1-\frac{1}{n}\right)K_n(t)+\frac{1}{2n}\left(K_n(t-\pi)+K_n(t+\pi)\right)$$

则$\{\overline{L}_n\}_{n\in N}$是拟最优的但非最优的，事实上，由于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\overline{K}_n(t)dt \geqslant \frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}K_n(t-\pi)dt=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{t+\pi}{2}K_n(t)dt$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{3}{4n^3}+O(n^{-4})\neq O(n^{-2})$$

所以 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是非最优的，但是取 $f_0(t)=\cos 2t$ 得到

$$\|f_0-\overline{L}_n(f)\|_{C_{2\pi}}=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos 2x-\cos 2t)\overline{K}_n(t-x)dt\right|\leqslant\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\overline{K}_n(t)dt.$$

由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 tK_n(t-\pi)dt-\sin^2\pi=O(n^{-2})$$

又因 $\sin^2 t\in Lip^*2$，类似地有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 tK_n(t+\pi)dt=O(n^{-2})$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\overline{K_n}(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 tK_n(t)dt+O(n^{-2})=O(n^{-2})$$

可见 $\{\overline{L_n}\}_{n\in N}$ 是拟最优的。

对于拟最优的正、偶三角卷积算子列，DeVore 建立了如下饱和定理。

定理4.42 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是拟最优的正、偶三角卷积算子列，即对每个 $n\in N$ 和 $f\in C_{2\pi}$ 有 $L_n(f)=f*T_n$，其中 T_n 是次数 $\leqslant n$ 的非负、偶性三角多项式，则存在正整数 m 使得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{mt}{2}T_n(t)dt=O(n^{-2})\tag{4.48}$$

且 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $C_{2\pi}$ 关于阶 $\{n^{-2}\}$ 是饱和的，而饱和类

$$F_{\infty}(L_n)=\left\{f\mid f\in C_{\frac{2\pi}{m_0}}\text{ 且 }f\in Lip^*2\right\}$$

其中 m_0 是使(4.48)成立的最小整数。

证明 由于 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是拟最优的，所以存在 $f_0\neq$ 常数，（即存在 $m\in N$ 使得 $\widehat{f_0}(m)\neq 0$），使得

$$\|f_0-L_n(f_0)\|_{C_{2\pi}}=O(n^{-2})$$

因此由 Fourier 技巧导出

$$\widehat{f_0}(k)\left(1-2\widehat{T_n}(k)\right)=O(n^{-2})\tag{4.49}$$

因为 $\widehat{f_0}(m)\neq 0$，所以必有

$$1-2\widehat{T_n}(m)=O(n^{-2})$$

注意到 T_n 是偶的，故得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{mt}{2}T_n(t)dt=O(n^{-2}).$$

设 m_0 是使上式成立的最小正整数，则对 $1\leqslant k<m_0$ 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{kt}{2}T_n(t)dt\right)=+\infty.$$

或

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2(1-2\hat{T}_n(k))=+\infty \qquad (4.50)$$

所以由引理4.28和（4.48）导出，当 $n>m_0k>1$ 时有

$$1-2\hat{T}_n(m_0k)\geqslant C_0\frac{m_0^2k^2}{n^2}\geqslant Ck^2(1-2\hat{T}_n(m)).$$

可见对每个 $k\in N$ 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1-2\hat{T}_n(m_0k)}{1-2\hat{T}_n(m_0)}\geqslant Ck^2 \qquad (4.51)$$

又由（4.50）和（4.51），类似于引理4.14的证明得到对 $k\not\equiv 0\,(\bmod\, m)$ 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1-2\hat{T}_n(k)}{1-2\hat{T}_n(m_0)}=+\infty \qquad (4.52)$$

于是由定理4.22导出由（4.47）确定的正、偶三角卷积算子列 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $C_{2\pi}$ 上关于阶 $\{n^{-2}\}$ 是饱和的，且饱和类

$$F_\infty(L_n)=\left\{f\,|\,f\in C_{\frac{2\pi}{m_0}}\text{ 且 }f\in \mathrm{Lip}^*2\right\}.$$

4.4 最优正多项式算子列

设 L_n 是 $C[a,b]$ 到 $C[c,d]$ 内的正线性算子，其中 $[c,d]\subset[a,b]$，用 P_n 表示次数 $\leqslant n$ 的多项式全体，若存在 $\alpha\geqslant 1$、$\beta\geqslant 0$ 使得对 $n\in N$ 和 $f\in C[a,b]$ 有 $L_n(f,x)\in P_{\alpha n+\beta}(x\in[c,d])$，则说 L_n 是正多项式算子，记作 $L_n\in P_{\alpha n+\beta}$。

P. P. Korovkin 首先指出，正多项算子列的逼近度与正三角多项式算子列一样也受 n^{-2} 所局限，我们有

定理4.43 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C[a,b]$ 到 $C[c,d]$ 内正线性算子列，且 $L_n\in P_{\alpha n+\beta}$，则

$$\|e_k-L_n(e_k)\|_{C[c,d]}\neq o(n^{-2}),\qquad k=0,1,2. \qquad (4.53)$$

至少有一个不成立，其中 $e_k(x)=x^k$

证明 采用反证法，若对 $k=0,1,2$ 有

$$\|e_k-L_n(e_k)\|_{C[c,d]}=o(n^{-1})$$
则由G. Freud量化定理推出，对每个$f\in \mathrm{Lip}1$有。
$$\|L_n(f)-f\|_{C[c,d]}=o(n^{-1})$$
特别地，由于$f_0(x)=\left|x-\frac{c+d}{2}\right|\in \mathrm{Lip}1$ $(x\in[a, b])$，所以有
$$\|L_n(f_0)-f_0\|_{C[c,d]}=o(n^{-1}) \tag{4.54}$$
另一方面，因为$f_0\in \mathrm{Lip}1$，所以有常数$C_0>0$使得
$$E_n(f_0)=\inf_{p_n\in P_n}\|f_0-p_n\|_{C[c,d]}>\frac{C_0}{n},$$
和$L_n(f_0, x)\in P_{n\alpha+\beta}$, $(x\in[c, d])$。因此有
$$\|f_0-L_n(f_0)\|_{C[c,d]}\geqslant E_{n\alpha+\beta}(f_0)>\frac{C_0}{n\alpha+\beta}>\frac{C_1}{n},$$
其中C_1是正常数，这与(4.54)矛盾。证毕

由于我们将证明，对正线性算子列$\{L_n\}_{n\in N}$，若$k=0$, 1有
$$\|e_k-L_n(e_k)\|_{C[c,d]}=O(n^{-2}),$$
则有
$$\|e_2-L_n(e_2)\|_{C[c,d]}\neq o(n^{-2}).$$
所以对于正多项式算子的约束(4.53)中最本质的自然是
$$\|e_2-L_n(e_2)\|_{C[c,d]}\neq o(n^{-2}).$$
这个事实启发我们引入如下定义：设$\{L_n\}_{n\in N}$是$C[a, b]$到$C[c, d]$内正多项式算子列，若对$k=0$, 1有
$$\|e_k-L_n(e_k)\|_{C[c,d]}=o(n^{-2})$$
且
$$\|e_2-L_n(e_2)\|_{C[c,d]}=O(n^{-2})$$
则说$\{L_n\}_{n\in N}$在$[c,d]$上是最优的。

由G. Freud量化定理导出，若$\{L_n\}_{n\in N}$在$[c, d]$上是最优的正多项式算子列，则对每个$f\in C[a, b]$有
$$\|f-L_n(f)\|_{C[c,d]}\leqslant C(n^{-2}+\omega_2(f, n^{-1})).$$
特别地，对$f'\in \mathrm{Lip}1$，有
$$\|f-L_n(f)\|_{C[c,d]}=O(n^{-2}).$$
明显地，正多项算子列的“最优”性只是一种局部性质。

为了构造最优的多项式卷积算子列，需要回顾熟知的Gauss求积公式：设非负函数$w\in L_1[-1,1]$且$\int_{-1}^{1}w(x)dx>0$，又设$\{Q_n\}_{n\in N}$是关于函数w的正交多项式列，即$Q_n\in P_n$且

$$\int_{-1}^{1} w(x)Q_i(x)Q_j(x)dx=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

设 $x_{k,2n}$ (k=±1，±2，…，±n）为 $Q_{2n}(x)$ 在（−1，1）内不同的零点，且有

$$-1<x_{-n,2n}<\cdots<x_{-1,2n}<x_{1,2n}<\cdots<x_{n,2n}<1.$$

而 $\{x_{k,2n+1}\}$) k=0，±1，…，±n）为 $Q_{2n+1}(x)$ 在（−，1）内的不同零点，且有

$$-1<x_{-n,2n+1}<\cdots<x_{-1,2n+1}<x_{0,2n+1}<x_{1,2n+1}<\cdots<x_{n,2n+1}<1.$$

特别当权函数 w 在〔−1，1〕是偶的，则 $Q_n(x)$ 的零点关于原点是对称的，即对 k=1，2，…，n 有，

$$x_{k,2n}=x_{-k,2n};\quad x_{k,2n+1}=x_{-k,2n+1}$$

和 $x_{0,2n+1}=0$。

若取 $w(x)\equiv1$ $(x\in[-1,1])$，即得到 Legendre 正交多项式列 $\{p_n(x)\}$，设 $x_{k,2n}$（k=1，2，…，n）是 2n 次 Legenedr 多项式 $P_{2n}(x)$ 在（0，1）内的零点，则有

$$\cos\frac{n+1-k}{2n+1}\pi<x_{k,2n}<\cos\frac{n+\frac{1}{2}-k}{2n}\pi \tag{4.55}$$

类似地，设 $\{x_{k,2n+1}\}$ (k=1，2，…，n）是 2n+1 次 Legendre 多项式的零点，则有

$$\cos\frac{n+1-k}{2n+2}\pi<x_{k,2n+1}<\cos\frac{n+\frac{1}{2}-k}{2n+1}\pi \tag{4.56}$$

以正交多项式 Q_n 的零点作节点得到如下 Gauss 求积公式：存在正常数 $A_k(2n)$（k=±1，…，±n）使得对每个 $p\in P_{4n-1}$ 有

$$\int_{-1}^{1} w(x)p(x)dx=\sum_{k=-n}^{n}{}' A_k(2n)p(x_{k,2n}) \tag{4.57}$$

其中 $\sum\limits_{k=-n}^{n}{}'$ 表示 $k\neq0$，类似地，存在正常数 $A_k(2n+1)$ (k=0，±1，±2，…，±n) 使得对每个 $p\in P_{4n+1}$ 有

$$\int_{-1}^{1} W(x)p(x)dx=\sum_{k=-n}^{n} A_k(2n+1)p(x_{k,2n+1}) \tag{4.58}$$

通常称 $A_k(n)$ 为 Gauss 求积公式的 Cotes 数。

设 p 是次数 ≤n 的非负多项式且 $\int_{-1}^{1}p(t)dt=1$，记作 $p\in P_n^{(+)}$。对每个 $p_n\in P_n^{(+)}$ 和 $f\in C\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，引入正多项式卷积算子

$$L_n(f,x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)p_n(t-x)dt.$$

我们知道 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在〔$-\delta$，δ〕$\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$ 上的局部逼近度是由二阶矩量

$$\alpha_n^2=\int_{-1}^{1}t^2p_n(t)dt.$$

所控制，因此要使正多项式卷积算子列 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $[-\delta,\ \delta]$ 上是最优的，必须有

$$\alpha_n=O(n^{-1})$$

而为保证对 e_0，e_1 的逼近阶为 $o(n^{-2})$，则要求对每个 $0<\delta<\frac{1}{2}$ 有

$$\int_{S_\delta}p_n(t)dt=o(n^{-2})\qquad (n\to+\infty),$$

其中 $S_\delta=[-1,\ 1]\setminus\left[-\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}-\delta\right]$ 或等价地，要求四阶矩有

$$\int_{-1}^{1}t^4p_n(t)dt=o(n^{-2})\qquad (n\to+\infty).$$

为此，我们考察如下极值问题：确定

$$\min_{p\in P_n^{(+)}}\int_{-1}^{1}t^2p(t)dt$$

的值和极值多项式。应用 Gauss 求积公式，类似于 Fejér—Korovkin 定理的论证得到

定理4.29 对 $n\in N$ 令

$$\lambda_n(t)=C_n\left(\frac{P_{2n}(t)}{t^2-x_{1,2n}^2}\right)^2$$

其中 P_{2n} 是 2n 次 Legendre 多项式，$x_{1,2n}$ 是它的最小正零点，而规范化常数 C_n 使得

$$\int_{-1}^{1}\lambda_n(t)dt=1.$$

则 $\lambda_n\in P_{4n-4}^{(+)}$ 且对 $\forall\ Q\in P_{4n-2}^{(+)}$ 有

$$\int_{-1}^{1}t^2Q(t)dt\geqslant\int_{-1}^{1}t^2\lambda_n(t)dt=x_{1,2n}^2,$$

或

$$\min_{Q\in P_{4n-2}^{(+)}}\int_{-1}^{1}t^2Q(t)dt=\int_{-1}^{1}t^2\lambda_n(t)dt=x_{1,2n}^2\tag{4.59}$$

证明　设 $\{x_{k,2n}\}$ $(k=\pm1,\ \pm2\cdots\pm n)$ 是 Legendre 多项式 $P_{2n}(x)$ 的零点，则 $x_{-k,2n}=x_{k,2n}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots n)$ 且相应的Cotes 数 $A_k(2n)=A_{-k}(2n)$。对任何$Q\in P_{4n-2}^{(+)}$，则 $t^2Q\in P_{4n-1}$。于是由 Gauss 求积公式（4.57）（其中取 $w(x)=1$）得到

$$\int_{-1}^{1}t^2Q(t)dt=\sum_{k=1}^{n}x_{k,2n}^2A_k(2n)\big(Q(x_{k,2n})+Q(x_{-k,2n})\big)$$

$$\geqslant x_{1,2n}^2 \sum_{k=1}^{n} A_k(2n)\big(Q(x_{k,2n})+Q(x_{-k,2n})\big)$$

$$=x_{1,2n}^2 \int_{-1}^{1} Q(t)dt = x_{1,2n}^2,$$

其中利用 $x_{k,2n}^2 \geqslant x_{1,2n}^2$。

另一方面，由于 $\lambda_n \in P_{4n-4}^{(+)}$ 且 $\lambda_n(x_{k,2n})=0$（$k=\pm 2,\ \pm 3,\ \cdots \pm n$），所以，再次用 Gauss 求积公式（4.57）得到

$$\int_{-1}^{1} t^2 \lambda_n(t)dt = \sum_{k=1}^{n} x_{k,2n}^2 A_k(2n)\big(\lambda_n(x_{k,2n})+\lambda_n(x_{-k,2n})\big)$$

$$=x_{1,2n}^2 A_1(2n)\big(\lambda_n(x_{1,2n})+\lambda_n(x_{-1,2n})\big)$$

$$=x_{1,2n}^2 \sum_{k=1}^{n} A_k(2n)\big(\lambda_n(x_{k,2n})+\lambda_n(x_{-k,2n})\big)$$

$$=x_{1,2n}^2.$$

因此得到，对 $\forall Q \in P_{4n-4}^{(+)}$ 有

$$\int_{-1}^{1} t^2 Q(t)dt \geqslant \int_{-1}^{1} t^2 \lambda_n(tdt) = x_{1,2n}^2$$

从而（4.59）得证。

由（4.55）得到

$$x_{1,2n} \leqslant \cos\frac{n-\frac{1}{2}}{2n}\pi \leqslant \frac{\pi}{4n}$$

可见二阶矩

$$\int_{-1}^{1} t^2 \lambda_n(t)dt = O(n^{-2})$$

但是由计算可证，四阶矩

$$\int_{-1}^{1} t^4 \lambda_n(t)dt \neq o(n^{-2}),$$

所以由（4.59）得到的极值多项式 λ_n 所产生的正多项式卷积算子列在 $[-\delta,\ \delta]$ （$0<\delta<\frac{1}{2}$）上并非最优的。不过这种处理的思想启发我们，要产生最优的正多项式算子列，还需要将极值多项式 $\lambda_n(t)$ 原点邻近的一些零点消去，我们有

定理4.44 设 $n \in N$，令

$$\lambda_n^*(t)=C_n\left(\frac{P_{2n}(t)}{(t^2-x_{1,2n}^2)(t^2-x_{2,2n}^2)}\right)^2$$

其中 $x_{1,2n}$ 和 $x_{2,2n}$ 是 Legendre 多项式 P_{2n} 的两个最小正零点，而规范化常数 C_n 使得

$$\int_{-1}^{1}\lambda_n^*(t)dt=1.$$

对每个 $n\in N$ 和 $f\in C\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$，令

$$A_n(f,x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)\lambda_n^*(t-x)dt \qquad x\in\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right],$$

则正多项式卷积算子列 $\{A_n\}_{n\in N}$ 在 $[-\delta,\ \delta]$ 上是最优的，其中 $0<\delta<\frac{1}{2}$ 是任意的。

证明　类似于引理4.29的方法，由于 $\lambda_n^*\in P_{4n-6}^{(1)}$，所以利用 Gauss 求积公式得到二阶矩量

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}t^2\lambda_n^*(t)dt&=\sum_{k=1}^{n}2A_k(2n)x_{k,2n}^2\lambda_n^*(x_{k,2n})\\&\leqslant x_{2,2n}^2\left(2A_1(2n)\lambda_n^*(x_{1,2n})+2A_2(2n)\lambda_n^*(x_{2,2n})\right)\\&=x_{2,2n}^2\int_{-1}^{1}\lambda_n^*(t)dt=x_{2,2n}^2=O(n^{-2}).\end{aligned}$$

其中利用（4.55）导出，

$$x_{2,2n}<\cos\frac{n-\frac{3}{2}}{2}\pi.$$

其次，注意到 $t^4\lambda_n^*(t)\in P_{4n-4}$，所以由 Gauss 求积公式和（4.55）导出四阶矩量

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}t^4\lambda_n^*(t)dt&=\sum_{k=1}^{n}2A_k(2n)x_{k,2n}^4\lambda_n^*(x_{k,2n})\\&\leqslant x_{2,2n}^4=o(n^{-2}), \qquad (n\to+\infty).\end{aligned}$$

证毕

4.5 最优正多项式算子列的小 o 饱和定理

设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C[-1,\ 1]$ 上正多项式算列，若对每个 $\delta\in(0,\ 1)$，$\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $I_\delta=[-\delta,\ \delta]$ 上是最优的，明显地，对 $[-1,\ 1]$ 上的线性函数 $l(x)$ 必有

$$\|l-L_n(l)\|_{C[-\delta,\delta]}=o(n^{-2}).$$

自然要问，若 $f\in C[-1,\ 1]$，且对每个 $\delta\in(0,\ 1)$ 有

$$\|f-L_n(f)\|_{C[-\delta,\delta]}=o(n^{-2}).$$

是否可断定 f 在〔$-$，1〕上为线性函数呢？

为讨论这个问题，首先指出§3中使用的抛物线技巧是失效的，其原因是：若 f 是非线性函数，则由抛物线引理存在二次抛物 $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma(\alpha<0)$ 和 $y\in(-1,1)$ 使得 $Q(y)=f(y)$ 且对 $x\in[-1,1)$ 有

$$Q(x)\geqslant f(x),$$

即对 $\forall x\in[-1,1]$ 有

$$Q(x)=\alpha(x-y)^2+\beta(x-y)+f(y)\geqslant f(x).$$

由此导出

$$L_n(f,y)-f(y)\leqslant L_n(Q,y)-Q(y)=L_n(Q(t)-Q(y),\ y)+o(n^{-2})$$
$$\leqslant\alpha L_n((t-y)^2,\ y)+o(n^{-2}).$$

由于 $\alpha<0$，故得

$$0<L_n((t-y)^2,\ y)\leqslant\frac{1}{|\alpha|}|L_n(f,y)-f(y)|+o(n^{-2})=o(n^{-2}).$$

即当 $n\to\infty$ 有

$$L_n((t-y)^2,\ y)=o(n^{-2}) \tag{4.60}$$

但（4.60）与 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是最优的条件，对每个〔c，d〕⊂〔$-$1，1〕有

$$\|L_n((t-x)^2,\ x)\|_{C[c,d]}\neq o(n^{-2}) \tag{4.61}$$

并无矛盾，这里的问题是我们不能控制抛物线 Q 与 f 的接触点 $y\in(-1,1)$ 出现在(4.61)左端的最大值点。

若进一步假定 $f\in C^2(-1,1)$，由于 $y\in(-1,1)$ 使得

$$Q(y)-f(y)=\min_{x\in[-1,1]}(Q(x)-f(y)),$$

则必有 $Q'(y)-f'(y)=0$ 且 $Q''(y)-f''(y)>0$，即

$$f''(y)<Q''(y)=2\alpha<0$$

因为 $f\in C^2(-1,1)$，所以存在邻域 $G_\Delta=(y-\Delta,\ y+\Delta)$ 使得对 $\forall z\in G_\Delta$ 有 $f''(z)<2\alpha<0$。对每个 $z\in G_\Delta$，令

$$Q_z(x)=\alpha(x-z)^2+f'(z)(x-z)+f(z),$$

则对 $\forall x\in(-1,1)$ 有

$$Q_z(x)\geqslant f(x). \tag{4.62}$$

类似地，由（4.62）导出，对每个 $z\in G_\Delta$ 有

$$L_n((t-z)^2,\ z)=o(n^{-2}).$$

或

$$\|L_n((t-z)^2,\ z)\|_{C(G_\Delta)}=o(n^{-2}).$$

这与 $\{L_n\}_{n\in N}$ 的最优条件（4.61）矛盾。可见，若 $f\in C^2(-1,1)$，则对每个 $0<\delta<1$ 有

$$\|L_n(f)-f\|_{C[-\delta,\delta]}=o(n^{-2})$$

当且仅当 f 在〔$-$1,1〕上是线性的。

因此要证明在 $[-\delta, \delta]$ $(0<\delta<1)$ 上最优的正多项式算子列 $\{L_n\}_{n\in N}$ 的小 o 饱和定理，可以通过构造 $f_n\in C^2[-1,1]$ 使得在 $[-1,1]$ 上 f_n 一致收敛于 f，根据上面讨论，对每个 $f_n\in C^2[-1,1]$ 和 $\Delta_{y_n}>0$ 使得

$$\|L_n((t-z)^2, z)\|_{C(G_{\delta y_n})}=o(n^{-2})$$

其中 $G_{\delta y_n}=[y_n-\Delta_{y_n}, y_n+\Delta_{y_n}]$，所以我们需要细致地估计 $\|L_n((t-z)^2, z)\|_{C(G_{\delta y_n})}$。

本节的主要内容将证明：若 $\Delta_{y_n}\neq o(n^{-1})$，则有

$$\|L_n((t-z)^2, z)\|_{C(G_{\delta y_n})}\neq o(n^{-2}).$$

为此需要建立如下引理（证明参见 DeVore[7]）。

引理4.30 对 $\eta\in(-\pi, \pi)$ 和 $n\in N$，存在以 2π 为周期的偶函数 $g_n(\eta,x)\in Lip_1 1$，具有如下性质：对 $M^*>0$ 存在仅依赖有 M^* 的正数 c_1^*，c_2^* 使得只要对每个次数 $\leqslant n$ 的三角多项式T，只要

$$\|g_n(\eta,\cdot)-T(\cdot)\|_{C[-\pi,\pi]}\leqslant M^*n^{-1} \tag{4.63}$$

则有

$$\|g_n-T\|_{C(\eta-c_1^*n^{-1},\ \eta+c_1^*n^{-1})}\geqslant c_2^*n^{-1} \tag{4.64}$$

引理4.31 设 $0<\delta<1$，对 $x_0\in(-\delta, \delta)$ 和 $n\in N$，在 $[-1, 1]$ 上存在 $f_n(x_0, x)\in Lip_1 1$，具有如下性质：对 $M>0$，存在仅依赖于 δ，M的正常数 c_1，c_2 使得只要 $p\in P_n$ 且有

$$\|f_n-p\|_{C[-1,1]}\leqslant Mn^{-1} \tag{4.65}$$

则有

$$\|f_n-p\|_{C(x_0-c_1n^{-1},x_0+c_1n^{-1})}\geqslant c_2(1-x_0^2)^{\frac{1}{2}}n^{-1} \tag{4.66}$$

利用引理4.30和引理4.31分别给出正三角多项式算子列和正多项式算子列逼近度的局部估计，我们有

定理4.45 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C_{2\pi}$ 上正三角多项式算子列，若对 k=0、1、2 有

$$\|\tau_k-L_n(\tau_k)\|_{C_{2\pi}}=o(n^{-2}),$$

则存在正常数 c_1 和 c_2 使得对每个 $x_0\in(-\pi, \pi)$ 有

$$\left\|L_n\left(\sin^2\frac{t-x}{2}, x\right)\right\|_{C\left[x_0-\frac{c_1}{n},\ x_0+\frac{c_1}{n}\right]}\geqslant c_2n^{-1} \tag{4.67}$$

定理4.46 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C[-a, a]$ 上正多项算子列，若对 k=0，1，2 有

$$\|e_k-L_n(e_k)\|_{C[-a,a]}=o(n^{-2}),$$

则存在正常数 c_1，c_2 和自然数 N，使得对每个 $x_0\in(-\delta, \delta)$ $(0<\delta<a)$，当 $n>N$ 时有

$$\|L_n((t-x)^2, x)\|_{C[x_0-c_1n^{-1},x_0+c_1n^{-1}]}\geqslant c_2(a^2-x_0^2)n^{-\frac{1}{2}} \tag{4.68}$$

证明 我们仅证明定理4.46，并设 a=1，一般情况可通过从 $[-a, a]$ 到 $[-1, 1]$

的线性变换获得，为了简单起见，设 $L_n\in P_n$，由引理4.31，对 $\delta\in(0,1)$ 和 $x\in[-\delta,\delta]$ 存在 $f_n(x_0,x)\in Lip_1 1$ $(n>N)$，由G. Freud量化定理导出

$$\|f_n-L_n(f_n)\|_{C[-1,1]}\leqslant C(\|f_n\|n^{-2}+n^{-1})\leqslant 2Cn^{-1}$$

其中利用 $\|f_n\|\leqslant\frac{1}{2}(1-x_0^2)^{-\frac{1}{2}}\leqslant 1$。因此再由引理4.31对 $M=2C>0$ 存在仅依赖于 M，δ 的正常数 $\overline{c_1}$，$\overline{c_2}$ 使得，

$$\|f_n-L_n(f_n)\|_{C(x_0-\overline{c_1}n^{-1},\,x_0+\overline{c_1}n^{-1})}\geqslant\overline{c_2}(1-x_0^2)^{\frac{1}{2}}n^{-1}\tag{4.69}$$

另一方面，记

$$\mu_n=\left\|L_n((t-x)^2,\ x)\right\|_{C(x_0-\overline{c_1}n^{-1},\ x_0+\overline{c_1}n^{-1})}$$

因为在区间 $(x_0-\overline{c_1}n^{-1},\ x_0+\overline{c_1}n^{-1})$ 上有 $f_n\in Lip_1 1$，所以再次应用G. Freud量化定理得到

$$\|f_n-L_n(f_n)\|_{C(x_0-\overline{c_1}n^{-1},\,x_0+\overline{c_1}n^{-1})}\leqslant C(n^{-2}+\mu_n^{\frac{1}{2}})\tag{4.70}$$

因此由(4.69)和(4.70')得到，当 $n>N$ 时有

$$\overline{c_2}(1-x_0^2)^{\frac{1}{2}}n^{-1}\leqslant C(n^{-2}+\mu_n^{\frac{1}{2}})$$

两边平方得到

$$\mu_n\geqslant\overline{c}_2^{\,2}C^{-2}(1-x_0^2)n^{-2}-n^{-4}-2n^{-2}\mu_n^{\frac{1}{2}}.$$

因而令 $c_2=\frac{1}{2}\overline{c}_2^{\,2}C^{-2}$，则当 n 足够大时，有

$$n^{-2}+2\mu_n^{\frac{1}{2}}\leqslant c_2(1-\delta^2)\leqslant c_2(1-x_0^2)$$

所以当 n 充分大时，有

$$\mu_n\geqslant c_2(1-x_0^2)n^{-2}.$$

又取 $c_1=\overline{c_1}$ 导出，

$$\|L_n((t-x)^2,\ x)\|_{C(x_0-c_1n^{-1},\,x_0+c_1n^{-1})}\geqslant c_2(1-x_0^2)n^{-2}.$$

证毕

推论4.27 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C[-a,a]$ 上正多项式算子列的且对每个 $n\in N$，$L_n\in P_n$，若对 $k=0,1$ 有

$$\|e_k-L_n(e_k)\|_{C[-a,a]}=O(n^{-2})$$

则

$$\|e_2-L_n(e_2)\|_{C[-a,a]}\neq o(n^{-2})$$

证明　若不然，有

$$\|e_2-L_n(e_2)\|_{C[-a,a]}=o(n^{-2}) \tag{4.71}$$

于是由定理4.46存在正常数 c_1，c_2 使得当 $n>N$ 时有

$$\|L_n((t-x)^2,x)\|_{C(-c_1n^{-1},c_1n^{-1})}\geq c_2a^2n^{-2}.$$

另一方面，由条件导出

$$\|L_n((t-x)^2,x\|_{C(-c_1n^{-1},c_1n^{-1})}\leq\|L_n(e_2)-e_2\|_{C(-c_1n^{-1},c_1n^{-1})}$$

$$+2\frac{c_1}{n}\|L_n(e_1)-e_1\|_{C(-c_1n^{-1},c_1n^{-1})}+\frac{c_1^2}{n^2}\|e_0-L_n(e_0)\|_{C(-c_1n^{-1},c_1n^{-1})}$$

$$\leq\|L_n(e_2)-e_2\|_{C(-c_1n^{-1},c_1n^{-1})}+o(n^{-2})$$

从而得到

$$\|e_2-L_n(e_2)\|_{C[-a,a]}\geq C_2a^2n^2+o(n^{-2})$$

$$\|e_2-L_n(e_2)\|_{C[-a,a]}\neq o(n^{-2})$$

与假设成立（4.71）是矛盾的，证毕.

引理4.71 设 $f\in C^1(-1,1)$，用规定 f 在（$-\infty$，-1）和（1，$+\infty$）上为常数的方式拓广 f 使得 $f\in C(-\infty,+\infty)$. 对 $n\in N$ 令

$$f_n(x)=n^2\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}}\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}}f(x+u+v)\,du\,dv, \tag{4.72}$$

则序列 $\{f_n\}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 f. 若 $0<\delta<\delta'<1$，存在自然数 N 使得 $n>N$ 时 $f_n\in C^3[-1,1]$，且

$$\|f_n^{(3)}\|_{C(-\delta,\delta)}\leq n\varepsilon(n) \tag{4.73}$$

和

$$\|f'-f_n'\|_{C[-\delta,\delta]}\leq\frac{\varepsilon(n)}{2n} \tag{4.74}$$

其中

$$\varepsilon_n=\sup_{0<h\leq n^{-1}}\left(\frac{\|\triangle_h^2(f')\|_{C(-\delta',\delta')}}{h}\right)$$

证明 序列 $\{f_n\}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 f 是明显的. 其次证明（4.73），为此用 F_1 表示 f 的原函数，而 F_2 是 F_1 的原函数，则有

$$f_n(x)=n^2\left(F_2\left(x+\frac{1}{n}\right)+F_2\left(x-\frac{1}{n}\right)-2F_2(x)\right)$$

于是

$$f_n^{(3)}(x)=n^2\left(F_2^{(3)}\left(x+\frac{1}{n}\right)+F_2^{(3)}\left(x-\frac{1}{n}\right)-2F_2^{(3)}(x)\right)$$

$$=n^2\left(f'\left(x+\frac{1}{n}\right)+f'\left(x-\frac{1}{n}\right)-2f'(x)\right)$$

因此只要取 $N^{-1}<\delta'-\delta$，则当 $n\geqslant N$ 时，取范数并由 $\varepsilon(n)$ 的定义得到（4.73）。

最后证明（4.74），由于

$$f_n'(x)-f'(x)=n^2\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}}\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}}\left(f'(x+u+v)-f'(x)\right)dudv,$$

$$=\frac{n^2}{2}\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}}\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}}\left(f'(x+u+v)+f'(x-u-v)-2f'(x)\right)dudv.$$

对 $n>N$ 给出

$$\|f_n'-f'\|_{C[-\delta,\delta]}\leqslant\frac{n^2}{2}\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}}\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}}\varepsilon(n)|u+v|\,dudv\leqslant\frac{\varepsilon(n)}{2n}.$$

证毕。

下面引理是抛物线引理的精化，它更具有技巧性。

引理4.33 设 $f\in C[-1,1]$ 且对每个 $0<\delta<1$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上 f' 是光滑的（即 $\omega_2(f',t)=o(t)$，$t\to0^+$），f_n 是由（4.72）定义的，又设 $f(-1)=f(1)=0$，且 $f(x_0)>0$，则对 $c>0$ 存在自然数 N，$\alpha<0$ 和 $0<\delta_0<1$ 使得对每个 $n\geqslant N$，有点 $x_n\in(-\delta_0,\delta_0)$ 及抛物线

$$Q_n(x,y)=2(x-y)^2+f_n'(y)(x-y)+f_n(y)$$

具有如下性质：当 $x\in[-1,1]$ 和 $|y-x_n|<cn^{-1}$ 时有

$$Q_n(x,y)\geqslant f_n(x) \tag{4.75}$$

证明 首先选取充分接近于 1 的正数 δ_0 使得当 $x\notin(-\delta,\delta)$ 时有

$$|f(x)|<\frac{1}{3}|f(x_0)|.$$

因为由引理4.32，在 $[-1,1]$ 上序列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f，所以存在自然数 N_1 使得当 $n>N_1$ 时，对 $\forall x\notin(-\delta_0,\delta_0)$ 有

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{3}|f_n(x_0)|.$$

由抛物线引理，存在二次函数 $R(x)=\alpha_1(x-x_0)^2+\beta$（$\alpha_1<0$）使得对每个 $n\geqslant N$，和 $x\in[-1,1]$ 有

$$R(x)\geqslant f_n(x).$$

记 $m_n=\inf\limits_{|x|\leqslant1}(R(x)-f_n(x))$，且在 $x_n\in(-\delta_0,\delta_0)$ 点达到最小值，即 $m_n=R(x_n)-f(x_n)$。令

$$R_n(x)=R(x)-m_n,$$

则有 $R_n(x_n)=f_n(x_n)$ 且对 $x\in(-1, 1)$，有

$$R_n(x)\geqslant f_n(x). \tag{4.76}$$

因此 由 f_n' 的连续性导出

$$R_n(x)=\alpha_1(x-x_n)^2+f_n'(x_n)(x-x_n)+f_n(x) \tag{4.77}$$

现在令

$$Q_n(x, y)=\frac{1}{2}\alpha_1(x-y)^2+f_n'(y)(x-y)+f_n(y)$$

可以证明：当 n 充分大时，对 $x\in(-1, 1)$ 和 $|y-x_n|<cn^{-1}$ 有

$$Q_n(x, y)\geqslant f_n(x).$$

事实上，取 $\eta=\frac{1}{2}(1-\delta_n)$，利用序列 $\{f_n'\}$ 的等度连续性推出，存在自然数 $N_2\geqslant N_1$，使得当 $n\geqslant N_2\geqslant N_1$ 和 $|y-x_n|\leqslant cn^{-1}$，有，

$$|Q_n(x, y)-Q_n(x, x_n)|\leqslant|\frac{1}{2}\alpha_1\eta^2| \tag{4.78}$$

下面分两种情况讨论：若 $x\notin(-1+\eta, 1-\eta)$，则 $|x-x_n|\geqslant\eta$。于是对 $n\geqslant N_2$ 有

$$\begin{aligned}Q_n(x, y)&=Q_n(x, x_n)+(Q_n(x, y)-Q_n(x, x_n))\\&\geqslant\frac{\alpha_1}{2}(x-x_n)^2+f_n'(x_n)(x-x_n)+f_n(x_n)+\frac{1}{2}\alpha_1\eta^2\\&\geqslant\alpha_1(x-x_n)^2+f_n'(x_n)(x-x_n)+f_n(x_n)=R_n(x)\geqslant f_n(x),\end{aligned}$$

其中利用了（4.78），并注意到 $\alpha_1<0$ 和 $\eta^2\leqslant(x-x_n)^2$。

其次，若 $x\in(-1+\eta, 1-\eta)$，引入函数

$$h_n(x, y)=\frac{f_n(x)-f_n(y)-f_n'(y)(x-y)}{(x-y)^2},$$

明显地，我们只要证明当 $x\in(-1+\eta, 1-\eta)$ 和 $|y-x|<cn^{-1}$，对充分大的有

$$h_n(x, y)\leqslant\frac{1}{2}\alpha_1 \tag{4.79}$$

现设 x、$y\in\left(-1+\frac{\eta}{2}, 1-\frac{\eta}{2}\right)$，和 $\zeta<\frac{1}{4}\eta$，则存在自然数 $N_3\geqslant N_2$ 使得当 $n\geqslant N_3\geqslant N_2$ 时，有

$$\begin{aligned}|h_n(x+\zeta, y+\zeta)-h_n(x, y)|&=\frac{1}{(x-y)^2}\int_y^x\int_t^{t+\zeta}(f_n''(s)-f_n''(s+y+t))dsdt\\&\leqslant\frac{\zeta}{|x-y|}\omega(f_n'', |x-y|)\leqslant n\varepsilon(n)\zeta,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是由（4.73）导出的，因此当 $n\geqslant N_3$ 和 $\zeta<cn^{-1}$ 时有

$$|h_n(x+\zeta, y+\zeta)-h_n(x, y)|\leqslant c\varepsilon(n) \tag{4.80}$$

最后选取足够大的自然数 $N\geqslant N_3$ 使得 $c\varepsilon(n)<\frac{1}{2}|\alpha_1|$ 和 $cN^{-1}<\frac{1}{4}\eta$，则由（4.80）

对 $|y-x_n|<cn^{-1}$ 和 $x\in\left[-1+\frac{\eta}{2},\ 1-\frac{\eta}{2}\right]$ 有

$$h_n(x+y-x_n,\ y)\leqslant h_n(x,\ x_n)+\frac{1}{2}|\alpha_1|.$$

$$\leqslant\alpha_1+\frac{1}{2}|\alpha_1|\leqslant\frac{1}{2}\alpha_1,$$

或对 $|y-x_n|\leqslant cn^{-1}$，$z\in[-1+\eta,\ 1-\eta]$ 有

$$h_n(z,\ y)\leqslant\frac{\alpha_1}{2},$$

这就是（4.79），因而引理证毕.

应当指出，从引理4.33的证明中可见，δ_0 仅依赖于 f 而与 c 无关.

现在我们可以建立最优正多项式算子列的小o饱和定理.

定理4.47（DeVore） 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是多项式算子列，且对每个 $\delta\in(0,1)$ 在 $[-\delta,\ \delta]$ 上是最优的，若 $f\in C(-1,\ 1)$ 且

$$\|f-L_n(f)\|_{C[-\delta,\delta]}=o(n^{-2})\qquad(n\to+\infty),\tag{4.81}$$

则 f 在 $[-1,\ 1]$ 上是线性的.

证明 不失一般性可设 $f(-1)=f(1)=0$，因为若不然可以用减去一个在点 -1 和1插值为 f 的线性函数，而所得到的新函数仍然适合（4.81）.

由于 $L_n(f)\in P_{\alpha n+\beta}$，所以由（4.81）导出，$f$ 的最佳逼近 $E_n(f)=o(n^{-2})$. 因此由 Bernstein 定理可得 $f'\in C(-1,\ 1)$，且对每个 $\delta\in(0,\ 1)$，在 $[-\delta,\ \delta]$ 上 f' 是光滑的（即 $\omega_2(f',t)=o(t)$ $t\to0^+$）. 对 $t\in[-1,\ 1]$，依照（4.74）定义 f_n，并选取引理4.33中的 δ_0，由引理4.32得到

$$\|f_n-f\|_{C[-1,1]}=o(1),$$

$$\|f_n'-f'\|_{C[-\delta_0,\delta_0]}\leqslant\frac{\varepsilon(n)}{2n}\tag{4.82}$$

即 $f'-f_n'\in\mathrm{Lip}_{\frac{\varepsilon(n)}{2n}}1$. 因此由 G. Freud 量化定理有

$$\|f-f_n-L_n(f-f_n)\|_{C(-\delta_0,\delta_0)}\leqslant O(n^{-2})\left(\|f-f_n\|_{C[-1,1]}+\frac{\varepsilon(n)}{n}\right).$$

注意到 f' 在 $(-\delta_0,\ \delta_0)$ 上是光滑的，所以有 $\frac{\varepsilon(n)}{n}=o(1)$，因此得到

$$\|f-f_n-L_n(f-f_n)\|_{C[-\delta_0,\delta_0]}=o(n^{-2}).$$

所以由（4.81）导出

$$\|f_n-L_n(f_n)\|_{C(-\delta_0,\delta_0)}=o(n^{-2})$$

现在设 $f\in C(-1,\ 1)$，$f(-1)=f(1)=0$ 且适合（4.81）. 若存在 $x_0\in(-1,\ 1)$ 使得 $f(x_0)>0$，我们证明这将导致

$$\|f_s-L_n(f_s)\|_{C(-\delta_0,\delta_0)}\neq o(n^{-2})$$

引起矛盾。

由定理4.46 存在正常数 c_1、c_2 和自然数 N 使得对 $\forall x_n\in(-\delta_0,\delta_0)$，当 $n>N$ 时有

$$\|L_n((t-x)^2,x)\|_{C(x_n-c_1n^{-1},x_n+c_1n^{-1})}\geqslant c_2(1-x_n^2)^{\frac{1}{2}}n^{-2}.$$

又由引理4.33，对 $c_1>0$，存在正整数 N，$\alpha<0$ 使得对 $\forall x_n\in(-\delta_0,\delta_0)$，当 $n>N$ 时有

$$\|L_n((t-x)^2,x)\|_{C(x_n-c_1n^{-1},x_n+c_1n^{-1})}\geqslant c_2(1-x_n^2)^{\frac{1}{2}}n^{-2}.$$

又由引理4.33，对 $c_1>0$ 存在正整数N、$\alpha<0$ 使得对每个 $n\geqslant N$ 有 $x_n\in(-\delta_0,\delta_0)$ 及抛物线族

$$Q_n(x,y)=\alpha(x-y)^2+f_s'(y)(x-y)+f_s(y),$$

具有如下性质：当 $x\in(-1,1)$ 和 $|y-x_n|\leqslant c_1n^{-1}$ 时，有

$$Q_n(x,y)\geqslant f_s(x).$$

因此对 $|x_n-y|\leqslant c_1n^{-1}$ 中的 y 有

$$\begin{aligned}L_n(f_s,y)-f_s(y)&\leqslant L_n(Q_n(x,y),y)-Q_n(y,y)\\&\leqslant\alpha L_n((x-y)^2,y)+O(\|e_1-L_n(e_1)\|_{C(-\delta_0,\delta_0)})\\&\quad+O(\|e_2-L_n(e_2)\|_{C(-\delta_0,\delta_0)})\\&\leqslant\alpha L_n((x-y)^2,y)+o(n^{-2}).\end{aligned}$$

其中利用 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $(-\delta_0,\delta_0)$ 上是最优的条件。由于 $\alpha<0$，故得

$$\begin{aligned}&\|L_n(f_s)-f_s\|_{C(x_n-c_1n^{-1},x_n+c_1n^{-1})}\\&\qquad\geqslant|\alpha|\,\|L_n((t-y)^2,y)\|_{C\left(x_n-\frac{c_1}{n},x_n+\frac{c_1}{n}\right)}+o(n^{-2})\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\|L_n(f_s)-f_s\|_{C(-\delta_0,\delta_0)}&\geqslant\|L_n(f_s)-f_s\|_{C\left(x_n-\frac{c_1}{n},x_n+\frac{c_1}{n}\right)}\\&\geqslant|\alpha|\,\|L_n((t-y)^2,y)\|_{C\left(x_n-\frac{c_1}{n},x_n+\frac{c_1}{n}\right)}+o(n^{-2})\\&\geqslant|\alpha|c_2(1-x_n^2)^{\frac{1}{2}}n^{-2}+o(n^{-2})\geqslant|\alpha|c_2(1-\delta_0^2)^{\frac{1}{2}}n^{-2}+o(n^{-2})\end{aligned}$$

可见，

$$\|L_n(f_s)-f_s\|_{C(-\delta_0,\delta_0)}\neq o(n^{-2})$$

因而定理证毕。

由定理4.47推出如下结果。

推论4.28 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $C(-1,1)$ 上正多项式算子列，且在 $(-1,1)$ 上是最

优的，则 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $C[-1,1]$ 上关于阶 $\{n^{-2}\}$ 是饱和的。

证明　由于 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $[-1,1]$ 上是最优的，所以对每个 $\delta\in(0,1)$，在 $[-\delta,\delta]$ 上是最优的，因此由定理4.47导出，设 $f\in C[-1,1]$，则 $\|f-L_n(f)\|_{C[-1,1]}=o(n^{-2})$ 当且仅当 f 在 $[-1,1]$ 上是线性的，即小o饱和条件成立，其次，由于对每个 $f'\in Lip1$，都有 $\|L_n(f)-f\|_{C[-1,1]}=O(n^{-2})$，可见大O饱和条件也成立。证毕

§5 Lp空间正线性算子逼近的饱和理论

设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $L_p(a,b)$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 到 $L_p(c,d)$ 内的正线性算子列，其中 $-\infty\leqslant a\leqslant c<d\leqslant b\leqslant+\infty$，若存在 $\mu_n\to0^+(n\to+\infty)$ 和平凡类 $T(L_n)$ 使得对 $f\in L_p(a,b)$ 有

$$\|f-L_n(f)\|_{L_p[c,d]}=o(\mu_n)$$

当且仅当 $f\in T(L_n)$，则说 $\{L_n\}_{n\in N}$ 在 $[c,d]$ 上关于阶 $\{\mu_n\}$ 是 L_p 局部小o饱和的．特别地，若 $[c,d]=[a,b]$，则说 $\{L_n\}_{n\in N}$ 关于 $\{\mu_n\}$ 是 L_p 小o饱和的。这是本节要讨论的第一个问题。

其次，研究 $f\in L_p(a,b)$ 使得

$$\|f-L_n(f)\|_{L_p[c,d]}=O(\mu_n)$$

的充分和必要条件，通常称这类问题为 L_p 的大O饱和问题。

关于 L_p 空间正线性算子逼近的饱和理论的研究是最近十年出现和发展的.1978年V. Maier首先讨论 L_p 饱和问题，其思想方法是利用 Voronovskaja 渐近关系，建立 L_p 饱和类所应满足的积分方程，然后由积分方程的解揭示了饱和类的特征。

5.1 正代数卷积算子列的 L_p 局部饱和定理

设 $\{H_n(t)\}$ 是 $[-r,r]$ 上非负、偶的连续函数列且适合如下条件：

$$\int_{-r}^{r}H_n(t)dt=1 \tag{5.1}$$

$$\int_{-r}^{r}t^2H_n(t)dt=\mu_n\to0^+\qquad(n\to+\infty), \tag{5.2}$$

和

$$\int_{-r}^{r}t^4H_n(t)dt=O(\mu_n^2) \tag{5.3}$$

又设 $I=[0,r]$，对每个 $n\in N$，$f\in L_p(I)$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 和 $x\in[0,r]$ 令

$$K_n(f,x)=\int_0^r f(t)H_n(t-x)dt \tag{5.4}$$

明显地，K_n 是 $L_p(I)$ 到自身内的正线性算子。

顾及到定理4.44定义的算子A_n，作为由（5.4）定义的正代数卷积算子的特例，引入如下的 Bojanic—DeVore算子K_n^*：对每个$n\in N$，$f\in L_p[0, 1]$（$1\leqslant p<+\infty$）和$x\in[0, 1]$有

$$K_n^*(f, x)=\int_0^1 f(t)\lambda_n^*(t-x)dt$$

由定理4.44可见，非负、偶连续函数列$\{\lambda_n^*(t)\}$适合条件（5.1）—（5.3），即

$$\int_{-1}^1 \lambda_n^*(t)dt=1,$$

$$\mu_n=\int_{-1}^1 t^2\lambda_n^*(t)dt=O(n^{-2}),$$

和

$$\int_{-1}^1 t^4\lambda_n^*(t)dt=O(n^{-4}).$$

为建立$\{K_n\}_{n\in N}$的L_p饱和定理，需要如下引理。

引理4.34 对$n\in N$成立如下的结论

i) 对$x\in[0, r]$有

$$\int_0^r H_n(t-x)dt=K_n(e_0, x)\leqslant 1, \tag{5.5}$$

ii) 对$t\in[0, r]$有

$$\int_0^r H_n(t-x)dx\leqslant 1. \tag{5.6}$$

iii) 对$0<\delta\leqslant x\leqslant r-\delta<r$有

$$|K_n((t-x), x)|=O(\mu_n) \tag{5.7}$$

iv) 对$0<\delta\leqslant x\leqslant r-\delta<r$有

$$|K_n(e_0, x)-1|=O(\mu_n) \tag{5.8}$$

v) 对$x\in[0, r]$有

$$|K_n((t-x)^2, x)|\leqslant\mu_n, \tag{5.9}$$

则

$$K_n(|t-x|, x)\leqslant\mu_n^{\frac{1}{2}}. \tag{5.10}$$

vi) 对$k=0, 1$有

$$\|K_n(e_k)-e_k\|_{L_p[0,r]}=O\left(\mu_n^{\frac{1}{2p}}\right) \tag{5.11}$$

证明 i) 对$x\in[0, r]$有

$$K_n(e_0, x)=\int_0^r H_n(t-x)dt\leqslant\int_{-r}^r H_n(y)dy=1.$$

ii) 对 $t\in(0, r)$，有

$$\int_0^r H_n(t-x)dx=\int_{t-r}^t H_n(y)dy\leqslant 1.$$

iii) 由于 $H_n(t)$ 在 $(-r, r)$ 上是偶的，所以对 $0<\delta\leqslant x\leqslant r-\delta<r$，有

$$|K_n((t-x), x)|=\left|\int_0^r (t-x)H_n(t-x)dt\right|$$

$$=\left|\int_{-x}^{r-x} yH_n(y)dy\right|\leqslant\frac{\mu_n}{\delta},$$

即(5.7)证得

iv) 设 $x\in(0, r)$，则有

$$K_n(e_0, x)=1-\left(\int_{r-x}^r H_n(t)dt+\int_{-r}^{-x} H_n(t)dt\right)$$

若 $0<\delta\leqslant x\leqslant r-\delta<r$，则有

$$\left|K_n(e_0, x)-1\right|\leqslant\frac{2}{\delta^2}\int_{-r}^r t^2H_n(t)dt=\frac{2\mu_n}{\delta^2},$$

即(5.8)成立。

v)(5.9)成立是明显的，而(5.10)由 Schwarz 不等式和(5.9)导出。

vi) 由于对 $x\in(0, r)$ 有

$$\left|K_n(t-x, x)\right|=\left|\int_0^r (t-x)H_n(t-x)dt\right|=\left|\int_{-x}^{r-x} tH_n(t)dt\right|\leqslant r$$

因此当 $0<\delta<\frac{r}{2}$ 时，由(5.7)导出

$$\left(\int_0^r \left|K_n(t-x, x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant 2r\delta^{\frac{1}{p}}+r^{\frac{1}{p}}\frac{\mu_n}{\delta}.$$

特别取 $\delta=\mu_n^{\frac{1}{2}}$ 得到

$$\left(\int_0^r \left|K_n(t-x, x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=O\left(\mu_n^{\frac{1}{2p}}\right) \tag{5.12}$$

又因 H_n 是偶的，由(5.5)和(5.8)导出

$$\|K_n(e_0)-e_0\|_p\leqslant\left(\int_0^r\left(1-K_n(e_0, x)\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left[\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{r}\right)H_n(t)dtdx+\left(\int_0^{r-\delta}+\int_{r-\delta}^{r}\right)\int_{r-x}^{r}H_n(t)dtdx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[\delta+\int_{\delta}^{r}H_n(t)\int_0^{t}dxdt+\delta+\int_{\delta}^{r}H_n(t)\int_{r-t}^{r}dxdt\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[2\left(\delta+\frac{\mu_n}{\delta}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

选取 $\delta=\mu_n^{\frac{1}{2}}$ 得到

$$\|K_n(e_0)-e_0\|_p=O\left(\mu_n^{\frac{1}{2p}}\right)$$

因此由（5.12）导出

$$\|K_n(e_1)-e_1\|_p=O\left(\mu_n^{\frac{1}{2p}}\right)$$

证毕。

设 $0\leqslant a<a_1<b_1<b\leqslant r$，令

$$x(t)=\begin{cases}0, & t\in(a,\ b)\\ 1, & t\notin(a,\ b).\end{cases}$$

引理4.35 若 $f\in L_p(0,\ r)$（$1\leqslant p<+\infty$），则当 $n\to+\infty$ 时有

$$\|K_n(xf)\|_{L_1(a_1,b_1)}=o(\mu_n) \qquad (5.13)$$

证明 首先设 $p=1$，我们有

$$\|K_n(xf)\|_{L_1(a_1,b_1)}=\int_{a_1}^{b_1}\left|\int_0^{r}x(t)f(t)H_n(t-x)dt\right|dx$$

$$\leqslant\int_0^{r}x(t)|f(t)|\int_{a_1}^{b_1}H_n(t-x)dxdt$$

$$\leqslant\|f\|_{L_1(0,1)}\left(\sup_{t\notin(a,b)}\int_{a_1}^{b_1}H_n(t-x)dx\right)$$

由于当 $t\notin(a,\ b)$ 和 $x\in(a_1,\ b_1)$ 时，则 $|t-x|\geqslant\min(a_1-a,\ b-b_1)>0$，因此

$$\sup_{t\notin(a,b)}\int_{a_1}^{b_1}H_n(t-x)dx=\sup_{t\notin(a,b)}\int_{a_1-t}^{b_1-t}H_n(y)dy$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\min(a_1-a,\ b-b_1)}\right)\int_{-r}^{r}y^4H_n(y)dy=O(\mu_n^2)$$

故得

$$\|K_n(xf)\|_{L_1(a_1,b_1)}=o(\mu_n) \qquad (n\to+\infty).$$

其次，设 $1<p<+\infty$，$x\in(a_1, b_1)$ 和 $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$，利用 Hölder 不等式及（5.5）得到

$$|K_n(xf,x)|\leqslant K_n(x, x)^{\frac{1}{q}}(K_n(x|f|^p, x))^{\frac{1}{p}}$$

因而有

$$\|K_n(xf)\|_{L_p(a_1,b_1)}\leqslant\left(\sup_{x\in(a_1,b_1)}|K_n(x, x)|^{\frac{1}{q}}\right)\cdot\left(\int_0^r\int_{a_1}^{b_1}x(t)|f(t)|^pH_n(t-x)\,dxdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\sup_{x\in(a_1,b_1)}(K_n(x, x)^{\frac{1}{q}})\right)\|f\|_{L_p(0,r)}\left(\sup_{t\notin(a,b)}\int_{a_1}^{b_1}H_n(t-x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.14)$$

由于对 $x\in(a_1, b_1)$ 和 $\delta=\min(a_1-a, b-b_1)$ 有

$$K_n(x, x)=\int_0^r x(t)H_n(t-x)dt$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta^4}\int_0^r(t-x)^4H_n(t-x)dt=O(\mu_n^2)$$

和对 $t\notin(a, b)$ 有

$$\int_{a_1}^{b_1}H_n(t-x)dx\leqslant\frac{1}{\delta^4}\int_0^r(t-x)^4H_n(t-x)dx=O(\mu^2_n)$$

所以由（5.14）导出

$$\|K_n(xf)\|_{L_p(a_1,b_1)}\leqslant\|f\|_{L_p(0,r)}\,O(\mu_n^{\frac{2}{q}})\,O(\mu_n^{\frac{2}{p}})$$

$$=\|f\|_{L_p(0,r)}O(\mu_n^2)=o(\mu_n) \qquad (n\to+\infty),$$

于是引理证毕。

设 $0\leqslant a<b<r$，记

$L_p^2(a, b)=\{f\,|\,f\in L_p(0, r)$ 且 $f'\in AC(a, b)$，$f''\in L_p(a, b)\}$

现在建立正代数卷积算子列饱和类的正定理。

定理4.48（Swetits—Wood）设 $f\in L_p(0, r)$（$1\leqslant p<+\infty$）和 $0<a<a_1<b_1<b<r$，我们有

i)若 $f\in L_p^2(a, b)$（$1<p<+\infty$），则有

$$\|K_n(f)-f\|_{L_p(a_1,b_1)}=O(\mu_n) \qquad (5.15)$$

ii)若 $f'\in BV(a, b)$，则有

$$\|K_n(f)-f\|_{L_p(a_1, b_1)}=O(\mu_n) \tag{5.16}$$

iii)若 f 在 $[a, b]$ 上是线性的，则有

$$\|K_n(f)-f\|_{L_p(a_1,b_1)}=o(\mu_n) \qquad (n\to+\infty), \tag{5.17}$$

其中 $1\leqslant p<+\infty$。

证明　记 $\chi_1(t)=1-\chi(t)$，则有

$$\|K_n(f)-f\|_{L_p(a_1,b_1)}\leqslant\|K_n(\chi f)\|_{L_p(a_1,b_1)}+\|K_n(\chi_1 f)-\chi_1 f\|_{L_p(a_1,b_1)} \tag{5.18}$$

由引理4.35有

$$\|K_n(\chi f)\|_{L_p(a_1,b_1)}=o(\mu_n) \qquad (n\to+\infty). \tag{5.19}$$

现设 $f\in L_p^2[a, b]$，则有

$$\|K_n((\chi_1 f)(t)-(\chi_1 f)(x), x)\|_{L_p(a_1,b_1)}$$

$$=\left(\int_{a_1}^{b_1}\left|\int_a^b(f(t)-f(x))H_n(t-x)dt\right|dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\int_{a_1}^{b_1}|f(x)|^p\left(\int_0^a H_n(t-x)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\int_{a_1}^{b_1}|f(x)|^p\left(\int_0^r H_n(t-x)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

对于上式中的最后两项，由于其中 $|t-x|\geqslant\delta=\min(a_1-a, b-b_1)>0$，所以由条件（5．2）和（5．3）导出最后两项是 $O(\mu_n)$（$n\to\infty$）．利用Taylor 公式

$$f(t)-f(x)=f'(x)(t-x)+\int_x^t(t-u)f''(u)du$$

推出第一项不超过

$$\left(\int_{a_1}^{b_1}\left|\int_a^b f'(x)(t-x)H_n(t-x)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\int_{a_1}^{b_1}\left|\int_a^b\left(\int_x^t(t-u)f''(u)du\right)H_n(t-x)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

利用（5．2），（5．3），（5．7）得到

$$\left|\int_{a_1}^{b_1}\left|\int_a^b f'(x)(t-x)H_n(t-x)dx\right|^p dx\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\sup_{x\in[a_1,b_1]}|f'(x)|\left|\int_{a_1}^{b_1}\left|\int(t-x)H_n(t-x)dt\right|^p dx\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$=\sup_{x\in(a_1,b_1)}|f'(x)|\left|\int_{a_1}^{b_1}\left|\left(\int_0^r-\int_0^a-\int_b^r\right)(t-x)H_n(t-x)dt\right|^p dx\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$=\sup_{x\in(a_1,b_1)}|f'(x)|\,\|K_n(t-x,\ x)\|_{L_p(a_1,b_1)}+o(\mu_n)$$

$$=O(\mu_n).$$

又用

$$\theta(f'',\ x)=\sup_{\substack{t\in(a,b)\\ t\neq x}}\frac{1}{t-x}\int_x^t|f''(u)|\,du,\qquad x\in(a_1,b_1),$$

表示f''在x点的Hardy—Littlewood极大函数，由Hardy极大不等式导出

$$\|\theta(f'')\|_{L_p(a,b)}\leqslant A_p\|f''\|_{L_p(a,b)}$$

其中 $A_p=\frac{p}{p-1}$。因而有

$$\left(\int_{a_1}^{b_1}\left|\int_a^b\left(\int_x^t(t-u)f''(u)du\right)H_n(t-x)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\int_{a_1}^{b_1}|\theta(f'',x)|^p\left(\int_a^b(t-x)^2H_n(t-x)dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\sup_{x\in(a_1,b_1)}\left(\int_a^b(t-x)^2H_n(t-x)dt\right)\|\theta(f'')\|_{L_p(a_1,b_1)}$$

$$\leqslant A_p\|f''\|_{L_p(a_1,b_1)}\sup_{x\in(a_1,b_1)}\left(\int_a^b(t-x)^2H_n(t-x)dt\right)$$

$$=O(\mu_n).$$

因此得到

$$\left\|K_n\big((x_1f)(t)-(x_1f)(x),\ x\big)\right\|_{L_p(a_1,b_1)}=O(\mu_n)\qquad(5.20)$$

注意到

$$\|K_n(x_1f)-x_1f\|_{L_p(a_1,b_1)}$$

$$\leqslant\left\|K_n\big((x_1f)(t)-(x_1f)(x),\ x\big)\right\|_{L_p(a_1,b_1)}+\left\|(x_1f)(x)\big(K_n(e_0,x)-1\big)\right\|_{L_p(a_1,b_1)}$$

由(5.20)和(5.8)导出

$$\|K_n(x_1f)-x_1f\|_{L_p(a_1,b_1)}=O(\mu_n)$$

从而由(5.18)和(5.19)导出(5.15)，即i)的断言得证。

现在证明ii)，设$p=1$，$f'\in BV(a,b)$，则对x，$t\in(a,b)$有

$$f(t)-f(x)=f'(x)(t-x)+\int_x^t(t-u)df'(u)$$

从i)的证明可见，我们仅需证明

$$\|K_n(x_1(t)\int_x^t(t-u)df'(u),\ x)\|_{L_1[a_1,b_1]}=O(\mu_n).$$

由于对固定$\delta>0$，我们有

$$\left|\int_a^b\int_x^t(t-u)df'(u)H_n(t-x)dt\right|$$

$$\leqslant\int_a^b|t-x|H_n(t-x)\int_x^t|df'(u)|dt$$

$$=\int_a^b|t-x|H_n(t-x)\left|\int_0^{|t-x|}df'(y+x)\right|dt$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{\left[\frac{b-a}{\delta}\right]}I_{nj}(x),\tag{5.21}$$

其中

$$I_{nj}(x)=\int_{j\delta\leqslant|t-x|\leqslant(j+1)\delta}|t-x|H_n(t-x)\int_0^{|t-x|}|df'(y+y)|dt$$

明显地，有

$$I_{nj}(x)\leqslant S_{nj}(\delta,\ x)\int_0^{(j+1)\delta}df'(y+x)|$$

其中

$$S_{nj}(\delta,x)=\int_{j\delta\leqslant|t-x|<(j+1)\delta}|t-x|H_n(t-x)dt$$

下面估计$S_{nj}(\delta,\ x)$，当$j=0$时，我们有

$$S_{n0}(\delta,\ x)=\int_{0\leqslant|t-x|<\delta}|t-x|H_n(t-x)dt$$

$$=\delta\int_{-r}^{r}H_n(t)dt=\delta.$$

而当$1\leqslant j\leqslant\left[\frac{b-a}{\delta}\right]$时，有

$$S_{nj}(\delta,x)\leqslant\frac{1}{(j\delta)^3}\int_{j\delta\leqslant|t-x|<(j+1)\delta}(t-x)^4H_n(t-x)dt$$

$$\leqslant\frac{1}{(j\delta)^3}\int_{-r}^{r}t^4H_n(t)dt=\frac{1}{(j\delta)^3}O(\mu_n^2)$$

因此由（5.21）导出

$$\left|\int_a^b\int_x^t(t-u)f'(u)H_n(t-x)dt\right|\leqslant\sum_{j=0}^{\left[\frac{b-a}{\delta}\right]}I_{nj}(x)$$

$$\leqslant\delta\int_0^\delta|df'(y+x)|+O(\mu_n^2)\sum_{j=1}^{\left[\frac{b-a}{\delta}\right]}\frac{1}{(j\delta)^3}\int_0^{(j+1)\delta}|df'(x+y)|$$

对上式关于x积分并注意到

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_0^{(j+1)\delta}|df'(y+x)|\,dx\leqslant(j+1)\delta\|f'\|_{BV[a,b]}$$

我们得到

$$\left\|K_n\left(x_1(t)\int_x^t(t-u)df'(u),\ x\right)\right\|_{L_1(a,b)}$$

$$\leqslant\delta^2\|f'\|_{BV[a,b]}+\frac{\|f'\|_{BV[a,b]}}{\delta^2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j+1}{j^3}\right)O(\mu_n^2).$$

取 $\delta=\mu_n^{\frac{1}{2}}$ 导出

$$\left\|K_n\left(x_1(t)\int_x^t(t-u)df'(u),\ x\right)\right\|_{L_1[a_1,b_1]}=O(\mu_n)$$

最后证明 iii)，若 $f\in L_p(0,\ r)$ ($1\leqslant p<+\infty$)，且在 $[a,\ b]$ 上是线性的，利用 (5. 7) 和 (5. 8) 和引理1.35中的估计 (5.13)，导出 (5.17)，证毕.

接着讨论定理4.48的逆命题，从而建立正代数卷积算子列 $\{K_n\}_{n\in N}$ 的 L_p 局部饱和定理. 设 $0<a<b<r$，记

$$C_0^2(a,\ b)=\{\psi\in C^2(a,\ b)\ 且\ \psi(a)=\psi'(a)=\psi''(a)=\psi(b)=\psi'(b)=\psi''(b)=0\}.$$

对 $f\in L_p(0,\ r)(p\geqslant1)$ 和 $\psi\in C_0^2(a,b)$ 引入双线性泛函

$$A_n(f,\ \psi)=\frac{1}{\mu_n}\int_a^b\Big(K_n(f,\ x)-f(x)\Big)\psi(x)dx.$$

我们有

引理4.36 对每个固定的 $\psi\in C_0^2(a,\ b)$，$\{A_n(\cdot,\psi)\}$ 在 $L_p(0,r)$ 上是一致有界的，即对 $\forall f\in L_p(0,\ r)$ ($1\leqslant p<+\infty$) 有

$$|A_n(f,\ \psi)|\leqslant M_\psi\|f\|, \tag{5.22}$$

其中 M_ψ 是与 n，f 无关的正常数.

证明　对$\psi\in C_0^2[a,b]$定义$\psi(x)=0(x\notin[a,b])$，则$\psi\in C^2[0,r]$，且对$x\notin[a,b]$有$\psi(x)=\psi'(x)=0$，因此有

$$\int_a^b K_s(f,x)\psi(x)dx=\int_0^r\psi(x)\int_0^r f(t)H_s(t-x)dtdx$$

$$=\int_0^r f(t)\int_0^r\psi(x)H_s(t-x)dxdt$$

对x，$t\in[0,r]$，由Taylor公式有

$$\psi(x)=\psi(t)+\psi'(t)(x-t)+\frac{\psi''(\eta)}{2}(x-t)^2$$

其中η是x和t之间的数，因而有

$$\int_0^r\int_0^r f(t)\psi(x)H_s(t-x)dxdt$$

$$=\int_0^r f(t)\psi(t)\int_0^r H_s(t-x)dxdt+\int_0^r f(t)\psi'(t)\int_0^r(x-t)H_s(t-x)dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^r f(t)\int_0^r\psi''(\eta)(x-t)^2H_s(t-x)dxdt$$

$$\stackrel{(记)}{=}I_1+I_2+I_3$$

利用(5，1)我们有

$$I_1=\int_0^r f(t)\psi(t)\int_t^{t-r}H_s(u)dudt$$

$$=\int_0^r f(t)\psi(t)dt-\int_0^r f(t)\psi(t)\int_{-r}^{t-r}H_s(u)dudt$$

$$-\int_0^r f(t)\psi(t)\int_t^r H_s(u)\,dudt$$

注意到，当$t\notin[a,b]$时，有$\psi(t)=0$，因此由(5，2)和(5，3)导出

$$\left|\int_0^r f(t)\psi(t)\int_t^r H_s(u)dudt\right|=\left|\int_a^b f(t)\psi(t)\int_t^r H_s(u)dudt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{a^4}\left|\int_a^b f(t)\psi(t)\int_t^r u^4H_s(u)dudt\right|$$

$$\leqslant\sup_{t\in[a,b]}|\psi(t)|\left(\frac{1}{a^4}\int_{-r}^r u^4H_s(u)du\right)\|f\|_{L_1[0,r]}$$

$$=o(\mu_n)\|\psi\|_{C[a,\ b]}\|f\|_{L_p[0,\ r]}.$$

类似地有

$$\left|\int_0^r f(t)\psi(t)\int_{-\pi}^{t-r} H_n(u)dudt\right|=o(\mu_n)\|\psi\|_{C[a,\ b]}\|f\|_{L_p[0,\ r]}$$

因而有

$$I_1=\int_0^\pi f(t)\psi(t)dt+o(\mu_n)\|\psi\|_{C[a,\ b]}\|f\|_{L_p[0,\ r]}.$$

又由于$\psi'(t)=0(t\notin[a,\ b])$，通过类似的计算导出

$$I_2=\int_a^r f(t)\psi'(t)\int_a^r(x-t)H_n(t-x)dxdt$$

$$=o(\mu_n)\|\psi'\|_{C[a,\ b]}\|f\|_{L_p[0,\ r]}.$$

而由(5, 2)导出

$$|I_3|=\frac{1}{2}\left|\int_0^r f(t)\int_0^r\psi''(\ )(x-t)^2H_n(t-x)dxdt\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|\psi''\|_{C[a,\ b]}\left(\sup_{t\in[0,r]}\int_0^r(x-t)^2H_n(t-x)dx\right)\|f\|_{L_1[0,\ r]}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}r^{\frac{1}{q}}\|\psi''\|_{C[a,\ b]}\mu_n\|f\|_{L_p[0,\ r]}$$

其中$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}(1\leqslant p<+\infty)$。因而得到，对$f\in L_p[0,\ r]$有

$$|A_n(f,\ \psi)|=\frac{1}{\mu_n}\left|\int_a^b\left(K_n(f,\ x)-f(x)\right)\psi(x)dx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\mu_n}\left(\left|I_1-\int_0^r f(x)\psi(x)dx\right|+|I_2|+|I_3|\right)$$

$$\leqslant M_\psi\|f\|_{L_p[0,\ r]}$$

其中M_ψ是与n、f无关的正数，证毕。

根据引理4.36可以证明如下定理。

定理4.49(Wood—Swetits) 设$0<a<b<r$和$f\in L_p[0,\ r]$，我们有

i)若$\|K_n(f)-f\|_{L_p[a,\ b]}=O(\mu_n)(1\leqslant p<+\infty)$，则对$p>1$有$f\in L_p^2[a,\ b]$，而对$p=1$有$f'\in BV[a,\ b]$。

ii)若$\|K_n(f)-f\|_{L_p[a,\ b]}=o(\mu_n)(1\leqslant p<+\infty)$，则f在[a, b]上是线性的。

证明　由条件(5，1)、(5，2)和(5，3)，应用 Vonorovskaja 渐近关系导出，对 $f\in C^2[a, b]$有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_n}\Big(K_n(f, x)-f(x)\Big)=\frac{1}{2}f''(x) \tag{5, 23}$$

在$[a, b]$上一致成立，因此对$\psi\in C_0^2[a, b]$和$f\in C^2[0,r]$有

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f, \psi)=\frac{1}{2}\int_a^b f''(t)\psi(x)dx$$

将上式右端分部积分两次，并注意到$\psi\in C_0^2[a, b]$得到

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f, \psi)=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\psi''(x)dx \tag{5, 24}$$

由于对固定的$\psi\in C_0^2[a, b]$，泛函序列$\{A_n(\cdot, \psi)\}$在$L_p[0, r]$上是一致有界的，以及$C^2[0, r]$在$L_p[0, r]$内稠密，所以由(5，24)导出，对$\forall f\in L_p[0, r]$有

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f, \psi)=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\psi''(x)dx.$$

现在固定$f\in L_p[0, r]$且$\|K_n(f)-f\|_{L_p[a, b]}=O(\mu_n)(1\leqslant p<+\infty)$，考查线性泛函序列$\{A_n(f, \cdot)\}$，记

$$h_n(x)=\frac{K_n(f, x)-f(x)}{\mu_n}$$

则对$\forall\psi\in C_0^2[a, b]$有

$$A_n(f, \psi)=\frac{1}{\mu_n}\int_a^b\Big(K_n(f, x)-f(x)\Big)\psi(x)dx$$

$$=\int_a^b h_n(x)\psi(x)dx \tag{5, 25}$$

由于$\|h_n\|_{L_p[a, b]}=O(1)(1\leqslant p<+\infty)$，所以，当$p>1$时由弱致密性原理，存在子列$\{n_j\}$和$h\in L_p[a, b]$使得对$\forall\psi\in C^2[a, b]$有

$$\lim_{j\to+\infty} A_{n_j}(f, \psi)=\int_a^b h(x)\psi(x)dx \tag{5.26}$$

而当$p=1$时，由Helly－Bary选择原理，存在子列$\{n_j\}$和$h\in BV[a,b]$使对$\psi\in C^2[a, b]$有

$$\lim_{j\to+\infty} A_{n_j}(f, \psi)=\int_a^b\psi(x)dh(x) \tag{5, 27}$$

因而由(5, 24)和(5, 27)得到如下积分方程：对$\forall\psi\in C_0^2[a, b]$有

$$\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\psi''(x)dx=\begin{cases}\int_a^b h(x)\psi(x)dx & (p>1);\\ \int_a^b \psi(x)dh(x) & (p=1).\end{cases} \quad (5,\ 28)$$

明显地，方程(5, 28)的一个特解是

$$\frac{1}{2}f_0(x)=\begin{cases}\int_\eta^x\int_\eta^\xi h(u)dud\xi & (p>1),\\ \int_\eta^x\int_\eta^\xi dh(u)d\xi & (p=1).\end{cases}$$

而齐次方程

$$\int_a^b f(x)\psi''(x)dx=0$$

的通解为$f(x)=C_1x+C_2$ $(x\in[a, b])$，因为$\psi\in C_0^2[a, b]$是任意的。

这样若$f\in L_p[0,r]$且$\|K_n(f)-f\|_p=O(\mu_n)$，则$f(x)=C_1x+C_2+f_0(x)$，因而，当$p>1$时有$f\in L_p^2[a, b]$，当$p=1$时有$f'\in BV[a, b]$，即i)的断言得证。

其次，设$f\in L_p[0, r]$且$\|f-K_n(f)\|_p=o(\mu_n)$$(1\leqslant p<+\infty)$，则

$$|A_n(f,\psi)|\leqslant\frac{1}{\mu_n}\int_a^b|K_n(f, x)|\ |\psi(x)|dx$$

$$\leqslant\Big(\sup_{x\in[a,b]}|\psi(x)|\Big)\frac{A_p}{\mu_n}\|K_n(f)-f\|_{L_p[a, b]},$$

其中$A_p>0$是与n无关的正数，因而有

$$\lim_{n\to\infty}A_n(f,\psi)=0 \quad (5,\ 29)$$

因此由(5, 24)和(5, 29)得到

$$\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\psi''(x)dx=0,$$

所以f在[a, b]上是线性的，证毕

结合定理4．48和定理4．49得到正代数卷积算子列$\{K_n\}_{n\in N}$的L_p局部饱和定理。

定理4．50 设$0<a<b<r$和$f\in L_p[0, r]$，我们有

i)若$1\leqslant p<+\infty$，则$\|K_n(f)-f\|_{L_p[a, b]}=o(\mu_n)(n\to\infty)$，当且仅当f在[a, b]上是线性的。

ii)若$1<p<+\infty$，则$\|K_n(f)-f\|_{L_p[a,b]}=O(\mu_n)$，当且仅当$f\in L_p^{\frac{1}{r}}[a,b]$。

iii)若$p=1$，则$\|K_n(f)-f\|_{L_1[a,b]}=O(\mu_n)$，当且仅当$f'\in BV[a,b]$。

特别地，有

推论4.29 设$0<a<b<r$，则正代数卷积算子列$\{K_n\}_{n\in N}$在$[a,b]$上关于阶$\{\mu_n\}$和平凡类$T(K_n)=\{f\mid f$在$[a,b]$上是线性的$\}$是$L_p(1\leqslant p<+\infty)$局部饱和的。

5.2 Kantorovich型算子列的Lp饱和定理

首先讨论Kantorovich Bernstein算子列$\{P_n\}_{n\in N}$的L_p饱和问题。对$n\in N$及$f\in L_p[0,1](p\geqslant 1)$有

$$P_n(f,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(t)dt\right)p_{nk}(x);\ x\in[0,1],$$

其中$p_{nk}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$。记

$$U_p=\{h\mid h\in L_p[0,1],\ h(0)=h(1)=0,\ \text{且}\ h'\in L_p[0,1](p>1)\text{或}\ h\in BV[0,1](p=1)\},$$

和

$$S_p=\left\{f\mid f\in L_p[0,1]\text{且存在}h\in U_p\text{和}\xi\in(0,1)\text{及常数}C\text{使得}\ f(x)=C+\int_{\xi}^{x}\frac{h(u)}{u(1-u)}du\right\},$$

为建立$\{P_n\}_{n\in N}$的L_p饱和定理，需要如下引理

引理4.37 设$p\geqslant 1$，$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$，则有

$$\text{i)}\ \|x^{\frac{1}{q}}(P_n(\ln t,x)-\ln x)\|_p=O(n+1)^{-1}), \tag{5,30}$$

$$\text{ii)}\ \|(1-x)^{\frac{1}{q}}(P_n(\ln(1-t),x)-\ln(1-x))\|_p=O((n+1)^{-1}).$$

证明 当$p=1$时，(5,30)成立已在第二章§2·2中例1证实。因此只需要证明，当$p=+\infty$时(5,30)也成立，然后用Riesz Thorin插补定理导出，对$1<p<+\infty$(5,30)也成立。

由第二章§2·2例1的证明我们有

$$|P_n(\ln t,x)-\ln x|\leqslant(1-x)^n\ln 2+\sum_{k=1}^{n}p_{nk}(x)|r_{nk}|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(1-x)^k}{k},$$

和

$$|r_{nk}|\leqslant 1-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{n}$$

$$|r_{nk}|\leqslant\frac{1}{3k^2}+\frac{1}{n+1},$$

故得

$$|x(P_n(\ln t,x)-\ln x)|\leqslant x(1-x)^n+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{xp_{nk}(x)}{k^2}+$$

$$+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}x^{n+1}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x(1-x)^k}{k}. \qquad (5,31)$$

由于

$$\max_{x\in[0,1]}x(1-x)^k=x(1-x)^k\Big|_{x=\frac{1}{k+1}}=\frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k<\frac{1}{k+1}$$

故有

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x(1-x)^k}{k}\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

又因为当$1\leqslant k\leqslant n-1$时有

$$\max_{x\in[0,1]}x^{k+1}(1-x)^{n-k}=x^{k+1}(1-x)^{n-k}\Big|_{x=\frac{k+1}{n+1}}=\frac{(k+1)^{k+1}(n-k)^{n-k}}{(n+1)^{n+1}},$$

于是对确定的k利用Stirling公式得到

$$xp_{nk}(x)\leqslant\binom{n}{k}\frac{(k+1)^{k+1}(n-k)^{n-k}}{(n+1)^{n+1}}$$

$$=O\left(\frac{1}{n+1}\frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{e^k k!}k^{\frac{1}{2}}\right)=O\left(\frac{k^{\frac{1}{2}}}{n+1}\right),$$

所以有

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{xp_{nk}(x)}{k^2}=O\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)=O\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

因此由(5,31)导出

$$\max_{x\in[0,1]}\left|x\left(P_n(\ln t,\ x)-\ln x\right)\right|=O\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

证毕。

由(5,30)直接导出

推论4.30 设$g(t)=\ln t-\ln(1-t)$,则有

$$\left\|\left(x(1-x)\right)^{\frac{1}{q}}\left(P_n(g,\ x)-g(x)\right)\right\|_p=O\left((n+1)^{-1}\right) \qquad (5,32)$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

引理4.38 若$f\in S_p(1<p\leqslant+\infty)$,则$f'\in L_p[0,\ 1]$,

证明 因为$f\in S_p(1<p\leqslant+\infty)$，所以存在$h\in L_p[0,1]$，$h(0)=h(1)=0$且$h'\in L_p[0,1]$使得

$$f(x)=C+\int_{\xi}^{x}\frac{h(u)}{u(1-u)}du$$

因此有

$$f'(x)=\frac{h(x)}{x(1-x)}=\frac{1}{x}\int_0^x h'(u)du-\frac{1}{1-x}\int_x^1 h'(u)du \tag{5,33}$$

利用Hardy极大不等式，由(5,33)导出，对$p>1$有

$$\|f'\|_{L_p[0,\ 1]}\leqslant 2A_p\|h'\|_{L_p[0,\ 1]}<+\infty$$

其中$A_p=\frac{p}{p-1}$。证毕

引理4.39 设$f\in S_p(p\geqslant1)$，则对$n\in N$有

$$(n+1)\|x(1-x)f'(x)(P_n(g,\ x)-g(x))\|_p$$
$$\leqslant C_p\begin{cases}\|f'\|_p & (1<p\leqslant+\infty),\\ \|x(1-x)f'\|_\infty & (p=1).\end{cases} \tag{5, 34}$$

证明 首先设$p>1$，由引理4，38有$f'\in L_p[0,\ 1]$所以有

$$\|x(1-x)f'(x)(P_n(g,\ x)-g(x))\|_{L_p[0,1]}$$
$$\leqslant\|x(1-x)(P_n(g,)-g(x))\|_\infty\|f'\|_{L_p[0,\ 1]}$$

其次，设$p=1$，则有

$$\|x(1-x)f'(x)(P_n(g,x)-g(x)\|_1$$
$$\leqslant\|x(1-x)f'(x)\|_\infty\|P_n(g,x)-g(x)\|_1$$

因此由推论4.30导出

$$(n+1)\|x(1-x)f'(x)(P_n(g,x)-g(x))\|_p\leqslant C_p\begin{cases}\|f'\|_p & (p>1),\\ \|x(1-x)f'\|_\infty & (p=1).\end{cases}$$

其中C_p是正常数。证毕

引理4.40 若$h\in BV[0,1]$，则对$n\in N$有

$$(n+1)\|P_n(\int_t^{*}(g(u)-g(t))dh(u),\ x)\|_1\leqslant C_1\|h\|_{BV} \tag{5.35}$$

证明 记$I_k=\left(\frac{k}{n+1},\ \frac{k+1}{n+1}\right)$，$\chi_{I_k}(t)$表示$I_k$上的特征函数，令

$$K_n(t,\ x)=\sum_{k=0}^{n}(n+1)\chi_{I_k}(t)p_{nk}(x)$$

由于$g(u)=\ln u-\ln(1-u)$，所以有

$$g(u)-g(t)=\ln\frac{u(1-t)}{(1-u)t}.$$

因此，对u，$t\in[0,1]$时有

$$\operatorname{sgn}(u-t)(g(u)-g(t))>0.$$

两次应用Fubini定理得到

$$\int_0^1\left|P_n\left(\int_t^x(g(u)-g(t))dh(u),\ x\right)\right|dx$$

$$\leqslant\int_0^1\int_0^x K_n(t,\ x)\left(\int_t^x(g(u)-g(t))\,|dh(u)|\right)dtdx$$

$$+\int_0^1\int_x^1 K_n(t,\ x)\left(\int_x^t g(t)-g(u))\,|dh(u)|\right)dtdx$$

$$\leqslant\int_0^1\left\{\int_u^1\int_0^u K_n(t,\ x)(g(u)-g(t))dtdx+\right.$$

$$\left.+\int_0^u\int_u^1 K_n(t,\ x)(g(t)-g(u))dtdx\right\}|dh(u)|$$

$$=\int_0^1\left\{\int_u^1\left(\int_0^1 K_n(t,\ x)(g(u)-g(t))_+dt\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^u\left(\int_0^1 K_n(t,\ x)(g(t)-g(u))_+dt\right)dx\right\}|dh(u)|$$

由于

$$\int_0^1 P_n((g(u)-g(t))_+,\ x)dx=\int_0^1(g(u)-g(x))_+dx$$

所以有

$$\int_0^1 P_n((g(u)-g(t))_+,\ x)dx=-\int_0^u P_n(g(u)-g(t))_+,x)dx+$$

$$+\int_0^u(g(u)-g(x))^+dx$$

于是

$$\left\|P_n\left(\int_t^x(g(u)-g(t))dh(u),\ x\right)\right\|_1$$

$$\leqslant\int_0^1\left\{\int_u^1 P_n((g(u)-g(t))_+,x)dx+\int_0^u P_n((g(t)-g(u))_+,\ x)dx\right\}|dh(u)|$$

$$=\int_0^1\left\{-\int_0^u\left(P_n((g(u)-g(t))_+,\ x)-(g(u)-g(x))_+\right)dx+\right.$$

$$+\int_0^u P_n((g(t)-g(u))_+, x)dx\Big\}|dh(u)|$$

$$=\int_0^1\left|\int_0^u(P_n(g, x)-g(x))dx\right||dh(u)|. \tag{5.36}$$

利用推论4.30导出，对$u\in(0, 1)$有

$$\left|\int_0^u(P_n(g, x)-g(x))dx\right|\leqslant\int_0^1|P_n(g, x)-g(x)|dx$$

$$=O\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

因此由(5.36)得到

$$(n+1)\left\|P_n\left(\int_t^x(g(u)-g(t))dh(u), x\right)\right\|_1$$

$$\leqslant C_1\int_0^1|dh(u)|=C_1\|h\|_{BV},$$

其中C_1是与n无关的正数。证毕

引理4.41 若$h'\in L_\infty[0, 1]$，则对$n\in N$有

$$(n+1)\left\|P_n\left(\int_t^x(g(u)-g(t))h'(u)du, x\right)\right\|_\infty\leqslant C_\infty\|h'\|_\infty \tag{5.37}$$

证明 与引理4.4的证法相同，我们有

$$\left|P_n\left(\int_t^x(g(u)-g(t))h'(u)du, x\right)\right|$$

$$=\left|\int_0^x K_n(t, x)\int_t^x(g(u)-g(t))h'(u)dudt+\right.$$

$$\left.+\int_x^1 K_n(t, x)\int_x^t(g(t)-g(u))h'(u)dudt\right|$$

$$\leqslant\|h'\|_\infty\int_0^1 K_n(t, x)\int_t^x(g(u)-g(t))dudt$$

$$=\|h'\|_\infty\int_0^1 K_n(t, x)\Big\{x(\ln x-\ln t+(1-x)[\ln(1-x)-\ln(1-t)]\Big\}dt$$

$$=\|h'\|_\infty\Big\{x[\ln x-P_n(\ln t, x)]+(1-x)[\ln(1-x)-P_n(\ln(1-t), x)]\Big\}$$

$$=\|h'\|_\infty O((n+1)^{-1}),$$

其中利用了引理4.37中的(5.30)。证毕

由引理4.40和引理4.41，应用Riesz-Thorin插补定理得到

推论4.31 若$h'\in L_p[0,1](1\leqslant p<+\infty)$，则有

$$(n+1)\|P_n(\int_t^x(g(u)-g(t))h'(u)du,\ x)\|_p\leqslant C_p\|h'\|,$$

其中C_p是正常数。

现在我们建立$\{P_n\}_{n\in N}$的L_p饱和正定理及等价定理，这是V. Maier和S. D. Riemenschneider得到的。

定理4.31 若$f\in S_p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，则有

$$(n+1)\|P_n(f)-f\|_p\leqslant C_p\begin{cases}\|f'\|_p+\|(x(1-x)f')'\|_p & (1<p\leqslant+\infty)\\ \|x(1-x)f'\|_\infty+\|x(1-x)f'\|_{BV} & (p=1),\end{cases}$$

或对$1\leqslant p\leqslant+\infty$有

$$\|P_n(f)-f\|_p=O((n+1)^{-1}). \tag{5.38}$$

证明 因为$f\in S_p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，所以对$\forall x,\ t\in(0,1)$有

$$f(t)-f(x)=\int_\xi^t\frac{h(u)}{u(1-u)}du-\int_\xi^x\frac{h(u)}{u(1-u)}du$$

$$=\int_x^t\frac{h(u)}{u(1-u)}du$$

其中$\xi\in(0,1)$。明显地有$h(x)=x(1-x)f'(x)(a.\ e)$。记$g(t)=\ln t-\ln(1-t)$，则有

$$f(t)-f(x)=\int_x^t\frac{h(u)}{u(1-u)}du=\int_x^t h(u)d(g(u)-g(t))$$

$$=h(x)[g(t)-g(x)]-\int_x^t(g(u)-g(t))dh(u)$$

$$=x(1-x)f'(x)[g(t)-g(x)]+\int_t^x(g(u)-g(t))d[u(1-u)f'(u)].$$

于是

$$P_n(f,\ x)-f(x)=x(1-x)f'(x)(P_n(g,\ x)-g(x))+$$

$$+P_n(\int_t^x(g(u)-g(t))d[u(1-u)f'(u)],\ x)$$

因而

$$\|P_n(f)-f\|_p\leqslant\|x(1-x)f'(x)(P_n(g,\ x)-g(x)\|_p+$$

$$+\|P_n(\int_t^x(g(u)-g(t))d(u(1-u)f'(u)),\ x)\|_p$$

推由论4.31和引理4.39得到

$$(n+1)\|P_n(f)-f\|_p\leqslant C_p\begin{cases}\|f'\|_p+\|(x(1-x)f'(x))'\|_p, & (1<p<+\infty),\\ \|x(1-x)f''\|_\infty+\|x(1-x)f'\|_{BV}, & (p=1).\end{cases}$$

证明完毕。

对$f\in L_p[0,1](p\geqslant 1)$和$\psi\in C^2[0,1]$，引入双线性泛函，

$$A_n(f,\psi)=2n\int_0^1(P_n(f,x)-f(x))\psi(x)dx.$$

我们有

引理4.42 对每个固定的$\psi\in C^2[0,1]$，$\{A(\cdot,\psi)\}$在$L_p[0,1]$上是一致有界的。准确地说，对$\forall f\in L_p[0,1](p\geqslant 1)$和$n\in N$，有

$$|A_n(f,\psi)|\leqslant 2\|f\|_p(\|\psi''\|_\infty+2\|\psi'\|_\infty) \tag{5.39}$$

证明 设$I_k=\left(\frac{k}{n+1},\ \frac{k+1}{n+1}\right)$，$z_k\in I_k$，由于

$$\int_0^1 p_{nk}(x)dx=\frac{1}{n+1},$$

我们有

$$\int_0^1 P_n(f,x)\psi(x)dx=(n+1)\sum_{k=0}^n\int_{I_k}f(t)dt\int_0^1(\psi(x)-\psi(z_k))p_{nk}(x)dx$$

$$+\sum_{k=0}^n\psi(z_k)\int_{I_k}f(t)dt$$

因而

$$A_n(f,\psi)=2n(n+1)\sum_{k=0}^n\int_{I_k}f(t)dt\int_0^1(\psi(x)-\psi(z_k)(x-z_k))p_{nk}(x)dx$$

$$+2n(n+1)\sum_{k=0}^n\int_{I_k}f(t)dt\int_0^1\psi'(z_k)(x-z_k)p_{nk}(x)+$$

$$+2n\sum_{k=0}^n\int_{I_k}(\psi(z_k)-\psi(x)f(x)dx$$

由于

$$|\psi(x)-\psi(z_k)|\leqslant\|\psi'\|_\infty|x-z_k|$$

$$|\psi(x)-\psi'(z_k)(x-z_k)|\leqslant\frac{1}{2}\|\psi''\|_\infty(x-z_k)^2$$

取$z_k=\frac{k}{n}\in I_k$，我们有

$$|A_n(f,\psi)|\leqslant n(n+1)\|\psi''\|_\infty\sum_{k=0}^n\int_{I_k}|f(t)|dt\int_0^1\left(x-\frac{k}{n}\right)^2p_{nk}(x)dx$$

$$+2n(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left|\psi'\left(\frac{k}{n}\right)\right|\int_{I_k}|f(t)|dt\left|\int_0^1\left(x-\frac{k}{n}\right)p_{nk}(x)dx\right|$$

$$+2n\|\psi'\|_\infty\sum_{k=0}^{n}\int_{I_k}|f(x)|\left|x-\frac{k}{n}\right|dx \tag{5.40}$$

利用Beta函数得到

$$\int_0^1\left(x-\frac{k}{n}\right)^2p_{nk}(x)dx=\binom{n}{k}B(k+3,\ n-k+1)-2\frac{k}{n}\binom{n}{k}B(k+2,\ n-k+1)$$

$$+\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}B(k+1,\ n-k+1)\leqslant\frac{5}{4(n+1)^2}$$

又注意到 $\left(x-\frac{k}{n}\right)p_{nk}(x)=-\frac{x(1-x)}{n}p'_{nk}(x)$，所以有

$$\left|\int_0^1\left(x-\frac{k}{n}\right)p_{nk}(x)dx\right|=\left|-\int_0^1\frac{x(1-x)}{n}p'_{nk}(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_0^1\frac{1-2x}{n}p_{nk}(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{n(n+1)}.$$

而对 $x\in I_k$，有

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

因此由(5.40导出

$$|A_n(f,\ \psi)|\leqslant2\|\psi''\|_\infty\|f\|_1+4\|\psi'\|_\infty\|f\|_1\leqslant2\|f\|_p(\|\psi''\|_\infty+2\|\psi'\|_\infty),$$

即(5.39)成立，证毕

现在可以建立 L_p 饱和的等价定理，

定理4.52 设 $f\in L_p[0,\ 1](p\geqslant1)$，则有

i) $f\in S_p(p\geqslant1)$ 当且仅当

$$\|P_n(f)-f\|_p=O((n+1)^{-1}).$$

ii) $\|P_n(f)-f\|_p=o((n+1)^{-1})(n\to\infty)$，当且仅当 $f\equiv\text{const}$.

证明 由定理4.51，我们仅需证明，若对 $p\geqslant1$ 有

$$\|P_n(f)-f\|_p=O((n+1))^{-1})$$

则必有 $f\in S_p$，事实上，由Voronovskaja渐近关系导出，对 $f\in C^2[0,\ 1]$，极限

$$\lim_{n\to\infty}2n(P_n(f,\ x)-f(x))=(x(1-x)f'(x))'$$

在[0, 1]上一致成立，因此对 $\psi\in C^2[0,\ 1]$ 和 $f\in C^2[0,\ 1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty}A_n(f,\ \psi)=\int_0^1(x(1-x)f'(x))'\psi(x)dx \tag{5.41}$$

由分部积分得到

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f, \psi) = \int_0^1 f(x)[x(1-x)\psi'(x)]'dx$$

由于$C^2[0, 1]$在$L_q[0, 1]$中稠密和$\{A_n(\cdot, \psi)\}$在$L_p[0, 1]$上一致有界，所以由Banach-Steinhaus定理推出，(5.41)对所有$f\in L_p[0, 1]$($p\geq 1$)成立。

另一方面，若$f\in L_p[0,1]$且$\|P_n(f)-f\|_p=O((n+1)^{-1})$，考查泛函序列$\{A_n(f,\cdot)\}$，记

$$h_n(x)=2n(P_n(f, x)-f(x)),$$

则对任意$\psi\in C^2[0, 1]$有

$$A_n(f, \psi) = \int_0^1 h_n(x)\psi(x)dx. \tag{5.42}$$

当$p>1$时，由于$\|h_n\|_p=O(1)$，所以由弱致密性原理存在$\{n_j\}$和$h\in L_p[0, 1]$，使得对$\forall\psi\in C^2[0, 1]$有

$$\lim_{j\to\infty} A_{n_j}(f, \psi) = \int_0^1 h(x)\psi(x)dx \tag{5.43}$$

而当$p=1$时，由Helly-Bary选择原理，存在子列$\{n_j\}$和$h\in BV[0,1]$使得对$\forall\psi\in C^2[0, 1]$有

$$\lim_{j\to\infty} A_{n_j}(f, \psi) = \int_0^1 \psi(x)dh(x) \tag{5.44}$$

因而由(5.41)、(5.43)和(5.44)得到如下积分方程：对$\forall\psi\in C^2[0, 1]$有

$$\int_0^1 f(x)[x(1-x)\psi'(x)]'dx = \begin{cases} \int_0^1 \psi(x)h(x)dx & (p>1), \\ \int_0^1 \psi(x)dh(x) & (p=1). \end{cases}$$

为解此积分，首先求解如下齐次方程：对$\forall\psi\in C^2[0, 1]$

$$\int_0^1 f(x)[x(1-x)\psi'(x)]'dx=0,$$

或

$$\int_0^1 f(x)\big((1-2x)\psi'(x)+x(1-x)\psi''(x)\big)dx=0. \tag{5.45}$$

特别取$\psi(x)=x$，导出

$$\int_0^1 f(x)(1-2x)dx=0$$

令$G(x)=\int_0^x f(t)(1-2t)dt$，则有$G(0)=G(1)=0$。因此由分部积分得到

$$\int_0^1 f(x)(1-2x)\psi'(x)dx = \int_0^1 \psi'(x)dG(x)$$

$$= -\int_0^1 G(x)\psi''(x)dx$$

于是由(5.45)导出

$$\int_0^1 (x(1-x)f(x) - G(x))\psi''(x)dx = 0,$$

因为$\psi \in C^2[0, 1]$是任意的，所以有

$$G(x) = \int_0^x f(t)(1-2t)dt = x(1-x)f(x), \quad (a, e).$$

或

$$(1-2x)f(x) = x(1-x)f'(x) + (1-2x)f(x) \qquad (a, e),$$

即$f'(x)=0(a, e)$。因此齐次方程的通解为

$$f(x) = c(\text{常数}) \qquad (a, e).$$

由直接计算可知

$$f_0(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_\xi^x \frac{1}{t(1-t)}\left(\int_0^t h(u)du\right)dt & (p>1), \\ \displaystyle\int_\xi^x \frac{h(t)}{t(1-t)}dt & (p=1), \end{cases}$$

为非齐次方程的解。其中$\xi \in (0, 1)$，记

$$H(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t h(u)du & (p>1), \\ h(t) & (p=1). \end{cases}$$

则有$H(0)=H(1)=0$且当$p>1$时$H' \in L_p[0, 1]$，而当$p=1$时$H \in BV[0, 1]$。因此积分方程(5.45)的通解

$$f(x) = c + \int_\xi^x \frac{H(t)}{t(1-t)}dt \in S_p,$$

即i)得证。

现证ii)。若$f \in L_p[0, 1](p \geqslant 1)$且

$$\|P_n(f) - f\|_p = o((n+1)^{-1}),$$

则对$\forall \psi \in C^2[0, 1]$有

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f, \psi) = 0,$$

因而得到齐次积分方程

$$\int_0^1 f(x)(x(1-x)\psi'(x))'dx=0$$

故其通解为

$$f(x)=c(常数) \qquad (a, e).$$

证毕

特别有

推论4.32 Kantorovich—Bernstein算子列 $\{P_n\}_{n\in N}$在$L_p[0, 1]$上关于阶 $\{n^{-1}\}$ 和平凡类$T(P_n)=\{c|c为常数\}$是$L_p(p\geqslant 1)$饱和的。

其次，讨论Kantorovich—Szósz—Mirakian算子列 $\{S_n^*\}_{n\in N}$的 L_p 饱和问题。对 $f\in L_p[0, +\infty)(p\geqslant 1)$和$n\in N$，令

$$S_n^*(f, x)=n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt\right)s_{n,k}(x), \qquad x\in[0, \infty)$$

其中$s_{n,k}(x)=e^{-nx}\dfrac{(nx)^k}{k!}$。

由于对$x\in[0, \infty)$有

$$S_n^*(1, x)=1, \quad S_n^*(t-x, x)=\frac{1}{2n},$$

和

$$S_n^*((u-x)^2, x)=\frac{x}{2n}+O(n^{-2}),$$

$$S_n^*((t-x)^4, x)=O(n^{-2}),$$

则可由Taylor展开式得到如下Voronovskaja渐近关系：若$f\in L_p[0, \infty)\cap C^2[0, \infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left(S_n^*(f, x)-f(x)\right)=(xf'(x))' \tag{5.46}$$

在$[0, \infty)$内闭一致成立。

用$C_0^2[0, \infty)$表示$\psi\in C^2[0, \infty)$且支柱Suppψ为$[0, \infty)$内致密集的全体，对$\forall f\in L_p[0, \infty)$和$\psi\in C_0^2[0, \infty)$引入双线性泛函：

$$A_n(f, \psi)=2n\int_0^{\infty}\left(S_n^*(f, x)-f(x)\right)\psi(x)dx \tag{5.47}$$

我们有

引理4.43 对确定的$\psi\in C_0^2[0, \infty)$，存在正常数M_ψ使得对$\forall f\in L_p[0, \infty)$和$n\in N$有

$$|A_n(f, \psi)|\leqslant M_\psi\|f\|_p. \tag{5.48}$$

证明　首先设$\psi\in C^2[0,\infty)$且$\mathrm{Supp}\,\psi\subset[0,A]$，又设$f\in L_p[0,\infty)$且对$x\geqslant 2A$时$f(x)=0$，记$I_k=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right)$，$z_k=\frac{k}{n}$，则有

$$A_n(f,\psi)=2n^3\sum_{k=0}^{2nA}\left(\int_{I_k}f(t)dt\right)\int_0^\infty(\psi(x)-\psi(z_k)-\psi'(z_k)(x-z_k))s_{nk}(x)dx$$

$$+2n^2\sum_{k=0}^{2nA}\left(\int_{I_k}f(t)dt\right)\int_0^\infty\psi'(z_k)(x-z_k)s_{nk}(x)dx$$

$$+2n\sum_{k=0}^{2nA}\int_{I_k}(\psi(z_k)-\psi(x))f(x)dx$$

注意到

$$|\psi(x)-\psi(z_k)-\psi'(z_k)(x-z_k)|\leqslant\frac{1}{2}\|\psi''\|_\infty(x-z_k)^2$$

$$|\psi(x)-\psi(z_k)|\leqslant\|\psi'\|_\infty|x-z_k|,\quad |x-z_k|\leqslant\frac{1}{n}\qquad(x\in I_k),$$

又由计算得到

$$\int_0^\infty(x-z_k)^2s_{nk}(x)dx=\frac{k+2}{n^3},$$

$$\int_0^\infty(x-z_k)s_{nk}(x)dx=\frac{1}{n^2}.$$

我们有

$$|A_n(f,\psi)|\leqslant K_\psi\left(n^3\sum_{k=0}^{2nA}\left(\int_{I_k}|f(t)|dt\right)\frac{k+2}{n^3}+n^2\sum_{k=0}^{2An}\left(\int_{I_k}|f(t)|dt\right)\frac{1}{n^2}\right.$$

$$\left.+n\sum_{k=0}^{2nA}\left(\int_{I_k}|f(t)|dt\right)\frac{1}{n}\right)$$

$$\leqslant K_\psi\int_0^{2A}|f(t)|dt\leqslant K_\psi A^{\frac{1}{q}}\|f\|_p,\qquad(5.49)$$

其中K_ψ是仅依赖于ψ的正常数，而$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$。

其次设$f\in L_p[0,\infty)$，令

$$f_0(x)=\begin{cases}f(x) & x>2A\\ 0 & 0\leqslant x\leqslant 2A\end{cases}$$

则有

$$A_n(f,\psi)=A_n(f-f_0,\psi)+A_n(f_0,\psi).$$

由于$\mathrm{Supp}\,\psi\subset[0,A]$，所以

$$|A_n(f_\varepsilon,\ \psi)| = |2n\int_0^A S_n^*(f_\varepsilon,\ x)\psi(x)dx|$$

$$\leqslant 2nA\|\psi\|_\infty \sup_{x\in[0,\ A]} |S_n^*(f_\varepsilon,\ x)|$$

$$\leqslant K_\psi\|f_\varepsilon\|_p\ n^{1+\frac{1}{p}} \sup_{x\in[0,A]} \sum_{k=2nA}^{+\infty} s_{nk}(x)$$

$$\leqslant K_\psi\|f_\varepsilon\|_p\ n^{1+\frac{1}{p}} \sum_{k=2nA}^{\infty} s_{nk}(x)$$

$$\leqslant K_\psi\|f_\varepsilon\|_p\ n^{1+\frac{1}{p}}e^{-\frac{1}{2}nA} \leqslant K_\psi\|f\|_p$$

其中利用了如下估计式

$$\sum_{k=2nA}^{\infty} s_{nk}(x) = O\left(e^{-\frac{1}{2}nA}\right),$$

而K_ψ是与n、f无关的正常数，但每次出现时不一定是相同的。因此，由(5.49)导出

$$|A_n(f,\ \psi)| \leqslant |A_n(f-f_\varepsilon,\ \psi)| + |A_n(f_\varepsilon,\ \psi)|$$

$$\leqslant K_\psi A^{\frac{1}{q}}\|f-f_\varepsilon\|_p + K_\psi\|f\|_p$$

$$\leqslant M_\psi\|f\|_p$$

其中M_ψ是仅依赖于ψ的正常数。证毕

记

$$S_p = \{f\,|\,f\in L_p[0,\ \infty)\text{且当}p>1\text{时有}xf''\in L_p[0,\ +\infty),$$
$$\text{而当}p=1\text{时有}xf'\in BV[0,\infty)\}$$

现在建立$\{S_n^*\}_{n\in N}$的$L_p(p\geqslant1)$饱和的逆定理。

定理4.53(V·Totik) 设$f\in L_p[0,\ \infty)(p\geqslant1)$，我们有

i)若$\|S_n^*(f)-f\|_p = O(n^{-1})$，则$f\in S_p$，

ii)若$\|S_n^*(f)-f\|_p = o(n^{-1})$，则$f=\text{const}$ (a·e)。

证明　利用(5.46)和(5.48)，类似于证明定理4.52的讨论可得，若$f\in L_p[0,\ \infty)$且

$$\|S_n^*(f)-f\|_p = O(n^{-1}),$$

则对$\forall\psi\in C_0^2[0,\ \infty)$，$f$必须适合如下积分方程，

$$\int_0^\infty f(x)(x\psi'(x))'dx=\begin{cases}\int_0^\infty h(x)\psi(x)dx & (p>1)\\ \int_0^\infty \psi(x)dh(x) & (p=1)\end{cases} \tag{5.50}$$

其中当$p>1$时有$h\in L_p[0,\infty)$，而当$p=1$时$h\in BV[0,\infty)$。

为解积分方程(5.50)，首先考查如下齐次方程的通解：

$$\int_0^\infty f(x)(x\psi'(x))'dx=0. \tag{5.51}$$

对$y\in(0,\infty)$，令

$$\psi_y(x)=\begin{cases}(x-y)^2 & (0\leqslant x\leqslant y)\\ 0 & (y\leqslant x),\end{cases}$$

则$\psi_y\in C_0^1[0,\infty)$。代入(5.51)导出，对$y\in(0,\infty)$有

$$\int_0^y f(x)(2x-y)dx=0,$$

关于y求导得到

$$yf(y)=\int_0^y f(x)dx$$

再次对y求导导出，对$y\in(0,\infty)$有

$$f'(y)=0 \quad (a.e),$$

可见$f=\text{const}(a.e)$。

由直接验证可见如下函数是方程(5.50)的一个特解：

$$f_0(x)=\begin{cases}\int_1^x\left(\frac{1}{t}\int_0^t h(u)du\right)dt & (p>1),\\ \int_1^x\left(\frac{1}{t}\int_0^t dh(u)\right)dt & (p=1).\end{cases}$$

因而得到积分方程(5.50)的通解为

$$f(x)=C+f_0(x),$$

其中C为常数。

因此只要证明$f_0\in S_p(p\geqslant1)$。若$p>1$，则有

$$xf_0''(x)=h(x)-\frac{1}{x}\int_0^x h(u)du \quad (a.e)$$

利用Hardy极大不等式得到

$$\|xf_0''\|_p\leqslant\|h\|_p+\frac{p}{p-1}\|h\|_p<+\infty,$$

若$p=1$，则有

$$xf'(x)=\int_0^x dh(\tau) \qquad (a\cdot e),$$

所以有

$$\|xf'\|_{BV}\leqslant\|h\|_{BV}<+\infty.$$

断言i)得证。

现在证明ii)，由于$f\in L_p[0,\infty)$且

$$\|S_n^*(f)-f\|_p=o(n^{-1})$$

则对$\forall\psi\in C_0^2[0,\infty)$有

$$\lim_{n\to+\infty} A_n(f,\psi)=0$$

从而得到，对$\forall\psi\in C_0^2[0,\infty)$，$f$必须适合如下积分方程：

$$\int_0^{+\infty} f(x)(x\psi'(x))'dx=0$$

故其通解为$f=\text{const}(a\cdot e)$。证毕

为建立$\{S_n^*\}_{n\in N}$的$L_p(p\geqslant1)$饱和等价定理，我们需要如下引理。

定理4.44 设$\varphi(x)=\ln x$，则对$n\in N$有

$$\|S_n^*(\varphi)-\varphi\|_1=O(n^{-1}) \tag{5.52}$$

证明 由于

$$S_n^*(f(t),x)=S_1^*\left(f\left(\frac{t}{n}\right),nx\right)$$

和$S_n^*(1,x)=1$，所以有

$$\|S_n^*(\varphi)-\varphi\|_1=\int_0^{+\infty}\left|S_1^*\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right),nx\right)-\varphi(x)\right|dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\left|S_1^*(\ln t-\ln n,nx)-(\ln nx-\ln n)\right|dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\left|S_1^*(\varphi,nx)-\varphi(nx)\right|dx=\frac{1}{n}\|S_1^*(\varphi)-\varphi\|_1$$

因此为证明(5.59)，只要证明

$$\|S_1^*(\varphi)-\varphi\|_1=O(1) \tag{5.60}$$

为此，记$s_k(x)=s_{1k}(x)=e^{-x}\frac{x^k}{k!}$，$N=[x]$，$k=N+h$，由于对$\theta\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$有

$$\sum_{|h|>N^\theta}(1+|h|^\theta+N)s_k(x)=O\left(Ne^{-\theta^2\frac{x}{2}}\right)=O(x^{-1}),\qquad (x>1),$$

所以

$$S_1^*(lnt,x)-lnx=\sum_{|h|<N^\theta}\left(\int_k^{k+1}lntdt-lnx\right)s_k(x)+O(x^{-1})$$

注意到

$$\int_k^{k+1}lntdt-lnx=kln\left(1+\frac{1}{k}\right)+ln(k+1)-1-lnx$$

$$=(N+h)ln\left(1+\frac{1}{N+h}\right)+ln(N+h+1)-1+ln(N+\{x\})$$

$$=1-\frac{1}{2(N+h)}+O\left(\frac{1}{(N+h)^2}\right)+lnN+\frac{h+1}{N}-\frac{(h+1)^2}{2N^2}+\left(\frac{(|h|+1)^3}{N^3}\right)-1$$

$$-lnN-\frac{\{x\}}{N}+O(N^{-2})$$

$$=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}-\{x\}+h-\frac{h^2}{2N}\right)+O\left(\frac{1}{N^2}+\frac{|h|}{N^2}+\frac{h^3}{N^3}\right)$$

又由Stirling公式有

$$lns_k(x)=-\left\{N+\{x\}\right\}+(N+h)ln(N+\{x\})-\left(N+h+\frac{1}{2}\right)ln(N+h)$$

$$+(N+h)-\frac{1}{2}ln2\pi+O\left(\frac{1}{N+k}\right)$$

$$=-ln\sqrt{2\pi N}-\frac{h^2}{2N}+\frac{1}{N}\left(h\{x\}-\frac{h}{2}+\frac{h^3}{6N}\right)+O\left(\frac{1}{N}+\frac{|h|^2}{N^2}+\frac{h^4}{N^3}\right),$$

所以

$$s_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2N\pi}}\cdot e^{-\frac{h^2}{2N}}\left(1+\frac{h\{x\}}{N}-\frac{h}{2N}+\frac{h^3}{6N^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{|h|^7}{N^4}\right)\right).$$

因此

$$\left(\int_k^{k+1}lntdt-lnx\right)s_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi N}}e^{-\frac{h^2}{2N}}\frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}-\{x\}+h-\frac{h^2}{N}\right)+$$

$$+\frac{h^2\{x\}}{N}+\frac{h^4}{6N^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+\frac{|h|^7}{N^4}\right)$$

于是得到

$$S_1^*(lnt,x)-lnx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{|h|<N^\theta}\left\{\frac{1}{\sqrt{2N}}e^{-\left(\frac{h}{\sqrt{2N}}\right)^2}\frac{1}{N}\left(\frac{1}{2}-\{x\right.\right.$$

$$-2\left(\frac{h}{\sqrt{2N}}\right)^2\Big)+2\{x\}\left(\left(\frac{h^2}{\sqrt{2N}}\right)^2+\frac{4}{6}\left(\frac{h}{\sqrt{2N}}\right)^4\right)+\left(1+\left(\frac{|h|}{\sqrt{2N}}\right)^7\right)\cdot$$

$$\cdot O\left(N^{-\frac{3}{2}}\sum_{|h|<N^{\delta}}\frac{1}{\sqrt{2N}}e^{-\left(\frac{h}{\sqrt{2N}}\right)^2}\right)\Big\}$$

$$=\frac{1}{N}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2N}}e^{-\left(\frac{h}{\sqrt{2N}}\right)^2}\Big\{\frac{1}{2}-\{x\}+2(\{x\}-1)\left(\frac{h}{\sqrt{2N}}\right)^2+$$

$$+\frac{4}{6}\left(\frac{h}{\sqrt{2N}}\right)^4\Big\}+O\left(N^{-\frac{3}{2}}\right)$$

因而当x充分大时有

$$S_1^*(lnt,\ x)-lnx=\frac{1}{N}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big\{\left(\frac{1}{2}-\{x\}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt+$$

$$+2(\{x\}-1)\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt+\frac{4}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}t^4e^{-t^2}dt+O\left(N^{-\frac{3}{2}}\right)\Big\}+O\left(N^{-\frac{3}{2}}\right)$$

由分部积分导出

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}t^4e^{-t^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt,$$

所以当$x\to+\infty$时有

$$S_1^*(lnt,\ x)-lnx=O\left(N^{-\frac{3}{2}}\right)=O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right).$$

(5.60)得证，从而引理证毕。

由引理4.44和定理4.53得到$\left\{S_n^*\right\}_{n\in N}$的$L_p$饱和价定理。

定理4.54(V.Totik) 设$f\in L_p[0,\ \infty)(p\geq 1)$，则有

i) $\|S_n^*(f)-f\|_p=O(n^{-1})\Longleftrightarrow f\in S_p$。

ii) $\|S_n^*(f)-f\|_p=o(n^{-1})\Longleftrightarrow f=const\ (a,\ e)$。

证明 定理的必要性断言已由定理4.53证实，因此我们仅需证明定理的充分性。ii) 中的断言，由$S_n^*(1)=1$是明显的，现设$p>1$，若$f\in S_p$，则有$xf''\in L_p[0,\infty)$，由第三章§5·3中例1得到

$$\|S_n^*(f)-f\|_p\leq\frac{K}{n}(\|f\|_p+\|xf''\|_p)$$

其中K是与n、f无关的正数。即$f\in S_p(p>1)$有

$$\|S_n^*(f)-f\|_p=O(n^{-1}),$$

其次，若$f\in S_1$，即$xf'=h\in BV[0,\infty)$，因而有

$$f(x)=\text{const}+\int_1^x \frac{h(u)}{u}du. \tag{5.61}$$

记$\varphi(u)=\ln u$，则由(5.61)导出，对$\forall x, t\in(0,\infty)$有

$$f(t)-f(x)=\int_x^t \frac{h(u)}{u}du=\int_x^t \varphi'(u)h(u)du$$

$$=h(t)\varphi(t)-h(x)\varphi(x)-\int_x^t \varphi(u)dh(u)$$

$$=h(x)(\varphi(t)-\varphi(x))+\int_t^x (\varphi(u)-\varphi(t))dh(u).$$

因此有

$$\|S_\lambda^*(f)-f\|_1\leqslant\|h(S_\lambda^*(\varphi)-\varphi)\|_1+\left\|S_\lambda^*\left(\int_t^x(\varphi(u)-\varphi(t))dh(u),\ x\right)\right\|_1$$

$$\leqslant\|xf'\|_\infty\|S_\lambda^*(\varphi)-\varphi\|_1+\left\|S_\lambda^*\left(\int_t^x(\varphi(u)-\varphi(t))dh(u),\ x\right)\right\|_1. \tag{5.62}$$

由于

$$S_\lambda^*(f,x)=\int_0^\infty f(t)H_\lambda(x,t)dt$$

其中$H_\lambda(x,t)$是非负核函数，所以两次利用Fubini交换定理并注意到$\text{sgn}(\varphi(u)-\varphi(t))=\text{sgn}(u-t)$，得到

$$\left\|S_\lambda^*\left(\int_t^x(\varphi(u)-\varphi(t))dh(u),\ x\right)\right\|_1$$

$$=\int_0^\infty\left|S_\lambda^*\left(\int_t^x(\varphi(u)-\varphi(t))dh(u),\ x\right)\right|dx$$

$$\leqslant\int_0^\infty\int_0^x H_\lambda(x,t)\int_t^x(\varphi(u)-\varphi(t))|dh(u)|dtdx+$$

$$+\int_0^\infty\int_x^\infty H_\lambda(x,t)\int_x^t(\varphi(t)-\varphi(u))|dh(u)|dtdx$$

$$\leqslant\int_0^\infty\left\{\int_u^\infty\int_0^u H_\lambda(x,t)(\varphi(u)-\varphi(t))dtdx+\right.$$

$$\left.+\int_0^u\int_u^\infty H_\lambda(x,t)(\varphi(t)-\varphi(u))dtdx\right\}|dh(u)|$$

$$= \int_0^{\infty} \left\{ \int_u^{\infty} S_t^*((\varphi(u)-\varphi(t))_+, x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^u S_t^*((\varphi(t)-\varphi(u))_+, x)\,dx \right\} |dh(u)|$$

注意到

$$\int_0^{\infty} S_t^*((\varphi(u)-\varphi(t))_+, x)\,dx = \int_0^{\infty} (\varphi(u)-\varphi(x))_+ dx$$

则有

$$\int_u^{+\infty} S_t^*((\varphi(u)-\varphi(t))_+, x)\,dx = -\int_0^u S_t^*((\varphi(u)-\varphi(t))_+, x)\,dx +$$

$$+ \int_0^u (\varphi(u)-\varphi(x))\,dx$$

因此得到

$$\int_u^{+\infty} S_t^*((\varphi(u)-\varphi(t))_+, x)\,dx + \int_0^u S_t^*((\varphi(t)-\varphi(u))_+, x)\,dx$$

$$= -\int_0^u S_t^*((\varphi(u)-\varphi(t))_+, x)\,dx + \int_0^u S_t^*((\varphi(t)-\varphi(u))_+, x)\,dx +$$

$$+ \int_0^u (\varphi(u)-\varphi(x))\,dx$$

$$= \int_0^u \left(S_t^*(\varphi(t)-\varphi(u), x) - (\varphi(x)-\varphi(u))\right) dx$$

$$= \int_0^u \left(S_t^*(\varphi, x)-\varphi(x)\right) dx$$

所以有

$$\left\| S_t^*\left(\int_0^x (\varphi(u)-\varphi(t))\,dh(u), x \right) \right\|_1$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^u \left(S_t^*(\varphi, x)-\varphi(x)\right) dx \right) |dh(u)|$$

$$\leq \|h\|_{BV} \|S_t^*(\varphi)-\varphi\|_1$$

因此由(5.62)导出

$$\|S_t^*(f)-f\|_1 \leq (\|xf'\|_{\infty} + \|xf'\|_{BV}) \|S_t^*(\varphi)-\varphi\|_1$$

故由引理1.44得到

$$\|S_n^*(f)-f\|_1=O(n^{-1})$$

证毕

特别有

推论4.33 Kantorovich—Sz'asz—Mirakjan算子列$\left\{S_n^*\right\}_{n\in N}$在$L_p[0,\infty)$上关于阶$\{n^{-1}\}$和平凡类$T(S_n^*)=\{C|C$为常数$\}$是$L_p(p\geq 1)$饱和的。

最后讨论Kantorovich型的Meyer—König and Zeller算子列$\left\{M_n^*\right\}_{n\in N}$的$L_p(p\geq 1)$饱和问题。对$f\in L_p(0,1)(p\geq 1)$和$n\in N$，令

$$M_n^*(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\int_{I_k}f(t)dtm_{nk}(x),\qquad x\in[0,1),$$

其中$I_k=\left[\frac{k}{n+k},\frac{k+1}{n+k+1}\right]$，$C_{nk}=\frac{(n+k)(n+k+1)}{n}$。明显地，对$f\in L_p(0,1)(p\geq 1)$有$\|M_n^*(f)\|_p\leq 2\|f\|_p$。

引理4.45 若$f\in C^2[0,1)$，则 (5.63)

$$\lim_{n\to\infty}2n\left(M_n^*(f,x)-f(x)\right)=(1-x)^2(xf'(x))'$$

在$[0,1)$内闭一致成立。

证明 由Taylor展开式

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(x)}{2}(t-x)^2+\varepsilon_x(t)(t-x)^2 \qquad (5.64)$$

其中$\varepsilon_x(t)\to 0(t\to 0)$在$[0,1)$内闭一致成立。

由计算得到

$$M_n^*(t-x,x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k+1}{n+k+1}-\frac{k}{n+k}\right)m_{nk}(x)=\frac{1-x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n+k+1}m_{n-1,k}(x)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1-x}{n-1}-\frac{1-x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+k-1}\right)m_{n-1,k}(x)+O(n^{-2})$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1-x}{n-1}-\frac{1-x}{2}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}xm_{n-1,k-1}(x)+O(n^{-2})$$

$$=\frac{1-x}{2(n-1)}-\frac{x(1-x)}{2(n-1)}+O(n^{-2})=\frac{1}{2}\frac{(1-x)^2}{n-1}+O(n^{-2})$$

注意到Meyer—König and Zeller 算子M_n的二阶矩

$$M_n((t-x)^2,x)=\frac{x(1-x)^2}{n+1}+O(n^{-2})$$

和恒等关系

$$\frac{k}{n+k}m_{nk}(x)=xm_{n,k-1}(x)$$

导出

$$M_n^*((t-x)^2,\ x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{k}{n+k}-x\right)^2+\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}\right)\left(3\left(\frac{k}{n+k}-x\right)+O(n^{-1})\right)m_{nk}(x)$$

$$=M_n((t-x)^2,\ x)+3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}\left(xm_{n,k-1}(x)-xm_{nk}(x)\right)$$

$$=\frac{x(1-x)^2}{n+1}+O(n^{-2})$$

类似地计算得到，当$n\to\infty$时

$$M_n^*((t-x)^4,\ x)=o(n^{-1})$$

在[0, 1)内闭一致成立。因此根据Voronovskaja渐近定理，由(5.64)导出，当$n\to\infty$时，

$$M_n^*(f,\ x)-f(x)=\frac{1}{2(n-1)}(1-x)^2f'(x)+\frac{1}{2(n+1)}x(1-x)^2f''(x)+o(n^{-1})$$

在[0, 1)内闭一致成立，即

$$\lim_{n\to\infty}2n\left(M_n^*(f,\ x)-f(x)\right)=(1-x)^2(xf'(x))'$$

在[0, 1)内闭一致成立。证毕

现在对$f\in L_p(0,\ 1)$和$\psi\in C^2[0,\ 1]$引入双线性泛函

$$A_n(f,\ \psi)=2n\int_0^1\left(M_n^*(f,\ x)-f(x)\right)\psi(x)dx$$

我们有

引理4.46 对每个确定的$\psi\in C^2[0,\ 1]$且Suppψ是[0, 1)内的紧密集，则对每个$f\in L_p(0,\ 1)(p\geqslant1)$有

$$|A_n(f,\ \psi)|\leqslant M_\psi\|f\|_p, \tag{5.68}$$

其中M_ψ是与n、f无关的正常数。

证明 由于

$$A_n(f,\ \psi)=2n\int_0^1\left(M_n^*(f,\ x)-f(x)\right)\psi(x)dx$$

$$=2n\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\int_{I_k}f(t)dt\int_0^1\psi(x)m_{nk}(x)dx-2n\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}f(t)\psi(t)dt$$

$$=2n\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\int_{I_k}f(t)dt\int_0^1\left(\psi(x)-\psi(z_k)-\psi'(z_k)(x-z_k)\right)m_{nk}(x)dx$$

$$+2n\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\int_{I_k}f(t)dt\int_0^1\psi'(z_k)(x-z_k)m_{nk}(x)dx$$

$$+2n\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}f(t)\left(\psi(z_k)-\psi(t)\right)dt$$

$$+2n\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{C_{nk}}{C_{n+1,k}}-1\right)\psi(z_k)\int_{I_k}f(t)dt$$

其中$z_k=\frac{k}{n+k}$。注意到

$$|\psi(x)-\psi(z_k)-\psi'(z_k)(x-z_k)|\leqslant\frac{1}{2}\|\psi''\|_{\infty}(x-z_k)^2$$

$$|\psi(z_k)-\psi(t)|\leqslant\|\psi'\|_{\infty}(t-z_k),\quad |t-z_k|<\frac{1}{n}\qquad(t\in I_k),$$

$$\left|\frac{C_{nk}}{C_{n+1,k}}-1\right|\leqslant\frac{1}{n}.$$

以及

$$\left|\int_0^1(x-z_k)m_{nk}(x)dx\right|=\left|\binom{n+k}{k}\frac{(k+1)!(n+1)!}{(n+k+3)!}-\binom{n+k}{k}\frac{k}{n+k}\frac{k!(n+1)!}{(n+k+2)!}\right|$$

$$=\frac{n+1}{(n+k+1)(n+k+2)}\left|\frac{k+1}{n+k+3}-\frac{k}{n+k}\right|\leqslant\frac{k}{n}\frac{1}{C_{nk}}.$$

$$\left|\int_0^1(x-z_k)^2m_{nk}(x)dx\right|\leqslant\binom{n+k}{k}\left(\frac{(k+2)!(n+1)!}{(n+k+4)!}\right)-2\frac{k}{n+k}\frac{(k+1)!(n+1)!}{(n+k+3)!}+$$

$$+\frac{k^2}{(n+k)^2}\frac{k!(n+1)!}{(n+k+2)!})\leqslant\frac{k}{n}\frac{1}{C_{nk}}$$

所以有

$$|(A_n(f,\psi)|\leqslant 2K\|\psi''\|_{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}|f(t)|dt+2K\|\psi'\|_{\infty}$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}|f(t)|dt+2\|\psi'\|_{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}|f(t)|dt+$$

$$+2\|\psi\|_{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}|f(t)|dt$$

$$\leqslant \left(2K\|\psi''\|_\infty+2(\|\psi'\|_\infty+1)+2\|\psi\|_\infty\right)\int_0^1|f(t)|dt$$

$$\leqslant M_4\|f\|.$$

证毕。

记

$S_p=\{f \mid f\in L_p(0,1)$ 且当 $p>1$ 时有 $x(1-x)^2f''\in L_p(0,1)$，而当 $p=1$ 时有 $x(1-x)^2f'\in BV[0,1)\}$.

利用引理4.45—1.46得到

定理4.55 设 $f\in L_p(0,1)(p\geqslant1)$，我们有

i)若 $\|M_n^*(f)-f\|_p=O(n^{-1})$，则 $f\in S_p$。

ii)若 $\|M_n^*(f)-f\|_p=o(n^{-1})$，则 $f=\text{const}$ (a. e)。

证明 利用(5.63)和(5.65)，类似于证明定理4.52的讨论可得，若 $f\in L_p(0,1)$ 且

$$\|M_n^*(f)-f\|_p=O(n^{-1})$$

则对 $\forall\psi\in C^2[0,1]$ 且支柱 $S_{\text{upp}}\psi$ 为 $[0,1)$ 内的紧密集，f 必须适合如下积分方程，

$$\int_0^1 f(x)[x((1-x)^2\psi(x))']'dx=\begin{cases}\int_0^1 h(x)\psi(x)dx & (p>1);\\ \int_0^1\psi(x)dh(x) & (p=1),\end{cases}\tag{5.66}$$

其中当 $p>1$ 时 $h\in L_p[0,1)$，而当 $p=1$ 时 $h\in BV[0,1)$。

为解积分方程(5.66)首先考查如下齐次方程的通解，

$$\int_0^1 f(x)[x((1-x)^2\psi(x))']'dx=0\tag{5.67}$$

对 $y\in[0,1)$，取

$$(1-x)^2\psi_y(x)=\begin{cases}(x-y)^2 & (0\leqslant x\leqslant y)\\ 0 & (y\leqslant x\leqslant 1),\end{cases}$$

则由(5.67)导出

$$\int_0^y f(x)(2x-y)dx=0$$

关于 y 求导数得到，对 $y\in[0,1)$ 有

$$f'(y)=0\quad(\text{a. e}),$$

可见 $f=\text{const}$ (a. e)。

由直接验证可见，如下函数是积分方程(5.66)的一个特解。

$$f_0(x)=\begin{cases}\int_{0}^{x}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\frac{h(u)}{(1-u)^2}du\,dt & (p>1),\\ \int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{1}{t}\int_{0}^{t}\frac{dh(u)}{(1-u)^2}dt & (p=1),\end{cases}$$

因而得到积分方程(5.66)的通解为

$$f(x)=\mathrm{const}+f_0(x).$$

因此只要证明$f_0\in S_p(p\geqslant 1)$，若$p>1$时，则有

$$(1-x)^2f_0'(x)+x(1-x)^2f_0''(x)=h(x)\in L_p(0,1). \tag{5.68}$$

因为对每个$0<\xi<1$有$\frac{h(u)}{(1-u)^2}\in L_p(0,\xi)$，所以由Hardy极大等式导出

$$f_0'(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{h(u)}{(1-u)^2}du\in L_p(0,\xi),$$

从而$(1-x)^2f_0'\in L_p(0,\xi)$，故由(5.68)得到$x(1-x)^2f_0''(x)\in L_p(0,\xi)$。又因为对$\xi<\xi'<1$，有

$$\|(1-x)f_0'(x)\|_{L_p(\xi,\xi')}\leqslant K\left(\|f_0\|_p+\|x(1-x)^2f_0''\|_{L_p(\xi,\xi')}\right)$$

可见对任意近于1的ξ'有

$$\|(1-x)^2f_0'(x)\|_{L_p(\xi,\xi')}\leqslant K\left(\|f_0\|_p+\|x(1-x)^2f_0''\|_{L_p(\xi,\xi')}\right).$$

从而由(5.68)导出$x(1-x)^2f_0''(x)\in L_p(\xi,1)$，因此得到$x(1-x)^2f_0''\in L_p(0,1)$。

类似地，当$p=1$时有

$$x(1-x)^2f_0'(x)=(1-x)^2\int_0^x\frac{dh(u)}{(1-u)^2}\quad (a.\ e).$$

设$dh(u)=dh_+(u)-dh_-(u)$，其中h_+或h_-是增加函数，于是$x(1-x)^2f_0'(x)$的全变差为

$$\|x(1-x)^2f_0'\|_{BV(0,1)}=\int_0^1\left|d\left((1-x)^2\int_0^x\frac{dh(u)}{(1-u)^2}\right)\right|$$

$$\leqslant\int_0^1\left|d\left((1-x)^2\int_0^x\frac{dh_+(u)}{(1-u)^2}\right)\right|+\int_0^1\left|d\left((1-x)^2\int_0^x\frac{dh_-(u)}{(1-u)^2}\right)\right|$$

$$\overset{(记)}{=}I_1+I_2$$

其中

$$I_1\leqslant\int_0^1(1-x)^2 d\int_0^x\frac{dh_+(u)}{(1-u)^2}+\int_0^1\int_0^x\frac{dh_+(u)}{(1-u)^2}|d(1-x)^2|$$

$$\leqslant\int_0^1 dh_+(u)+2\int_0^1(1-x)\int_0^x\frac{dh_+(u)}{(1-u)^2}dx$$

$$\leqslant\int_0^1 dh_+(u)+2\int_0^1\frac{1}{(1-u)^2}\left(\int_u^1(1-x)dx\right)dh_+(u)$$

$$=3\int_0^1 dh_+(u)$$

同样估计得到

$$I_2\leqslant 3\int_0^1 dh_-(u)$$

所以有

$$\|x(1-x)^2 f_0'(x)\|_{BV[0,1]}\leqslant 3\int_0^1|dh(u)|<+\infty$$

i)的断言得证。

现在证明ii)。由于$f\in L_p(0,1)$且当$n\to\infty$时，有

$$\|M_n^*(f)-f\|_p=o(n^{-1})$$

则对$\forall\psi\in C^2[0,1]$且支柱$\mathrm{Supp}\,\psi$为$[0,1)$内致密集有

$$\lim_{n\to\infty}A_n(f,\psi)=0.$$

从而f为齐次方程：

$$\int_0^1 f(x)[x((1-x)^2\psi(x))']'dx=0$$

的解，由i)可知$f=\mathrm{const}(a.e)$。证毕

为建立$\{M_n^*\}_{n\in N}$的$L_p(p\geqslant1)$饱和等价定理，还需如下一些引理。

引理4.47 设$s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$，$s_0=0$，则对每个$n\in N$和$x\in(0,1)$有

$$\sum_{k=0}^{\infty}(s_{n+k}-s_k)m_{n,k}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-x)^i}{i}\tag{5.69}$$

证明 记

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(s_{n+k}-s_k)m_{n,k}(x)$$

则

$$g'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(s_{n+k}-s_k)m'_{nk}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(s_{n+k}-s_k)\binom{n+k}{k}x^{k-1}(1-x)^n[k(1-x)-(n+1)x]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(s_{n+k}-s_k)\frac{(n+k)!}{(k-1)!n!}x^{k-1}(1-x)^n-\sum_{k=0}^{\infty}(s_{n+k}-s_k)\frac{(n+k+1)!}{k!n!}x^k(1-x)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(s_{n+k+1}-s_{n+k}+s_k-s_{k+1})\frac{(n+k+1)!}{k!n!}x^k(1-x)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+k+1}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{(n+k+1)!}{k!n!}x^k(1-x)^n-\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1+k-1}{k+1}x^{k+1}(1-x)$$

$$=\frac{-1}{x}\sum_{k=1}^{n}m_{n-1,k}(x)=-\frac{1}{x}\left(1-(1-x)^n\right).$$

由于$g(0)=s_n$，所以有

$$g(x)=s_n-\int_0^x\frac{1-(1-\tau)^n}{1-(1-\tau)}d\tau=s_n-\int_0^x\left(\sum_{i=0}^{n-1}(1-\tau^i)\right)d\tau$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-x)^i}{i},$$

(5.69)得证。

引理4.48 设$\varphi(x)=\ln x$，则有

$$|M_n^*(\varphi)-\varphi\|_1=O\left(\frac{1}{n}\right)\tag{5.70}$$

证明 由于对$x\in(0,1)$有

$$M_n^*(\ln t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\left[\frac{k+1}{n+k-1}\ln\left(\frac{k+1}{n+k+1}\right)-\frac{k}{n+k}\ln\frac{k}{n+k}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{k+1}{n+k+1}-\frac{k}{n+k}\right)\right]m_{nk}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\ln\frac{k+1}{n+k+1}+\frac{k(n+k+1)}{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\frac{n+k}{n+k+1}\right)-1\right)m_{nk}(x)$$

又因为对$x\in[0,1)$有

$$\ln x=\ln(1-(1-x))=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-x)^i}{i}.$$

所以由引理4.47导出

$$\left|M_n^*(\ln t,x)-\ln x\right|\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(1-x)^i}{i}+\sum_{k=0}^{\infty}\left|\ln\frac{k+1}{n+k+1}+s_{n+k}-s_k+\right.$$

$$+\frac{k(n+k+1)}{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\frac{n+k}{n+k+1}\right)-1\Big|m_{nk}(x),$$

其中对k≥1有

$$\frac{k(n+k+1)}{n}\ln\left(1+\frac{n}{k(n+k+1)}\right)-1=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\left(\frac{n}{k(n+k+1)}\right)^{i-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{n}{k(n+k+1)}+O\left(\frac{n^2}{k^2(n+k+1)^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2k}+O(k^{-2})+O(n^{-1}),$$

又利用Euler公式

$$c_k=s_k-\ln(k+1)=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{i}-\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2i^2}-\frac{1}{3i^3}+\cdots\right).$$

我们有

$$\ln\frac{k+1}{n+k+1}+s_{n+k}-s_k=c_{n+k}-c_k=\sum_{j=k+1}^{k+n}\left(\frac{1}{2i^2}-\frac{1}{3i^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2k}+O(k^{-2})+O(n^{-1})$$

因此有

$$\left|M_n^*(\ln t,\ x)-\ln x\right|\leqslant K\left(m_{n,0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{n}\right)m_{nk}(x)\right)+$$

$$+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{(1-x)^i}{i}\qquad(5.71)$$

因而由(5.71)导出

$$\|M_n^*(\varphi)-\varphi\|_1=\int_0^1\left|M_n^*(\ln t,\ x)-\ln x\right|dx$$

$$\leqslant K\left(\frac{1}{n+2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{n}\right)\frac{n+1}{(n+k+1)(n+k-2)}+\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}\right.$$

(5.70)得证。

引理4.49 设$\varphi_1(x)=\ln(1-x)$，则有

$$\|M_n^*(\varphi_1)-\varphi_1\|_1=O(n^{-1}).\qquad(5.72)$$

证明 由于对$x\in[0,1)$有

$$M_n^*(\ln(1-t),\ x)-\ln(1-x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_{nk} \int_{I_k} ln(1-t)dm_{nk}(x) - ln(1-x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_{nk}\left[\left(1-\frac{k}{n+k}\right)ln\left(1-\frac{k}{n+k}\right)-\left(1-\frac{k+1}{n+k+1}\right)ln\left(1-\frac{k+1}{n+k+1}\right)-C_{nk}^{-1}\right]m_{nk}(x)$$
$$-ln(1-x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left((n+k)ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)-1+ln\frac{n}{n+k}-ln(1-x)\right)m_{nk}(x)$$

注意到对$k\geq 0$有

$$(n+k)ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)-1=\frac{-1}{2(n+k)}+O\left(\frac{1}{n+k}\right)=O(n^{-1})$$

和

$$ln\frac{n}{n+k}-ln(1-x)=ln\left(1-\frac{k}{n+k}\right)-ln(1-x)$$
$$=-\frac{1}{1-x}\left(x-\frac{k}{n+k}\right)+\frac{1}{(1-x)^2}\left(\frac{k}{n+k}-x\right)^2+O\left(\frac{1}{(1-x)^3}\left|\frac{k}{n+k}-x\right|^3\right)$$

所以有

$$M_n^*(\,ln(1-t),\ x\,)-ln(1-x)=O(n^{-1})+\frac{1}{(1-x)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n+k}-x\right)^2 m_{nk}(x)$$

$$+O\left(\frac{1}{(1-x)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n+k}-x\right|^3 m_{nk}(x)\right)=O(n^{-1})$$

因此得到

$$\|M_n^*(\varphi_1)-\varphi_1\|_1=\int_0^1\left|M_n^*(ln(1-t),\ x)-ln(1-x)\right|dx.$$
$$=O(n^{-1})$$

证毕

现在引入修正的Kantorovich型的Meyer—König and Zeller算子列$\{\widetilde{M}_n\}_{n\in N}$，对每个$f\in L_p(0,\ 1)(p\geq 1)$和$n\in N$，令

$$\widetilde{M}_n(f,\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\int_{I_k}f(t)dtm_{n-1,k}(x),\qquad x\in[0,1),$$

我们有

引理4.50 对每个$f\in L_1[0,\ 1)$有

$$\|M_n^*(f)-\widetilde{M}_n(f)\|_1\leq\frac{1}{n}\|f\|_1.$$

证明 由于对$x\in[0,\ 1)$有

$$M_n^*(f,x)-\widetilde{M}_n(f,x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\int_{I_k}f(t)dt\,(m_{nk}(x)-m_{n-1,k}(x))$$

所以

$$\|M_n^*(f)-M_n(f)\|_1\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}|f(t)|\,dt\,C_{nk}\left(\int_0^1 m_{nk}(x)dx-\int_0^1 m_{n-1,k}(x)dx\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{I_k}|f(t)|\,dt\left|\frac{C_{nk}}{C_{n+1,k}}-1\right|\leqslant\frac{1}{n}\|f\|_1.$$

证毕

特别有

推论4.34 设$\varphi(x)=\ln x$，$\varphi_1(x)=\ln(1-x)$，则有

$$\|\widetilde{M}_n(\varphi)-\varphi\|_1=O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5.74}$$

$$\|\widetilde{M}_n(\varphi_1)-\varphi_1\|_1=O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5.75}$$

引理4.51 设$\varphi_0(x)=\frac{x}{1-x}$，则

$$\|\widetilde{M}_n(\varphi_0)-\varphi_0\|_1=O(n^{-1}) \tag{5.76}$$

证明 由于对$x\in[0,1)$有

$$\widetilde{M}_n(\varphi_0,x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\left(\int_{I_k}\frac{t}{1-t}dt\right)m_{n-1,k}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\left(\ln\frac{n+k+1}{n+k}-\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}\right)m_{n-1,k}(x)$$

又

$$\frac{x}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\frac{k}{n}\cdot\frac{n}{(n+k)(n+k+1)}m_{n-1,k}(x)$$

所以有

$$\widetilde{M}_n(\varphi_0,x)-\varphi_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\left(\ln\frac{n+k+1}{n+k}-\frac{n+k}{(n+k)(n+k+1)}\right)m_{n-1,k}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)-\frac{1}{n+k+1}\right)m_{n-1,k}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}C_{nk}\left[\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}+O\left(\frac{1}{(n+k)^2}\right)\right]m_{n-1,k}(x)$$

因此得到

$$\|\widetilde{M}_n(\varphi_n)-\varphi_n\|_1=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k+1}\right)+O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2}$$
$$=O(n^{-1}).$$

证毕。

由推论4.34和引理4.50—4.51导出

推论4.35 设$g(x)=\ln\frac{x}{1-x}+\frac{x}{1-x}$，则有

$$\|\widetilde{M}_n(g)-g\|_1=O(n^{-1}). \tag{5.77}$$

定理4.56 设$f\in L_p(0,1)(p\geqslant1)$，则有

i) $\|M_n^*(f)-f\|_p=O(n^{-1})\Longleftrightarrow f\in S_p$，

ii) $\|M_n^*(f)-f\|_p=o(n^{-1})\Longleftrightarrow f=\text{const}$.

证明 定理中的必要性断言已由定理4.55证实，因此我们仅需证明定理的充分性。ii)中的断言，由$M_n^*(1)=1$是明显的．现设$p>1$，若$f\in S_p$，则有$x(1-x)^2f''\in L_p(0,1)$，由第三章§5.3例2得到

$$\|M_n^*(f)-f\|_p\leqslant\frac{K}{n}(\|f\|_p+\|x(1-x)^2f''\|_p)$$

其中K是与n、f无关的正数，即对每个$f\in S_p(p>1)$有

$$\|M_n^*(f)-f\|_p=O(n^{-1}).$$

其次，若$f\in S_1$，即$x(1-x)^2f'\in BV[0,1]$，因而有

$$f(x)=\text{const}+\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{h(u)}{u(1-u)^2}du \tag{5.78}$$

记$g(u)=\ln\frac{u}{1-u}+\frac{u}{1-u}$，则由(5.78)导出，对$\forall t$，$x\in(0,1)$有

$$f(t)-f(x)=\int_x^t\frac{h(u)}{u(1-u)^2}du=\int_x^t g'(u)h(u)du$$
$$=h(t)g(t)-h(x)g(x)-\int_x^t g(u)dh(u)$$
$$=h(x)(g(t)-g(x))+\int_x^t(g(u)-g(t))dh(u).$$

因此由$\widetilde{M}_n(1)=1$导出，

$$\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_1\leqslant\|h(\widetilde{M}_n(g)-g)\|_1+\left\|\widetilde{M}_n\left(\int_t^x(g(u)-g(t))dh(u),\ x\right)\right\|_1$$

$$\leqslant \|x(1-x)^2 f''\|_\infty \|\widetilde{M}_n(g)-g\|_1 + \|\widetilde{M}_n(\int_t^x (g(u)-g(t))dh(u), x)\|_1.$$

由于对$f\in L_1(0,1)$有

$$\widetilde{M}_n(f, x)=\int_0^1 f(t)H_n(x, t)dt,$$

其中$H_n(x, t)$是非负核函数，且有

$$\int_0^1 \widetilde{M}_n(f, x)dx=\int_0^1 f(t)dt.$$

注意到$\mathrm{sgn}(g(u)-g(t))=\mathrm{sgn}(u-t)$，并两次利用Fubini交换定理得到

$$\|\widetilde{M}_n(\int_t^x (g(u)-g(t))dh(u), x)\|_1$$

$$=\int_0^1 |\widetilde{M}_n(\int_t^x (g(u)-g(t))dh(u), x)|dx$$

$$\leqslant \int_0^1 \int_0^x H_n(x, t)\int_t^x (g(u)-g(t))|dh(u)|dtdx+$$

$$+\int_0^1 \int_x^1 H_n(x, t)\int_x^t (g(t)-g(u))|dh(u)|dtdx$$

$$\leqslant \int_0^1 \Big\{\int_u^1 \int_0^u H_n(x, t)(g(u)-g(t))dtdx+$$

$$+\int_0^u \int_u^1 H_n(x, t)(g(t)-g(u))dtdx\Big\}|dh(u)|$$

$$=\int_0^1 \Big\{\int_u^1 \widetilde{M}_n((g(u)-g(t))_+, x)dx+$$

$$+\int_0^u \widetilde{M}_n((g(t)-g(u))_+, x)dx\Big\}|dh(u)|$$

注意到

$$\int_0^1 \widetilde{M}_n((g(u)-g(t))_+, x)dx=\int_0^1 (g(u)-g(x))_+ dx$$

故有

$$\int_u^1 \widetilde{M}_n((g(u)-g(t))_+, x)dx=-\int_0^u \widetilde{M}_n((g(u)-g(t))_+, x)dx+$$

$$+\int_0^u (g(u)-g(x))dx$$

因此得到

$$\int_u^1 \widetilde{M}_n((g(u)-g(t))_+, x)dx + \int_0^u \widetilde{M}_n((g(t)-g(u))_+, x)dx$$

$$= -\int_0^u \widetilde{M}_n(((g(u)-g(t))_+, x)dx + \int_0^u \widetilde{M}_n((g(t)-g(u))_+, x)dx +$$

$$+ \int_0^u (g(u)-g(x))dx$$

$$= \int_0^u (\widetilde{M}_n(g(t)-g(u), x) - (g(x)-g(u))dx$$

$$= \int_0^u (\widetilde{M}_n(g, x)-g(x))dx,$$

所以有

$$\|\widetilde{M}_n(\int_t^x (g(u)-g(t))dh(u), x)\|_1$$

$$\leqslant \int_0^1 (\int_0^u (\widetilde{M}_n(g, x)-g(x))dx) |dh(u)|$$

$$\leqslant \|h\|_{BV} \|\widetilde{M}_n(g)-g\|_1.$$

于是由(5.77)导出

$$\|\widetilde{M}_n(f)-f\|_1 \leqslant (\|x(1-x)^2f'\|_\infty + \|x(1-x)^2f'\|_{BV}) \|\widetilde{M}_n(g)-g\|_1 = O(n^{-1})$$

再由引理4.50得到，对每个$f\in S_1$有

$$\|M_n^*(f)-f\|_1 = O(n^{-1}).$$

证毕。

特别地有

推论4.36 Kantorovich 型的 Meyer—König and Zeller 算子列$\left\{M_n^*\right\}_{n\in N}$，和修正的 Kantorovich 型的Meyer—Köniy and Zeller 算子列$\left\{\widetilde{M}_n\right\}_{n\in N}$，在$L_p(0, 1)$上关于阶$\{n^{-1}\}$及平凡类$T(M_n^*)=T(\widetilde{M}_n)=\left\{C \mid C为常数\right\}$都是$L_p(p\geqslant 1)$饱和的。

值得指出的是，本节的论证方法可以推广到如下一般的保积型正线性算子列$\{L_n\}_{n\in N}$，即对每个$n\in N$和$\forall f\in L_p[a, b](p\geqslant 1)$，有

$$\int_a^b L_n(f, x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

其中$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$。

参考文献

徐利治

[1]论Arnold 型的奇异积分对某些类函数的最佳逼近．数学进展 2(1956) 695—702

[2]渐近积分和积分逼近．科学出版社 1958

[3]*Approximation of Nonbounded Continuous Functions by Certain sequences of Linear Positive Operator or Polynomials*. Studia Math 21 (1961) 37—43

[4]*On a kind of Extended Fejér—Hermite interpolation Polynomials* Acta Math Acad Sci Hung 25 (1964) 325—328

王仁宏

[1]无界函数逼近。科学出版社 1983。

[2]Hermite—Fejér 插值多项式的逼近阶。科学通报 7 (1979) 292—295。

[3]拟局部正线性算子与无界函数的逼近．数学学报 23 (1980) 163—176．

[4]高维欧氏空间上线性算子对多元函数的逼近阶之渐近公式．吉林大学自然科学学报。1(1964) 1—16

[illegible]

[1]连续周期函数用富里哀级数的蔡查罗平均数的一致逼近．数学进展 6 (1963) 379—387

[2]关于 Cesàro 算子的逼近常数，数学学报 24(4) (1981) 516—537

[3]关于周期函数用线性算子的平均逼近．数学学报 25(5) (1982) 561—577

[4]关于 Jackson 不等式．北京师范大学学报 1(1981) 1—6。

[5]周期函数用其付立叶部分和的平均逼近，数学年刊 1(2) 1680 273—282。

王兴华

[1]连续周期函数用飞耶积分逼近，杭州大学学报(1963) 1—12。

[2]爵克松奇异积分对连续函数逼近的准确常数，数学学报 14(2) 1964 231—237。

[3]用富里哀级数的正约线性和逼近连续函数，数学进展 8(3)(1965)322—325。

谢庭藩

[1]逼近算子的极限常数．杭州大学学报 1(1963) 111—115。

李文清

[1]最佳逼近常数约上界估计．厦门大学学报（自然科学版） 2(1957) 15—19。

[2]关于伯恩斯坦—康托洛维奇多项式的逼近度．厦门大学学报(自然科学版) 2(1962) 116—126。

[3]关于 k 维空间的伯恩斯坦多项式的逼近度。厦门大学学报（自然科学版）2(1962) 119—129

[4]关于费叶尔算子的逼近度，厦门大学学报（自然科学版） 2(1977) 5—15。

[illegible]

[1]论算子$\beta_{\lambda}(f, x)$的极性。数学学报 15(1) (1965) 54—62。

吴顺唐

[1]关于用线性正算子逼近连续函数。数学进展 9(3)(1966) 245—250。

陈文忠

[1]线性正算子逼近连续函数的渐近公式，厦门大学学报 18(1) (1979) 1—14。

[2]某些可微函数的逼近度。厦门大学学报 2(4) (1982) 152—166。

[3]光滑模与逼近度。厦门大学学报 22(3) (1983) 266—274。

[4]Bernstein 算子在C_0 上的逼近定理，厦门大学学报 24(2) (1985) 133—141。

[5]线性算子在 H^{*}_{ω} 上的逼近定理。厦门大学学报 24(4) (1965) 395—403。

[6]关于 Bernstein 型算子逼近的几个问题。河南大学学报 2(1985) 1—16。

[7]*A Pointwise o Saturation Theorem* 数学研究与评论 8(1987) 457—462。

[8]一般形式的 Lupas—Bakakov 算子。厦门大学学报 27(3)(1988)，2542—60。

[9]*On the Approximation by the mixed Exponential type Operator*.J.Approx. Th. Appl 5(2) (1989) 9—24。

[10]*Approximation by modified Durrmyer—Bernstein Operators* 数学研究与评论 9(1) (1989) 39—40。

[11]算子逼近中的概率方法，河南大学学报增刊 (1988)（第五届全国逼近论会议论文集。）71—81。

陈文忠 郭顺生

[1]一类正卷积算子的饱和性。工程数学学报 3(2) (1986) 11—22

[2]*On the Rate of Convergence of the Gamma Operator for Function of Bounded Variation*. J. Approx. Th. Appl. 1(5)(1985) 85—96。

[3]某些正线性算子对有界变差函数的点态逼近度。3(1987) 243—252。

[4]关于 Meyer—Konig and Zeller 算子对有界变差函数的点态逼近度，数学年刊 2(1988) 234—240。

陈文忠 田继春

[1]关于积分型 Stancu 算子的逼近性质。厦门大学学报 26(3)(1987) 270—276。

陈文忠 王子玉

[1]二维 Durrmeyer—Bermstein 算子的逼近定理。河南大学学报 2(1988) 1—12。

陈文忠 侯象乾

[1]关于 Bernstein 型算子在 C_0 空间上的逼近性质。厦门大学学报 27(1) (1988) 28—34。

Anastassiou, G. A.

[1]*A Study of Positive Linear Operators by the Method of Moments*. Dissertation, Univ. of Rochester 1981.

[2]*On the Degree of Weak Convergence of a Sequence of Finite Measures to the Unit Measure under Convexity*. Manuscript 1984.

[3]*A "K-Attainable" Inequality Related to the Convergence of Positive Linear Operators*. J. Approx. Theory 44(1985), 380-383.

[4]*A Study of Positive Linear Operators by the Method of Moments, One-Dimensional Case*. J. Approx. Theory 45(1985), 247-270.

Becker, M.

[1]*Über den satz von Trotter mit Anwendungen auf die Approximations theorie*. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 2577, Fachgruppe Physik/Mathematik. Opladen: Westd. Verlag 1976.

Becker, M. Fink, K. M. Nessel, R. J.

[1]*Approximation by Bernstein Polynomials in Weighted BV-spaces*. In: Functions, Series, Operators, Vol. I, II(Proc. Int. Conf. Budapest 1980; ed. by B. sz. -Nagy, J. Szabados), 221-231.

Becker, M. -Lautner, K. J. Nessel, R. J. Worms, G. J.

[1]*On Global Approximation by Kantorovitch Polynomials in Ld*. In: Constructive Function Theory(Proc. Conf. Varna. 1981; ed. by Bl. Sendov et al.), 217-223.

Becker, M. -Nessel, R. J.

[1]*On the Global Approximation by Kantorovitch Polynomials*. In: Approximation Theory III(Proc. Int. Sympos. Austin 1980; ed. by E. W. cheney), 207-212. New York-San Francisco-London: Acad. Press 1980.

[2]*Some Global Direct Estimates for Kantorovitch Polynomials*. Analy sis 1(1981), 111-127.

[3]*On Global Saturation for Kantorovitch Polynomials*. In: Approximation and Function Spaces(proc. Int.Conf.Gdansk 1979; ed. by Z. Ciesielski), 89-101.

[4]*A global approximation theorem for Meyer-King and Zeller operators*. Math. Z. 160, 195-206(1978)

Berens, H.

[1]*Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozesen auf Banachräumen*, Springer Lecture Notes in Math., Vol. 64.

[2]*On the saturation theorem for Cesaro means of Fourier series*, Acta Math.

Acad. Sci. Hung., 21(1970), 95-99.

[3]*On Pointwise approximation of Fourier series by typical means*, *Tohoku Math. J.* 23(1971), 147-153.

Bohman, H.

[1]*On Approximation Co] ontinuous and of Analytic Functions*, *Ark.* Mat., 2(1952), 43-56.

Bojanic, R.

[1]*A note on the degree of approximation to continuous functions*, *L'Enseignemnt Math.*, 15(1969), 43-51.

Bojanic, R., and DeVore, R.

[1]*A proof of Jackson's theorem*, *Bull.* A.M.S., 75(1969), 364-367.

Boman, J.

[1]*Saturation problems and distribution theory*, in: *Topics in Approximation Theory by H.S. Shringer Lecture Notes in Math.*, vol. 187.

Butzer, p.L.

[1]*Sur le role de la transformation de Fourier dans quelques problemes d'approximation*, *C. R.* Acad. Sci. Paris, 249(1959), 2467-2469.

[2]*Representation and approximation of functions by general singu lar integrals*, Neder. Akad. Wtensch. Proc. Ser. 63A(Indag.Math.22(1960), 1-24.

[3]*Fourier transform methods in the theory of approximation*, *Arch.* Rat. Mech. Anal. 5 (1960), 390-415.

Butzer, P. L., and Eerens, H.

[1]*Semi-groups of Operators and Approximation*, Springer, Berlin, 1967, 318 pp.

Butzer, P. L., and Görlich, E.

[1]*Saturationsklassen und asymptotische Eingenschaften trigonometrischer singularer Integrale*, in: Festschrift zur Gedachtnisfeier Karl Weierstrass, 1815-1965, 339-392.

Butzer, P. L.and Nessel, R. J.

[1]*Fourier Analysis and Approximation*, vol.1, Academic Press, N.Y. 1977, 553

Butzer, P.L., Nessel, R.J., and Scherer, K.

[1]*Trigonometric convolution operators with kernels having alternating signs and their degree of convergence*, Jber. Deutsch. Math. - Verein, 70 (1967), 86-99.

Butzer, P.L., and Scherer, K.

[1]*Approximationsprozesse und Interpolationsmethoden* (Hochschschulskripten 826/826a), Bibliograph. Inst., Mannheim, 1968, 172 pp.

Butzer, P.L., and Stark, E.

[1]*Wesentliche asymptotische Entwichlunen fur Approximationsmasse trigonometrischer singul rer, Math. Nachr.* 39(1969), 223-237.

Chen, W.-Z. (陈文忠)

[1]*Asymptotic Formual on the Approximation of Continuous Functions by Linear Positive Operators(Chinese). Acta Sci. Natur. Univ. Amoien.* 18(1979), No. 1, 1-14.

[2]*The Approximation Degree for Some Differentiable Function Class (Chinese)*. Acta Sci. Natur. Univ. Amoien. 21(1982), NO. 4, 387-396.

[3]*The Approximation Degree and the Smooth Modulus(Chinese)*. Acta Sci. Natur. Univ. Amoien. 22(1983), No. 3, 266-274.

[4]*Degree of Approximation of Some Differentiable Function Classes In Approximation Theory IV*(Proc. Int. Sympos. College Station 1983 ed by C. K. Chui et al.), 401-405.

[5]*The Approximation Theorem of Bernstein Operators for C_0 Space (Chinese)*. Acta Sci. Natur. Univ. Amoien. 24 (1985), No. 2, 133-141.

[6]*The Approximation Theorem of Linear Operators for H^{*}_{ω} Space (Chinese)*. Acta Sci. Natur. Univ. Amoien. 24(1985), No. 4, 395-403.

[7]*Recent Studies of the Bernsteiein type Operators (Chinese)*. Acta Sci. Natur. Hennan Univ. 2(1986), 1-16.

[8]*A Pointwise o Saturation Theorem*. J. M. Research and Exposition 3, 1987. 457-462

[9]*On The Integral type Meyer-König and Zeller operators Approximation Th and its Appl.* 2(3) 1986. 9-18.

Curtis, P. C.

[1]*The degree of approximation by positive convolution operators*. Mich. Math. J., 12(1965), 155-160.

Cheney, E. W.

[1]*Introduction to Approximation Theory*. New York : Mc-Graw Hill 1966. 2nd edition : New York : Chelses Publishing Company 1982.

Cheng, F. H.

[1]*On the Rate of Convergence of Bernstein Polynomials of Functions of*

Zbl. 533.

Davis, P. J.

[1]*Interpolation aod Approximation*, Blaisdell, N. Y., 1963, 363.

De Vore, R.

[1]*On Jackson's* Theorem, J. Approx. Th., 1(1968), 314-318.

[2]*Saruration of positive convolution operators*, J. Approx. Th. 3(1970), 410-429.

[3]*On a saturation theorem of Turechii*, Tohoku Math. J., 23(1971), 353-362.

[4]*On the direct theorem of saturation*, Tohoku Math. J., 23(1971), 363-370.

[5]*A pointwise "o" saturation theorem for positive convolution operators*, Proceedings of the Conference on Linear Operators and Approximaton, Oberwolfach, (1971), 364—370.

[6]*The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operatorspro*, ingeiir-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.

Derriennic, M. M.

[1]*On Multivariate Approximation by Bernstein-Type polynomials*.J.Appxor *Theory* 45(1985), 155-166.

[2]*Polynames de Beinstine modifiés sur un simplexe de Riprodleme des moments*. To appear in : Actes du Symposium Laguerre, Bar le Duc 1984.

Dickmeis, W, -Nessel, R. J.

[1]*Condenstian Principles with Rates*, Stud. Math., 75(1982), 55-68.

[2]*Quantitative Prinzipien gleichma Biger Beschronk theit und Scharfe von Fehlerabschatzungen. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfaen* Nr. 3117, Oplåden : Westd. Verlag 1982.

[3]*Approximation by Bernstein Polynomials(Query in "Problems"). In : Second Edmonton Conference on Theory (Proc*, 1982Sem. on Approximat ion Thdory, Edmonton, Albertaed. by Z. Ditzian et al.), 392 393.

Ditzian, Z.

[1]*Interpolation Theorems and the Rate of ConvergenceB of ernstein Polynomials*. In : Approximation Theory III(proc. Int. Sympos. Austin 1980; ed. by E. W. Cheney), 341-347. New York - San Francisco -London : Acad. Press 1980.

[2]*Saturation of Approximat on of n dimensional Functions*. In : Costructive

Function Theory (Proc. Conf. Varan 1981; ed. by Bl. Sendov et al), 295-300. Sofia: Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences 1983,

[3]*Derivatives of Bernstein Polynomials and Smoothness*. Proc. Amer. Math. Soc. 93(1985), No. 1, 25-31.

[4]*Rate of Approximation of Linear Processes*. Acta Sci. Math. 48(1985) 103-128.

[5]*Convergence of Sequences of Linear Positive Operators* Remarks and Applications, Jour. Approx. Th., 14(1975), 296-301.

[6]*On interpolation of L [a,b] and weighted Sobolev spaces*. Pacific J. Math. 60, 30 -323(1980).

Ditzian, Z. and Totik, V.

1. *Moduli of Smoothness*. Manuscript 1985.

Z. Ditzian and C. P. May,

1. *Lp saturation and inverse theorems for modified Polynomials, Indiana Math.* J., (1976), 733-751.

Esseen, C. G.

[1]*Uber die asymptotisch beste Approximation Stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-polynomen*, Numer. Math. 2(1960), 206-213.

Favard, J.

[1]*Sur l'approximation des fonctions d'une variable reele*, In: Analyse Harmonique, Coll. Int. Centre, Rech. Sci., No. 15, Paris (1949), 97-110.

[2]*Sur l'approximation dans les espaces vectoriels*, Ann. Mat. Pura Appl. 2(1949), 259-291.

Fejér, L.

[1]*Uber trigonometrische Polynome*, J. Reine Angew. Math. 146 (1915), 53-82 .

Freud, G.

[1]*Uber einen Satz von P. Erdos und P. Turan, Acta*. Math. Acad. Sci. Hung. 4(1953), 255-266.

[2]*On approximation by positive linear methods, I & II*, Studia Sci. Math. Hung. 2(1967)63-66, 3(1968), 365-370.

Feller, W.

[1]*An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2. New York London-Sidney-Toronto: J. Wiley & Sons 1971, Russian translation: Moscow: Mir 1967.

Gonska, H. H.

[1]*Quantitative Aussagen zur Approximation durch positive lineare Operatoren*. Dissertion, Universitat Duisburg 1979.

[2]*On Approximation of Continuously Differentiable Functions by Positive Lineer Operators*. Bull. Austral. Math. Soc. 27(1983), 73-81.

[3]*On Approximation in Spaces of Continuous Eunctions*. Bull. Austral. Math. Soc. 28(1983), No. 3, 411-432.

[4]*Query in "Unsolved Problems"*, *In*: *Constructive Function Theory* (Proc. Conf. Varna 1981; by Bl. Sendov et al.), 597-598.

[5]*A Note on Pointwise Approximation by Hermite-Fejer Type Interpolation Polynomials*. In: Functions, Series, Operators, Vol.I,II (Proc. Int. Conf. Budapest 1980; ed. by B. Sz. -Nagy, J. Szabados), 525-537.

[6]*Quantitative Korovkin Type Theorems on Simultaneous Approximation*. Math. Z. 186(1984), No.3, 419-433.

[7]*On Approximation in C(X)*. *In*: *Constructive Theory of Functions* (Proc. Int. Conf. Varna 1981; ed. by B'. Sendov et al.), 364-369.

[8]*On Approximation by Linear Operators*: *Improved Estimates*. Anal. Numér. Théor. Aporox. 14 (1985), No.1, 7-32.

[9]*Quantitative Approximation in C(X)*. Habilitationsschrift, Universitat Duisburg 1985.

Gonska, H. H. and Meier, J.

[1]*Quantitative Theorems on Approximation by Bernstein-Stancu Operators*. Calcolo 21(1984), No.4, 317-335.

[2]*On Approximation by Bernstein Thpe Operators*: Best Constants. To appear in: Studia Studia Sci. Math. Hungar.

Goodman, T. N. T.

[1]*Shape Preserving Approximation by Polyhedral Splines*. In: Multivariate Approximation Ⅲ (Proc. Conf. Oberwolfach 1985; ed. by W. Schempp and K. Zeller), 198-205.

Grundmann, A.

[1]*Inverse Theorems for Kantorovic Polynomials*. In: 19. Fourier Analysis and Approximation Theosy (Proc. Conf. Budapest 1967; ed by G. Alexits, P. Turan), 395-401.

Görlich, E.

[1]*Distributional methods in saturation theory*, J. Approx. Th. 1(1968) 111 -136.

[2]*Uber Optimale Approximationsoperatoren*, Pro-. of International Conference on Constructive Function Theoery, Varna, 1970, 187–191.

Görlich, E., and Stark, E. L.

[2]*Uber beste Konstanten und asymptotische Entwicklungen Positiver Faltungsintegrale und deren Zusammenhang mit dern SaturationsProblem*, Jber, Deutsch, Math. -Verein., 72(1970), 18–61.

Hsu, L. C.

[1]*A Survey of Some Recent DevelоPments of APProximation Theory in China*, In: Approximation Theory IV (Proc. Int. Sympos. College Station 1983; ed. by C. K. Chui. et al.), 123–151.

Hsu, L-C. Yang J. X. Chen. W. Z.

[1]*On a class of Summation-Integral OPerators*. Approx. Th. (Prob. 4-th Conferece on Approx. Th 1984. (Dalian China) 91–92.

Khan, R. A.

[1]*On the LP Norm for Some APProximation OPerators*.J. Approx.Theory 45(1985), 339–349.

King, J. p.

[1]*Probabilistic Analysis of Korovkin's Theorem*. J. Indian Math. Soc. (N. S.) 44(1980), No. 1–4, 51–58.

Korovkin, P. P.

[1]*On convergence of linear Positive oPerators in the sPace of continuous functins (Russian)*, Doklady, S. S. S. R., 90(1953), 961–964.

[2]*On the order of the aPProximation of functions by linear Positive oPerators (Russian)*, Doklady, S. S. S. R., 114(1957), 1158–1161.

[3]*An asymPtotic ProPerty of Positive methods of summation of summation of Fourier series and best aPProximation of functions of class Z_2 By linear Positive Polynomials oPerators (Russian)*, Usephi Mat. Nauk, 13(1985), No. 6(84), 99–103.

[4]*Linear OPerators and APProximation Theory*, Hindustan, Delhi, 1960, 22 pp.

[5]*Best aPProximation of functions of class Z_2 by certain linear oPerators*, (Russian). Doklady, S. S. S. R., 127(1959), 513–515.

[6]*AsymPtotic ProPerties of Positive methods for summation of Four ier series (Russian)*, Usephi Mat. Nauk, 15(1960), No.1(91), 207–212.

Laha, R. G. and Rohatgi, V. K.

[1]*Probability Theory*. New York: John Wiley & Sons 1979.

Lehnhoff, H. -G.

[1]*Local Nikolskii Constants for Posive Linear Operators*. J. Approx. Theory 33(1981), 224-235.

[2]*Local Nikolskii Constants for a Special Class of Baskakov Operators*. J. Approx. Theory 33(1981), 236-247.

Lorentz, G. G.

[1]*Inequalities and the saturation classes of Bernstein polynomials*, in: On Approximation Theory, Proceedings of the conference held in Oberwolfach, 1963, 200-207.

[2]*Approximation of Functions*, Holt, New York, 1966, 188 pp.

[3]*Bernstein Polynomials*, Toronto, 1953.

[4]*Approximation Theory*, New York San Francisco London 1973.

[5]*Korovkin Set (Sets of Convergence)Regional Conference at the University of Californiz*, Riverside, June 15-19, 1972.

Lorentz, G. G. and Schwmaker, L.

[1]*Saturation of positive operators*, (to appear).

Lorentz, G. G. Jetter, K. and Riemenschneider, S. D.

[1]*Bikhoff Interpolation*. Reading, MA: Addison-Wesley 1983.

Lupas, A.

[1]*Problem* No. 6485. Amer. Math. Monthly 92(1985), 62.

Lupas, A. and Manole, C.

[1]*O prietate a polynomelor lui S. N.* Bernstein. Bul. Sul. Stiint. Tehn. Inst. Polithn. Timisoara. Mat.-Fiz. 26(40)(1981), No.2, 33-38.

Mamedov, I.T. and Ibragimov, A. I.

[1]*The Asymptotic Value of Approximation of Derivatives of Differentiable Functions by Derivatives of Linear Operators(Russian)*. Učen. Zap. Azerb. in-tnefti ichimil, Ser. 9(1973), No.7, 58-65.

Mamedov, R. G.

[1]*On the order of the approximation of differentiable functions by linear positive operators*, (Russian), Doklady, S. S. S. R., 128(1959), 674-676.

[2]*On the asymptotic value of the approximation of repeadedly differentiable functions by linear positive operators(Russian)*, Doklady, S. S. S. R., 146 (1962), 1013-1016.

[3]*On the order and on the asymptotic value of the approximation of functions by generalized Laudau operators*, *(Russian)*, Akad. Nauk.

Azerbaidzanskŏi, S. S. S. R. Trudy Institute Math. i Mechaniki, 2(10) (1963), 49-65.

[4]*Approximation of Functions by Linear Operators*(Azerb.). Baku: A.D. N. 1967.

Maier, V.

[1]*The L saturation class of the Kantorovich operator.* J.Approx. Theory 22, (1978)223-232.

Matsuoka, Y.

[1]*On the approximation of functions by some singular integrals,* Tohoku MathNJ., 18(1966), 13-43.

Mond, B. and Vasudevan, R.

[1]*On Approximation by positive Linear Operators*' J. Approx. Theory 30 (1980)334-336.

Müller, M. W.

[1]*On the Degree of* L_p*-Approximation by Integral Schoenberg Splines.* In: Fourier Analysis and Approximation Theory (Proc. Conf. Budapest 1976; ed. by G. Alexits, P. Turan), 565-570.

[2]*Uber die Methode der integrierten Schoenberg-Splines.* In: Constructive Function Theory(Proc. Conf. Varna 1981; ed. by Bl. Sendov et al.), 442-436.

Sciences 1933. MR 84m: 41015/Zbl. 557. 41016/RZM 1934, 36121.

[3]*Approximation durch lineare Positive Operatoren bei Gemischter Norm Habilationsschrift,* Stuttgart, 1970.

Muhlbach, G.

[1]*Operatoren vom Bernsteinchen Typ,* J. Approx. Th., 3(1970), 274-292.

Nagel, J.

[1]*Satze Korovkinschen Typs fur die Approximation linearer Positiver Operatoren* Dissertation, Universitat Essen 1978.

[2]*Asymptotic Properties of Powers of Kantorovic Operators,* J. Approx. Theory 66 (1982), 268-275.

[3]*Kontorovic Operators of Second Order,* Monatsh. Math. 95(1983), 33-44.

Natanson, I. P.

[1]*Saturation classes in the theory of singular integrals (Russian),* Doktady, S. S. S. R., 156(1964), 520-523.

Natanson, G.

[1]*Application of the Method of I. P. Natanson and I. Yu. Kharrik in the Algebraic Case(Russian)*. In: Operator Theory and Function No. 1, 166-170, Leningrad: Leningrad. Univ. 1983.

Nessel, R. J.

[1]*Uber Nikoskii-Konstanten von Positiven Approximationsverfahren bezugiich Lipschitz-Klassen*, Jber. Deutsch. Math., Verein. 73(1971), 6-47.

Nishishiraho, T.

[1]*Quantitative Theorems on Approximation Processes of Positive Linear Operators*. In: Multivariate Approximation Theory II (Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach 1982; ed by W. Schempp, K. Zeller), 297-311.

[2]*Convergence of Positive Linear Approximation Processes*. Tohoku Math. J. 35(1983), 441-458.

[3]*The Degree of Approximation by Poiitive Linear Approximation Processes*. Bull. College of Education, University of the Ryukyus 28(1985), 7-36.

Riemenschneider, S. D.,

[1]*Korovkin Theorems for a Class of Integral Operators*, Jour. Th., 13 (1975), 316-328.

[2]*The L -Saturation of the Bernstein-Kontorovitch Polynomials*, Jour. Approx. Th., 23(1978), 158-162.

Sahai, A. and Prasad, G.

[1]*Sharp Estimates of Approximation by Some Positive Lineer Operators*. Bull. Austral. Math. Soc. 29(1984), No. 1, 13-18.

Sato, K.

[1]*Global Approximation Theorems for Some Exponential-Type Operators*. J. Approx. Theory 32(1981), 32-46.

Schumaker, L. L.

[1]*Spline Functions: Basic Thoory*. Printed in the United of America 1981.

Schurer, F. and Steuel, F. W.

[1]*Exact Deqrees of Approximation for Two-Dimensional Bernstein Operators on C^1*. In: Approximation Theory III (Proc. Int. Sympos. Austin 1980; edby E. W. Cheney), 823-829.

[2]*Meyer-Konig and Zeller Operators and an Improved Inequality for a Best Constan of Approximation*. Delft Progr. Rep. 9(1984), No. 4,

271-291.

[3]*Note on The Asymptotic Degree of Approximation of functions in* C^1 *[0, 1] by Bernstein polynomials*, Proc. Kon. Ned. AKad. Wetenschappen Ser. A, Math. Sci., (1977), No. 4, 128-130.

Schurer, F.,

[1]*On the Approximation of Functions of Many Variabes With Linear Positive Operators, Indagationes Math.*, 25(1963), 313-327.

Shisha, O., and Mond, B.,

[1]*The degree of conᵃergence of sequenᵓes of linnear positive onerators*, *Proc.* Nat. Acad. Sci. U. S. A. 60(1968), 1196-1200.

Shisha, O., Stemin, C., and Fekete, M.

[1]*On the accuraᵓy of approximation to given functions by certain interpolatory polynomials of given degree*, Riveon Lematematica, 8(1954), 59-64.

Shikkema, P. C,

[1]*Über len grad cer appeoximation mit bernstein-polynomen*, Numer. Math., 1(1959), 221-239.

[2]*Uber die schurerschen linearen positiven operatoren*, II., Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschappen, Amsterdam, Auch in Indagationes Math., 78(1975), 243-253.

Sikkema, P. C. -van der Meer, P. J. C. -Roos, M.

[1]*Determination of the Exact Degree of Local Approximation by Some Linear Positive Operators Involving the Modulus of Continuity of the* th. *P-th Derivative*, Indeg. Ma3(1981), 117-128.

Singh, S. P.

[1]*On Baskakov-Type Operators*. Comment. Math. Univ. St.Pauli 31(1982), 137-142.

[2]*Approximations and Positive Linear Operators*. J. Univ. Kuwait Sci. 11(1984), No.1, 1-6.

[3]*On the Deqrᵊe of Approximation by Baskakov-Type Operators*. Appl. Math. Sci. 20(1984), No. 1-2, 81-86.

Singh, S. P. Thapliyal, P. S. Bhusan, B. V.

[1]*Some Polynomials of Bernstein Type*. Janabha 14(1984), 145-151.

Singh, S. P. -Varshney, O. P.

[1]*On Positve Linear Operators*, J. Orissa Math. Soc, 1(1982), No. 2, 51-56.

Singh, S. P. -Varshney, O. P. -Prasad, G.

[1]*Approximation for Functions of Two Variab by Bernstein Polynomoals*. Rend. Mat. 3(1983), Ser. VII, No. 3, 559-566.
1984, 106106.

[2]*On Convergence bf the Derivatives of Baskakov-Type Operators*, Bull. Un. Mat. Ital. A(6) 2(1983), No.2, 289-296.

[3]*On the Degree of L^1-Approximation by Modified Bernstein Polynom03.s*. Polynomials. Publ. Inst. Math, (Beograd) (N. S)34 (48)(1983), 199.

Shina, T. A

[1]*Restucturad Sequences of Linear Positive Operators for Higher Order L-approximation*. Thesis, Indian Institute of Technoogy, Kanpur (India) 1981.

Stancu, D. D.

Curs si culegere de probleme de analiza numerica, Vol. I. Cluj-Napoc Univ. Babes-Bolyai, Fac de Mathematica 1977.

Stancu, D. D.

[1]*A Generalization of the Schoenberg Approximation Spline Operator*. *Studia Univ*. Babes-Bolyai Math. 26(1981), No. 2, 37-42.

[2]*Quadrature Formulas Constucted by Using Certain Linear Positive Operators*. In: Numericat Integration (Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwotfach 1981; ed by G. Hammertin), 24-251.

[3]*Approximation of Functions by Means of a New Generalized Bernstein Operator*. Catcolo 20 (1983), No.2, 221-229.

[4]*On the Representation by Divided and Finite Differences of Some Linear Positive Operators Constucted by Means of Probi listic Methods*, In: Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity (Ctuj-Napoca, 1983), 159-166.

[4]*A Note on a Multiparametr Bernstein-Type Approximating Operator*. Mathematica (Cluj) 26(49)(1984), No. 2, 153-157.

[5]*Generalized Bernstein Approximating Operators*. In: Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity (Clul-Napoca, 1984), 185-192.

[6]*Probilistic Approach to a Class of Generalized Bernstein Approximating Operators*. Anal. Numer. Theor. Approx. 14(1985), No. 1, 83-89.

Stark, E. L.

[1]*Uber die Approximationsmasse spezieller singularer Integrale*, Computing

4(1969), 153-159.

[2]*Uber trigonometrische singulare Faltungsintegrale mit Kernen endlicher Oszillation*, Dissertation, Aachen, 1970.

[3]*Nikol'skil -Konstanten und Approximatiousma Be im HilbertRaum*. Habilitationsschrift, RWTH Aachen 1978.

[4]*Bernstein-Polynome*, 1912-1955. In: Functional Analysis and Approximation (Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach 1980; ed. by P. Butzer, Butzer, B. Sz-Nagy, E. Gorlich), 443-461.

Steckin, S. B.

[1]*On the approximation of periodic function by Fejer sums (Russian)*. Trudy Mat, Inst. V. A. Stecklova, 62(1961), 46-60.

Swetits, J. J. and Wood, B.

[1]*L, Saturation of Positive Convolution Operatorr*. In: Approximation Theory III (Proc. Conf. Austin 1980; ed by E. W. Cheney), 877-880.

[2]*Unbuded Functions and Positive Linear Operators*. J. Approx. Theory 34(1982), 325-334.

[3]*Quantitative Estimates for L Approximation with Positive Linear Operators*. J. Approx. Theory 38(1983), 81-89.

[4]*Degree of L, Approximation with Modified Baskakov Operators*. Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 30(1985), No. 4, 289-294.

Timan, A. F.

[1]*Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, New York, Macmillan, New York, 1963, 286.

Tureckii, A. H.

[1]*Saturation in the space C (Russian)*, Dokl, S. S. S. R., 126(1959), No.6, 1207-1209.

Totik, V.

[1]*Problems and Solutions Concerning Kantorovich Operators*. J. Approx. Theory 37(1983), 51-68.

[2]*Approximation in $L^1$by Kantorovich Polynomials*. Acta Sci. Math. (Szeged)46(1983), No.1-4, 211-222.

[3]*Uniform Approximation by Baskakov and Meyer-Konig and Zeller Operators*. Period. Math. Hungar. 14(1983), No. 3-4, 209-228.

[4]*Approximation by Szasz-Mirakjan-Kantorovich Operators in L_p($p>1$)*. Anal. Math. 9(1983), 147-167.

[5]*L_p($p>1$)-Approximation by Kantorovich Polynomials*. Analysis 3(1983),

79-100.

[6]*Uniform APProximation by Bernstein-TyPe OPerators*. **Indag. Math. 46(1984)**, 87-93.

[7]*The Necessity of a New Kind of Smoothness*. In: **Approximation Thery and Functional Analysis (Proc. Conf. Math. Res. Inst. OberWolfach** 1983), 233-248.

[8]*An InterPolation Theorem and Its APPlications to Positive OPerators*. Pacific J. Math. 111(1984), **No. 2**, 447-481.

[9]*Saturation for Bernstein TyPe Rational Functions*. **Acta Math. Hungar**, 43(1984), **No. 3-4**, 219-250.

[10]*Some Prooerties of a New Kind Kind of Modutus of Smoothness*.**Z.** Anal. Anwendungen **3(1984)**, 187-178.

[11]*Uniform aPoroximation by Szasz-Mirakjan tvPe oPerators*. **Acta Math.** Acad. Sci. Hung., 41(1983/3-4).

[12]*An interPolation theorem and its AoPlications to Positive OPerators*. Pacfic. J. Math III(2) (1984) 447-481.

Wood, B.

[1]*A Generatized Euler Summability Transform*. Math. Z. **105(1968)**, 36-48.

[2]*L_p-APProximation by Linear Combineations of Integral Bernstein-TyPe OPerators*. Anal. Numer Theor. Approx. **13(1984)**, no. 1, 65-72.

[3]*Uniform APProximationPby Linear Combinations of Bernstein-TyPe Polynomials*. J. Approx, Theory 41(1984), no. 1, 51-55.

[4]*Order of APProximatioN by Linear Combinations of Positive Linear OPerators*. J. Approx. Theory **45(1985)**, 375-382.